现代数学基础丛书

拓扑空间论

● 高国士 著







科学出版社

现代数学基础丛书

拓扑空间论

高国士 著

科学出版社

2000

内 容 简 介

本书是作者在一般拓扑学研究生教材的基础上修改和补充而成的，是拓扑空间理论方面的专著.

全书共八章. 前四章是拓扑空间论的基础知识. 后四章是一般拓扑学两大课题“覆盖性质”与“广义度量空间”的深入研究，介绍了国内外，特别是我国学者在这方面的成果. 为了读者深入理解本书内容，在每章后安排了大量的习题.

本书适合于高等学校高年级教师与学生、研究生阅读.

图书在版编目（CIP）数据

拓扑空间论/高国士著. —北京：科学出版社，2000
（现代数学基础丛书）
ISBN 7-03-008144-7

Ⅰ. 拓… Ⅱ. 高… Ⅲ. 拓扑空间 Ⅳ. O189. 11

中国版本图书馆 CIP 数据核字（1999）第 72838 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717

西源印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2000 年 7 月第 一 版 开本：850×1168 1/32
2000 年 7 月第一次印刷 印张：12 3/4
印数：1—2 500 字数：330 000

定价：25.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉）

序

本书是作者 1979 年开始招收一般拓扑学硕士研究生以来所用教材经过历年修改、补充而成，是拓扑空间理论方面的专著.

本书前四章是拓扑空间论的基础知识，自成体系. 可供需要了解拓扑空间论基础知识的数学系高年级学生及其他有关学科学生阅读. 后四章是一般拓扑学中两大课题——“覆盖性质”与“广义度量空间”——的深入研究，希能导向该课题的研究前沿，可作为一般拓扑学的硕士、博士研究生的教材或参考书.

作者在 60 年代初致力于“覆盖性质”与“广义度量空间”的研究，特别在 70 年代、80 年代间这方面的研究在国内外蓬勃开展，作者身历其境，有必要，也有责任在介绍、评述国外学者成果时，组织、纳入国内学者的成果以激励士气，共攀科学高峰.

由各种不同背景产生的形形色色的拓扑空间呈分散、孤立的状态是很自然的. 通过适当的映射，找出其间内在联系，改变其呆滞状态使之出现生动活泼场面是行之有效的. 充分利用映射这一“工具”是本书的特点. 事实上本书是 Arhangel'skii “映射与空间”理论的发展与应用.

为了集中精力于上述两课题并由于作者知识有限，一般拓扑学的其他课题如基数函数、箱拓扑、集论公理的引用等均未涉及. 与上述二课题有联系的可膨胀空间、Σ积的正规性等问题有蒋继光的专著《一般拓扑学专题选讲》作专门研究，本书也未涉及. 相应的有关论文均未录入参考文献.

在严谨的逻辑推导的同时，适当照顾可接受性. 对书中久未引用的概念，常以回忆方式提一下以便阅读.

习题是精心配置的. 有巩固教材的，有补充、扩充教材的，

有些是定理证明要用到的简单结果，有些是分散在教材各处的类似概念的汇集，可资比较．对教材中很少出现的概念（如正则闭集、紧开拓扑），配些简单练习让读者熟悉一下．有少数较难的，如证不出知道这结果也好（有兴趣的读者可查所引论文）．

作者才疏学浅，耄耋著书．希能嘉惠后学而已．脱漏、不足之处，海内同行，不吝指正．

陈必胜、葛英副教授及张建平、蔡伟元、杨晓华、蒋彤敏同志抄写、校对、复印全部稿件，恽自求教授组织、安排整个出版事宜，谨此致谢．特别感谢苏州大学数学系的资助．不然，本书难以和读者见面的．

高国士

1999 年 6 月

于苏州大学数学科学学院

目　录

预 备 知 识

§1. 集、关系和映射

两个**集**(set)A、B 的**并**(union)、**交**(intersection)及**差**(difference)分别表示为:

$$A \cup B = \{x: x \in A \text{ 或} x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x: x \in A \text{ 且} x \in B\},$$
$$A - B = \{x: x \in A \text{ 且} x \notin B\}.$$

这里"$\in$","$\notin$"分别表示"**属于**"、"**不属于**".**空集**用$\varnothing$表示,$A \cap B = \varnothing$表示集 A 与集B 不交;$A - B = \varnothing$表示 $A \subset B$,也就是 $x \in A \Rightarrow x \in B$.符号"$\Rightarrow$"表示"**蕴含**".符号"$\Leftrightarrow$"表示"当且仅当".$A \subset B$ 时称为A 是B 的**子集**(subset).如果 $A \subset B$ 且$A \neq B$ 称为A 是B 的**真子集**(proper subset),空集是任何集的子集.

以集为元素的集称为**集族**,或简称为**族**(family 或 collection),用花体字母表示,如 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 等.为了表示集族常利用**指标集**(index set),例如集族$\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$,或写作$\{A_\gamma: \gamma \in \Gamma\}$,这里 Γ 是指标集.由集组成的序列$\{A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots\}$为集族的特例,这时可表示为$\{A_n\}_{n \in N}$,或写作$\{A_n: n \in N\}$,这里指标集是自然数集 N,或省去指标集记为$\{A_n\}$或$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$.集族的并、交可表示为$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{A}_\gamma$、$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} \mathscr{A}_\gamma$;在集的序列情况则为$\bigcup\limits_{n \in N} A_n$(或$\bigcup_{n=1}^{\infty} An$),$\bigcap_{n \in N} A_n$(或$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$).

设$\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$是$X$ 的子集族,B 是X 的子集,则下列等式成立:

(i) $$B \cup (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma}(B \cup A_\gamma),$$
$$B \cap (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma}(B \cap A_\gamma).$$

(ii) $$X - (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcap_{\gamma \in \Gamma}(X - A_\gamma),$$

$$X - (\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (X - A_\gamma).$$

(i)称为**分配律**,(ii)称为 de Morgan **公式**. 在通常讨论时,所涉及的集都是某一给定集 X 的子集,则对 $B \subset X$,差集 $X - B$ 也称为 B 关于 X 的**补集**(complement). 从而上述 de Morgan 公式可叙述为:并集的补集 = 补集的交集,交集的补集 = 补集的并集.

给定集 X 与 Y, X 的元素 a 与 Y 的元素 b 形成的所有**有序对** (a, b) 组成的集称为 X 与 Y 的**积**(product),记作 $X \times Y = \{(a, b): a \in X, b \in Y\}$, $X \times Y$ 的每一子集 R 称为一个**关系**(relation),对每一个 $(a, b) \in R$,记作 aRb,集 X, Y 分别称为关系 R 的定义域、值域. 关系 $f \subset X \times Y$ 称为 X 到 Y 内的**映射**(mapping),如果对每一个 $x \in X$,存在 $y \in Y$ 使 $(x, y) \in f$,且 y 为 x 所唯一确定,也就是 $(x, y) \in f$ 及 $(x, y') \in f \Rightarrow y = y'$. 以 $f: X \to Y$ 表示这一映射,这一为 x 所确定的 y 记作 $f(x)$,上述映射也可表示为 $f: x \mapsto f(x), x \in X$. $f(x) \in Y$,集 $A \subset X$ 在映射 f 下的**象**(image)为集

$$f(A) = \{y: y = f(x), x \in A\}.$$

集 $B \subset Y$ 在映射 f 下的**逆象**(inverse image)为集

$$f^{-1}(B) = \{x: f(x) \in B\}.$$

映射 $f: Z \to Y$ 称为**单映射**(injective mapping),如果 $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;称为**满映射**(surjective mapping),如果 $f(X) = Y$,这时也称 f 是由 X 到 Y **上的**(onto)映射. 如果既是单映射又是满映射,则称为**一一对应映射**(bijective mapping).

集在映射 f 下的象和逆象有下列关系式:

$$f(f^{-1}(B)) = B \cap f(X) \subset B, f^{-1}(f(A)) \supset A.$$

当 f 是满映射时,有 $f(f^{-1}(B)) = B$;当 f 是单映射时,有 $f^{-1}(f(A)) = A$.

设 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 是一集族,由指标集 Γ 到 $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$ 的满足 $f(\gamma) \in A_\gamma (\gamma \in \Gamma)$ 的映射 f 的全体表示为 $\prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$,称为**集族 $\{A_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ 的积**,对每一 $f \in \prod_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma$, $f(\gamma) \in A_\gamma$ 称为 f 的第 γ 个**坐标**,记作

$f(\gamma)=A_\gamma$，这样$\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$的元素$f$可以用所有的坐标$x_\gamma(\gamma\in\Gamma)$表示，记作$\{x_\gamma\}$. $\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$到$A_\gamma$的映射$p_\gamma$使对每一$\{x_\gamma\}\in\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$，$p_\gamma(\{x_\gamma\})=x_\gamma$，这一映射称为$\prod_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$到$A_\gamma$的**投影**(projection).

关系$R\subset X\times X$称为X上的关系. X上的关系称为**等价关系**(equivalence relation)，如果满足下列条件：

(i)对每一$x\in X$，xRx(自反性)；

(ii)如果xRy，则yRx(对称性)；

(iii)如果xRy及yRz，则xRz(传递性).

设$X=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$，且$\gamma\neq\gamma'\Rightarrow A_\gamma\cap A_{\gamma'}=\varnothing$，则称$\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是$X$的一个**分解**(decomposition)；X上的等价关系R确定着X的一个分解：x,y同属于A_γ，当且仅当xRy；相反地，X的一个分解确定着X上的等价关系R：xRy当且仅当对某一$\gamma\in\Gamma$，$x,y\in A_\gamma$.

X上的关系$<$称为X上的**线性序**(liner order)或**全序**(total order)，如果满足下列条件：

(i)如果$x\neq y$，则$x<y$或$y<x$；

(ii)如果$x<y$，则$y<x$不能成立(反对称性)；

(iii)如果$x<y$，$y<z$，则$x<z$.

赋以线性序(或全序)$<$的集X称为**线性序集**(或**全序集**)，有时记作$(X,<)$. 点x_0称为线性序集X的**最小元素**，如果对每一$x\in X-\{x_0\}$，$x_0<x$.

线性序集X称为**良序集**(well ordered set)，如果X的任何非空子集具有最小元素.

线性序集$(X,<)$到线性序集$(Y,<')$上的一一对应映射称为**保序的**(order preserving)，如果对任意$x,x'\in X$，$x<x'\Rightarrow f(x)<'f(x')$.

X上的关系$\leqslant$称为X上的一个**序**(order)或**偏序**(partial order)，如果满足下列条件：

(i)对每一$x\in X$，$x\leqslant x$，

(ii)如果$x\leqslant y$及$y\leqslant x$，则$x=y$，

(iii)如果 $x \leqslant y$ 及 $y \leqslant z$,则 $x \leqslant z$.
赋以序(或偏序)$\leqslant$的集称为**有序集**(ordered set)(或**偏序集**),有时记作$(X,\leqslant)$.

设集 X 上具有线性序$<$,可对任意的 $x, y \in X$ 规定:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x < y \text{ 或 } x = y.$$

则得到 X 上的序$\leqslant$.所以每一线性序集可以作为有序集.

设集 X 上具有序$\leqslant$,如果对 X 的某子集 A 的任意两点 x, y 有 $x \leqslant y$ 或 $y \leqslant x$,可以规定:

$$x < y \Leftrightarrow x \leqslant y \text{ 及 } x \neq y.$$

这样得到 A 上的线性序$<$,集 A 称为有序(偏序)集 X 的线性序(全序)子集,也称为**链**(chain).

有序(偏序)集 X 的元素 μ 称为集 $A \subset X$ 的**上界**(upper bound),如果对每一 $x \in A$, $x \leqslant \mu$;称为集 A 的**上确界**(supremum),如果 μ 是A 的上界且对A 的任一上界 V 都有$\mu \leqslant V$. **下界**(lower bound)与**下确界**(infimum)的定义是类似的.上确界、下确界分别用 sup, inf 表示.

有序(偏序)集 X 的元素 m 称为X 的**极大元**(maximal element),如果 $m \leqslant x \in X \Rightarrow m = x$.

§2. 基数与序数

集 X, Y 称为**等势的**(equipotent),如果存在由 X 到 Y 上的一一对应映射.对每一集 X 给以一个**基数**(cardinal number)$|X|$,使$|X| = |Y|$当且仅当X, Y 是等势的.有限集的基数定义为这集的元素的个数,称为有限基数,相反情况称为无限基数.所有自然数所成集 N 的基数记作$\aleph_0$,即$|N| = \aleph_0$;所有实数所组成集 R 的基数记作c,即$|R| = c$.一个集是**可数的**(countable),当且仅当它是有限集或具有基数$\aleph_0$.

关于基数的和与积规定如下:两个基数 m, n 的**和** $m + n$ 规定为集$X \cup Y$ 的基数,这里$|X| = m$, $|Y| = n$ 且$X \cap Y = \varnothing$. m,

n 的**积** mn 规定为集 $X\times Y$ 的基数，这里 $|X|=m$，$|Y|=n$．对每一基数 m，2^m 规定为集 X 的一切子集所成集族的基数，这里 $|X|=m$．可以证明 $2^{\aleph_0}=c$．更一般地可以规定 n^m 为所有 X 到 Y 内的映射所成集的基数，这里 $|X|=m$，$|Y|=n$．可以证明：$n^{m_1+m_2}=n^{m_1}\cdot n^{m_2}$，$(n_1\cdot n_2)^m=n_1^m\cdot n_2^m$，$(n^{m_1})^{m_2}=n^{m_1\cdot m_2}$．

关于两个基数大小规定如下：设 m,n 是两个基数，$|X|=m$，$|Y|=n$，规定 $m\leqslant n$（或 $n\geqslant m$），如果存在由 X 到 Y 内的单映射．由 Cantor-Bernstein 定理：$m\leqslant n$ 及 $n\leqslant m\Rightarrow m=n$．$\aleph_0$ 是最小的无限基数，两个基数，如果至少有一个是无限基数，则它们的和或积等于其中非较小的一个（在积的情况这两个基数都异于零），特别有

$$m+m=mm=m, m\geqslant\aleph_0.$$

如果 $m\leqslant n$ 且 $m\neq n$，则规定 $m<n$（m 小于 n）．可以证明，对每一个基数 m，有 $m<2^m$，特别有 $\aleph_0<c$，最小的不可数基数记作 $\aleph_1$．设有基数的任意集合 $\{m_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$，且每一 $m_\alpha<m$，如有 $\sum_{\alpha\in\Lambda}m_\alpha<m$ 时，则称基数 m 是**正则基数**（regular cardinal number）．例如 $\aleph_0$，$\aleph_1$ 都是正则基数．

线性序集 X,Y 称为**相似的**（similar），如果存在由 X 到 Y 上的保序映射．对每一线性序集给以一个**序型**（order type）$o(X)$，使 $o(X)=o(Y)$ 当且仅当 X,Y 是相似的．良序集的序型称为**序数**（ordinal）．

两个序数 α,β 的大小规定如下：设 $o(X)=\alpha$，$o(Y)=\beta$，如果存在 $y_0\in Y$，使 X 与集 $\{y:y\in Y, y<y_0\}$ 是相似的，则称 α 小于 β 或 β 大于 α，记作 $\alpha<\beta$ 或 $\beta>\alpha$．可以证明序数所成集按关系 $<$ 是良序的．每一序数是 α 的良序集与所有小于 α 的序数所成集是相似的．

有限良序集的序数规定为这集的元素的个数，称为**有限序数**．相反情况称为**无限序数**．自然数集 N 按自然数顺序是良序的，规定 $o(N)=\omega$，这是最小的**无限序数**．

对序数 α，称序数 $\alpha+1$ 为 α 的**后继者**（succesor），这时 α 称为

$\alpha+1$ 的**前趋者**(predecessor). 0 以及存在前趋者的序数称为**孤立序数**(isolated ordinal),其他序数称为**极限序数**(limit ordinal).

由于保序映射是一一对应映射,所以 X,Y 相似蕴含 X,Y 等势,即 $o(X)=o(Y)\Rightarrow|X|=|Y|$. 所以每一序数 α 有一个基数与之对应称为序数 α 的基数,记作 $|\alpha|$. 当 $|\alpha|\leqslant\aleph_0$ 时,称 α 是**可数序数**,相反情况,称为**不可数序数**. ω 是最小的可数(无限)序数,$|\omega|=\aleph_0$,最小的不可数序数记作 ω_1, $|\omega_1|$ 记作 $\aleph_1$.

设序数 $\alpha_i<\omega_1(i=1,2,\cdots)$,则可以证明 $\sup\{\alpha_i\}<\omega_1$,也就是存在序数 $\alpha<\omega_1$,使 $\alpha_i<\alpha$ 对 $i=1,2,\cdots$成立.

§3. 超限归纳法与选择公理

超限归纳法(transfinite induction). 设对每一序数 α,给定命题 $P(\alpha)$. 如果:(1)对 $\alpha=0$, $P(0)$是正确的;(2)对于 $\alpha<\alpha_0$ 的任意序数 α,如果 $P(\alpha)$是正确的,则 $P(\alpha_0)$是正确的. 则 $P(\alpha)$对所有序数 α 都正确.

以上的证明方法称为超限归纳法. 下面叙述一些常见的**选择公理**(axiom of choice),不证明它们的等价性.

(i)Zermelo **公理**,对每一非空集的集族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$,存在着一个由 Γ 到 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 的映射 f 使对每一 $\gamma\in\Gamma$, $f(r)\in X_\gamma$.

(ii)Zermelo **定理**(**良序化定理**),任何集可按某个线性序使成为良序集.

(iii)Zorn **引理**,如果有序(偏序)集 X 的每一链都有上界,则 X 具有极大元.

集族 $\mathscr{A}$ 称为具有**有限特征**(finite character)的,如果 A 是 $\mathscr{A}$ 的元素当且仅当 A 的每一有限子集是 $\mathscr{A}$ 的元素.

(iv)Tukez **引理**,每一具有有限特征的集族有极大元(关于关系$\subset$),即存在 $A_0\in\mathscr{A}$,使对任何 $A_1\in\mathscr{A}$, $A_0\subset A_1$,有 $A_0=A_1$.

第一章　拓扑空间概念

分析学中广泛地引用着连续、极限概念，但这些概念的本质的探讨应属于一般拓扑学.

G. Cantor 于 1895，1897 年的论文建立了集的理论，这导致 20 世纪早期 F. Hausdorff, M. Fréchet, C. Kuratowski 等数学家对拓扑空间概念的建立，而一般拓扑学进一步发展的基础的奠定主要归功于 A. Tychonoff, P. Urysohn 及 P. Alexandroff. P. Alexandroff 1960 年的综合论文详尽地介绍了一般拓扑学的历史概述及近代发展.

分析学中的连续、极限概念通常用邻域、开集描述，这里首先以开集概念定义拓扑空间，然后导向邻域、闭集等概念.

§1.　拓扑的引入

定义 1.1.1　设有集 X，设 $\mathscr{T}$ 是 X 的子集所成的集族满足：

(O1) $\varnothing \in \mathscr{T}, X \in \mathscr{T}$,

(O2) 如 $U_i \in \mathscr{T}(i = 1,2,\cdots,n)$，则 $\bigcap_{i=1}^{n} U_i \in \mathscr{T}$,

(O3) 如 $U_\gamma \in \mathscr{T}(\gamma \in \Gamma)$，则 $\bigcup \{U_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \in \mathscr{T}$,

这里指标集 Γ 是无限集，则称 $(X, \mathscr{T})$ 是**拓扑空间**(topological space). $\mathscr{T}$ 是这空间的**拓扑**(topology)，$\mathscr{T}$ 的元素称为**开集**(open set). 在没有必要指出 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$ 时，通常简单地用 X 表示拓扑空间.

定义 1.1.2　设 $\mathscr{T}, \mathscr{T}'$ 是集 X 上的两个拓扑，且 $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}'$，则称拓扑 $\mathscr{T}$ 比拓扑 $\mathscr{T}'$ **粗**(coarse)或拓扑 $\mathscr{T}'$ 比拓扑 $\mathscr{T}$ **精**(fine).

数直线 R 上的开集(可以表示为可数个开区间的并)族连同空集 $\varnothing$ 及 R 形成 R 上的**通常拓扑**(usual topology).

n 维欧氏空间 R^n 中两点，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$间的距离 $\rho(x,y)=(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2)^{1/2}$，置 $S_\varepsilon(x)=\{y:y\in R^n,\rho(x,y)<\varepsilon\}$(以 x 为中心以 ε 为半径的开球)，则 $\mathscr{T}=\{U:U\subset R^n$，对每一 $x\in U$ 及某 $\varepsilon>0$ 使 $S_\varepsilon(x)\subset U\}$ 是 R^n 上的拓扑，称为 R^n 上的通常拓扑.

以下称空间 R 或 R^n 时都是指通常拓扑而言.

设$[0,\omega_1)$是小于最小的不可数序数 ω_1 的所有序数形成的良序集. 置$(\beta,\alpha]=\{\gamma:\beta<\gamma\leqslant\alpha\}$ $(0\leqslant\beta<\alpha)$，则 $\mathscr{T}'=\{U:U\subset[0,\omega_1)$，对每一 $\alpha\in U,\alpha>0$ 及某 $\beta<\alpha$，使$(\beta,\alpha]\subset U\}\cup\{\varnothing\}$，满足定义 1.1.1 中的(O1—O3)，是$[0,\omega_1)$上的拓扑，称为**序拓扑**(order topology)，以下称空间$[0,\omega_1)$时是指序拓扑而言.

设集 X 上的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 仅由空集$\varnothing$及 X 组成，则称这拓扑 $\mathscr{T}_1$ 为**平凡拓扑**(indiscrete or trivial topology)，是最粗的拓扑. 设 $\mathscr{T}_2$ 是由 X 的一切子集组成，则称这拓扑 $\mathscr{T}_2$ 为**离散拓扑**(discrete topology)，是最精的拓扑. 具有离散拓扑的空间称为**离散空间**(discrete space).

定义 1.1.3 设空间 X 是拓扑空间，$x\in X$，如果 X 的子集 U 包含着某一开集，这开集包含着点 x，则称 U 是 x 的**邻域**(neighbourhood)；如果 U 是开集，则称 U 是点 x 的**开邻域**(open neighbourhood).

数直线 R 上的开区间是这区间内任一点的开邻域，闭区间是除这区间的端点外的这区间内任一点的邻域. n 维欧氏空间 R^n 中的开球 $S_\varepsilon(x)$是点 x 的(ε)开邻域，也是 $S_\varepsilon(x)$中每一点的开邻域. 任何包含着 $S_\varepsilon(x)$的集是 $S_\varepsilon(x)$中每一点的邻域.

在空间$[0,\omega_1)$中，包含着$(\beta,\alpha]$的任何集都是点 α 的邻域，所以当 $\alpha=0$ 时，包含点 0 的任何集都是点 0 的邻域.

定理 1.1.4 设 $\mathscr{U}(x)$是点 x 的所有邻域所成集族，则满足：

(N1) $X\in\mathscr{U}(x)$，

(N2) 如 $U\in\mathscr{U}(x)$，则 $x\in U$，

(N3) 如 $U \in \mathscr{U}(x), V \supset U$,则 $V \in \mathscr{U}(x)$,

(N4) 如 $U, V \in \mathscr{U}(x)$,则 $U \cap V \in \mathscr{U}(x)$,

(N5) 如 $U \in \mathscr{U}(x)$,则存在集 V 使 $x \in V \subset U$ 及对任何 $x' \in V, V \in \mathscr{U}(x')$.

证明 条件(N1—N3)是定义 1.1.3 的直接结果.条件(N4)可由定义 1.1.3 及(O2)导得.下证条件(N5).设 $U \in \mathscr{U}(x)$,由邻域的定义(定义 1.1.3),存在开集 V 使 $x \in V \subset U$,开集 V 是它的任意点 x' 的邻域,这就是 $V \in \mathscr{U}(x')(x' \in V)$.证完.

定理 1.1.5 拓扑空间 X 中的子集 U 是开集当且仅当 U 是它的每一点的邻域.

证明 必要性是显然的.相反地,对每一 $x \in U$,由邻域的定义(1.1.3),存在开集 $V(x)$,使 $x \in V(x) \subset U$,从而 $U = \bigcup \{V(x): x \in U\}$,这说明 U 可以表示为某些开集的并,由拓扑空间的定义(1.1.1)的(O3)知 U 是开集.证完.

以上的定义 1.1.1 是以开集为原始概念定义拓扑空间,下面我们用邻域为原始概念定义拓扑空间.

设对集 X 的每一点 x 确定了一个子集族 $\mathscr{U}(x)$ 满足条件(N1)—(N5),我们称 $\mathscr{U}(x)$ 的元素为点 x 的邻域,然后利用定理 1.1.5 定义开集,由(N1),(N4)及(N3),所定义的开集族满足拓扑空间的定义(1.1.1)的(O1),(O2)及(O3),从而 X 形成拓扑空间.这里是以邻域作为原始概念,由此出发定义拓扑空间.

下面我们导向闭集概念.

定义 1.1.6 拓扑空间 X 的子集 F 称为**闭集**(closed set),如果 $X - F$ 是开集.

定理 1.1.7 拓扑空间 X 的所有闭子集 F 形成的集族 $\mathscr{F}$ 满足下列条件:

(F1) $\varnothing \in \mathscr{F}, X \in \mathscr{F}$.

(F2) 如 $F_i \in \mathscr{F}(i = 1, 2, \cdots, n)$,则 $\bigcup_{i=1}^{n} F_i \in \mathscr{F}$.

(F3) 如 $F_\gamma \in \mathscr{F}(\gamma \in \Gamma)$,则 $\bigcap \{F_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \in \mathscr{F}$.

这里指标集 Γ 是无限集.

证明 这里只证明(F3),其他类似.由 de Morgan 公式

$$X - \bigcap\{F_\gamma:\gamma\in\Gamma\} = \bigcup\{X - F_\gamma:\gamma\in\Gamma\}.$$

因 F_r 是闭集,所以 $X - F_r$ 是开集,由定义 1.1.1,上式右端是开集,从而左端是开集.由定义 1.1.6,$\bigcap\{F_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$是闭集.证完.

由上述定理,我们可以用满足(F1)—(F3)的子集族确定 X 上的拓扑.下面定理的证明留给读者.

定理 1.1.8 设$\mathscr{F}$是集 X 的子集族满足条件(F1)—(F3),则$\mathscr{F}$正好是拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中所有闭集形成的集族,这里 $\mathscr{T}=\{X - F:F\in\mathscr{F}\}$.

拓扑空间 X 的子集 A 称为 $G_\delta(F_\sigma)$集,如果 A 是可数个开(闭)集的交(并)集.

§2. 开基与邻域基

定义 1.2.1 拓扑空间 X 中的开集族 $\mathscr{U}$ 称为这空间的**开基**(或简称为**基** base),如果每一开集可以表示为 $\mathscr{U}$ 中元素的并.开集族 $\mathscr{V}$ 称为这空间的**次开基**(或简称**次基** subbase),如果 $\mathscr{V}$ 中元素的有限交形成这空间的基.

定理 1.2.2 开集族 $\mathscr{U}$ 是开基当且仅当对每一开集 V 及每一点 $x\in V$,存在 $U\in\mathscr{U}$,使 $x\in U\subset V$.

证明留给读者.

关于空间 R,可以取所有开区间(a,b)所成集族为开基,这里 a,b 是实数$(a\leqslant b)$,特别可取 a,b 都是有理数的情况;可以取所有形如$(a,+\infty)$,$(-\infty,b)$的区间所成的集族为次开基,这里 a,b 是实数,当然也都可以是有理数.

关于空间$[0,\omega_1)$,可以取所有形如$(\beta,\alpha]$$(\alpha,\beta<\omega_1,\beta\leqslant\alpha)$的集所形成的集族作为开基,一切形如$\{x:x<\alpha\}$及$\{x:x>\beta\}$$(\alpha,\beta<\omega)$的集形成的集族作为次开基(按$(\beta,\alpha]=\{x:x>\beta\}\cap\{x:x<\alpha+1\}$).

定理 1.2.3 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的开基,则 $\mathscr{U}$ 满足:

(B1) $\varnothing \in \mathscr{U}$.

(B2) 如 $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$,及 $x \in U_1 \cap U_2$,则存在 $U_3 \in \mathscr{U}$,使 $x \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$.

(B3) $\bigcup \{U : U \in \mathscr{U}\} = X$.

相反地,设 X 是一集,$\mathscr{U}$ 是 X 的子集所成集族满足(B1)—(B3),置 $\mathscr{T}$ 为 $\mathscr{U}$ 中集的并集所形成的集族,则 $\mathscr{T}$ 满足(O1)—(O3),从而 X 是拓扑空间以 $\mathscr{U}$ 为开基.

证明 由定义 1.2.1,这定理的前半部分是明显的,现证明后半部分

(O1)可由(B1)及(B3)得到. 由 $\mathscr{T}$ 的定义,显然满足(O3). 现证 $\mathscr{T}$ 满足(O2),由(B2)(引用 n 次),可得.

设 $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \mathscr{U}$ 且 $x \in \bigcap_{i=1}^{n} U_i$,则存在 $U \in \mathscr{U}$,使

$$x \in U \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i. \tag{1}$$

现在设 $V_1, V_2, \cdots, V_n \in \mathscr{T}$ 且 $x \in \bigcap_{i=1}^{n} V_i$,则 $x \in V_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 由于每一 V_i 是 $\mathscr{U}$ 中集的并,所以存在 $U_i \in \mathscr{U}$,使 $x \in U_i \subset V_i$. 结合(1)式,知存在 $U \in \mathscr{U}$,使 $x \in U \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i$. 这说明 $\bigcap_{i=1}^{n} V_i$ 可以表示为 $\mathscr{U}$ 中元素的并,所以 $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathscr{T}$ 这证明了 $\mathscr{T}$ 满足(O2),此外,显然 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间$(X, \mathscr{T})$的开基. 证完.

定义 1.2.4 设 x 是拓扑空间 X 中的一点,点 x 的邻域所成的集族 $\mathscr{B}(x)$ 称为点 x 的**邻域基**(neighbourhood base),如果对 x 的每一个邻域 U,存在 $V \in \mathscr{B}(x)$,使 $x \in V \subset U$.

定理 1.2.5 设 $\mathscr{B}(x)$ 是拓扑空间 X 中点 x 的邻域基,则满足下列条件:

(NB1) $\mathscr{B}(x) \neq \varnothing$.

(NB2) 如 $U \in \mathscr{B}(x)$,则 $x \in U$.

(NB3) 如 $U \in \mathscr{B}(x)$ 及 $V \in \mathscr{B}(x)$,则存在 $W \in \mathscr{B}(x)$,使 $W \subset U \cap V$.

(NB4) 如 $U\in\mathscr{B}(x)$,则存在集 V 使 $x\in V\subset U$,且对每一 $x'\in V$,存在 $W\in\mathscr{B}(x')$满足 $W\subset V$.

证明留给读者.

在定义拓扑空间时,可以用邻域基代替整个邻域族.

定理 1.2.6 设 X 是一集,对每一 $x\in X$ 确定一由 X 的子集所成的集族 $\mathscr{B}(x)$满足条件(NB1)—(NB4),置

$$\mathscr{U}(x)=\{U:U\supset V,\text{对某些 } V\in\mathscr{B}(x)\},$$

则 $\mathscr{U}(x)$满足条件(N1)—(N5),这样 X 是拓扑空间以 $\mathscr{U}(x)$为点 x 的邻域族,以 $\mathscr{B}(x)$为点 x 的邻域基.

证明留给读者.

在 n 维欧氏空间R^n,点 x 的ε 邻域$S_\varepsilon(x)(\varepsilon>0)$形成点 x 的邻域基 $\mathscr{B}(x)$,$\mathscr{B}(x)$的子族 $\mathscr{B}'(x)=\{S_{1/n}(x):n=1,2,\cdots\}$也形成点 x 的邻域基.易知$\bigcup\{\mathscr{B}(x):x\in R^n\}$及 $U\{\mathscr{B}'(x):x\in R^n\}$都是 R^n 的开基.一般说,生成同一拓扑的两个邻域基(开基)称为**等价的**.

在拓扑空间$[0,\omega)$,$\mathscr{U}(\alpha)=\{(\beta,\alpha]:\beta<\alpha\}(\alpha\neq0)$及 $\mathscr{U}(\alpha)=\{0\}(\alpha=0)$形成点 α 的一个邻域基,$\{\{0\},(\beta,\alpha]:0\leqslant\beta<\alpha<\omega_1\}$形成一个开基.

例 1.2.7 在集 $R^+=[0,+\infty)=\{x:0\leqslant x<+\infty\}$上给以下述拓扑,置

$$\begin{cases}\mathscr{U}(x)=\{(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\cap R^+:\varepsilon>0\},x\neq0,\\ \mathscr{U}(x)=\left\{[0,\varepsilon)-\left\{1,\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{3},\cdots\right\}:\varepsilon>0\right\},x=0.\end{cases}$$

则 $\mathscr{U}(x)$满足定理 1.2.5 的条件(NB1)—(NB4),R^+成为拓扑空间,这拓扑不同于数直线 R 上的通常拓扑.

例 1.2.8(Niemytzki 半平面) 取集 R'为 R^2 的上半平面并包含 X 轴,即 $R^1=\{(x,y):y\geqslant0,-\infty<x<+\infty\}$,置

$$\begin{cases}\mathscr{U}((x,y))=\{S_\varepsilon((x,y))\cap R':\varepsilon>0\},y\neq0,\\ \mathscr{U}((x,y))=\{S_\varepsilon((x,\varepsilon))\cup\{(x,0)\}:\varepsilon>0\},y=0\end{cases}$$

(X 轴上的点的邻域是切于这一点的开圆连同这一点),则 $\mathscr{U}((x,$

y))满足条件(NB1)—(NB4),R'成为拓扑空间,这拓扑不同于 R^2 上的通常拓扑.

以上两例是以邻域基定义的拓扑空间.

§3. 闭包与内核

定义 1.3.1 设 A 是拓扑空间 X 的子集,所有包含集 A 的闭集的交称为集 A 的**闭包**(closure),也就是包含集 A 的最小的闭集,记作 $\overline{A}$. 集 $\overline{A}$ 的每一点称为集 A 的**接触点**(contact point).

由定义 1.3.1 立知,拓扑空间 X 的子集 A 是闭集,当且仅当 $\overline{A}=A$;子集 U 是开集当且仅当 $\overline{X-U}=X-U$.

定理 1.3.2 闭包满足如下条件:

(C1) $\overline{\varnothing}=\varnothing$,

(C2) $\overline{A}\supset A$,

(C3) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,

(C4) $\overline{\overline{A}}=\overline{A}$.

((C1)—(C4)称为 **Kuratowski 闭包公理**).

证明 (C1),(C2)由定义 1.3.1 立得. 现证(C3),由定义 1.3.1 $A\cup B\supset A\Rightarrow\overline{A\cup B}\supset\overline{A}$. 同理,$\overline{A\cup B}\supset\overline{B}$,故有 $\overline{A\cup B}\supset\overline{A}\cup\overline{B}$. 另一方面,因 $\overline{A}\cup\overline{B}$ 是包含 $A\cup B$ 的闭集,而由定义 1.3.1,$\overline{A\cup B}$ 是包含 $A\cup B$ 的最小的闭集,故有 $\overline{A\cup B}\subset\overline{A}\cup\overline{B}$. 下证(C4),因 $\overline{\overline{A}}$ 是包含 $\overline{A}$ 的最小的闭集,而 $\overline{A}$ 是闭集,故得证. 证完.

定理 1.3.3 点 $x\in\overline{A}$ 当且仅当点 x 的每一邻域与 A 相交.

证明 设点 x 的邻域 U 与 A 不交,不妨设 U 是开集,从而 $X-U$ 是包含 A 的闭集,故有 $X-U\supset\overline{A}$,从而 $x\notin\overline{A}$. 相反地,如 $x\notin\overline{A}$,则 $X-\overline{A}$ 是点 x 的邻域与 A 不交. 证完.

定理 1.3.4 集 U 是点 x 的邻域当且仅当 $x\notin\overline{X-U}$.

证明 设 U 是点 x 的邻域,由于 $U\cap(X-U)=\varnothing$,由定理 1.3.3,知 $x\notin\overline{X-U}$.

相反地,设 $x\notin\overline{X-U}$,则由定理 1.3.3,存在点 x 的邻域 V

使 $V\cap(X-U)=\varnothing$,从而 $V\subset U$,所以 U 也是 x 的邻域.证完.

在离散空间 X,X 的任何子集 A 的闭包就是 A,也就是 $\overline{A}=A$,所以离散空间的任何子集都是闭集,也同时都是开集.在平凡拓扑空间 X,任何非空子集 A 的闭包是空间 X,也就是 $\overline{A}=X(A\neq\varnothing)$,$\overline{A}=\varnothing(A=\varnothing)$.

定理 1.3.5 设 X 是一集,对 X 的每一子集 A,规定一集 $\overline{A}$ 使满足(C1)—(C4),定义 X 的子集 U 为开集当且仅当满足条件:

$$\overline{X-U}=X-U, \tag{1}$$

则如上定义的开集族满足拓扑空间的定义(O1)—(O3),从而 X 成为拓扑空间.

证明 由(C2),有 $\overline{X-\varnothing}=\overline{X}=X=X-\varnothing$,由(1),$\varnothing$ 是开集.由(C1),有 $\overline{X-X}=\overline{\varnothing}=\varnothing=X-X$.由(1),$X$ 是开集.设 $U_i(i=1,2,\cdots,n)$是开集,由(1),$\overline{X-U_i}=X-U_i(i=1,2,\cdots,n)$,并有限次地引用公式(C3),有

$$\begin{aligned}\overline{X-\bigcap_{i=1}^{n}U_i}&=\overline{\bigcup_{i=1}^{n}(X-U_i)}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{(X-U_i)}\\&=\bigcup_{i=1}^{n}(X-U_i)=X-\bigcap_{i=1}^{n}U_i.\end{aligned}$$

由(1),$\bigcap_{i=1}^{n}U_i$ 是开集,余下的是要证满足拓扑空间定义的(O3).设 $U_\gamma(\gamma\in\Gamma)$是开集,由(1)

$$\overline{X-U_\gamma}=X-U_\gamma\quad(\gamma\in\Gamma).$$

此外,由(C3)可以导得

$$C\subset D\Rightarrow\overline{C}\subset\overline{D}.$$

从而由 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma)\subset X-U_\gamma(\gamma\in\Gamma)$可以证得

$$\overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma)}\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\overline{X-U_\gamma}.$$

故有

$$\begin{aligned}\overline{X-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma}&=\overline{\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma)}\subset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}\overline{X-U_\gamma}\\&=\bigcap_{\gamma\in\Gamma}(X-U_\gamma)=X-\bigcup_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma.\end{aligned}$$

相反包含式可由(C2)得到,故有

$$\overline{X - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma} = X - \bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma.$$

由(1)，$\bigcup_{\gamma \in \Gamma} U_\gamma$ 是开集.证完.

下面的例是以闭包定义拓扑空间.

例 1.3.6 取数直线 R 以及不属于 R 的点 x^* 形成的集 R^*，即 $R^* = R \cup \{x^*\}$，对 R^* 的每一子集 A 规定 $\overline{A}$ 如下：

$$\begin{cases} \overline{A} = (A - \{x^*\} \text{ 关于 } R \text{ 的闭包}) \cup \{x^*\}, \text{当 } A \text{ 为无限集}, \\ \overline{A} = A, \text{当 } A \text{ 是有限集}. \end{cases}$$

容易验证 $\overline{A}$ 满足闭包公理，从而由定理 1.3.5，R^* 成为拓扑空间.

相对于闭包概念，下面引进内核概念.

定义 1.3.7 设 A 是拓扑空间 X 的子集，一切包含在 A 内的开集的并称为集 A 的**内核**(interior)，也就是包含在 A 内的最大开集，记作 A°(或 $\mathrm{Int}A$).

由定义 1.3.7 立知，拓扑空间 X 的子集 A 是开集，当且仅当 $A^\circ = A$.

设 A 是拓扑空间 X 的子集，点 x 称为集 A 的**内点**(inner point)，如果 A 是点 x 的邻域，也就是存在点 x 的一个开邻域 $U(x) \subset A$；集 A 的一切内点所成集显然是开集(读者自证)，从而就是集 A 的内核.

关于内核与闭包间的关系有下述定理.

定理 1.3.8 设 A 是拓扑空间 X 的任一子集，则有 $A^\circ = X - \overline{X - A}$.

证明 由闭包公理的(C2)，$X - A \subset \overline{X - A}$，从而

$$X - \overline{X - A} \subset X - (X - A) = A.$$

由于 $X - \overline{X - A}$ 是开集，所以

$$X - \overline{X - A} \subset A^\circ. \tag{2}$$

另一方面，对包含在 A 内的每一开集 U 有

$$X - A \subset X - U = \overline{X - U}.$$

由(C4)，$\overline{X - A} \subset X - U$，从而 $U \subset X - \overline{X - A}$.特别有 $A^\circ \subset X - \overline{X - A}$，连同(2)式，得证.

由定理 1.3.2,1.3.8 及 de Morgan 公式可以证明下述定理. 证明留给读者.

定理 1.3.9 内核满足如下条件:

(I1) $X^\circ = X$,

(I2) $A^\circ \subset A$,

(I3) $(A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ$,

(I4) $(A^\circ)^\circ = A^\circ$.

类似于定理 1.3.8,有下述定理,证明留给读者.

定理 1.3.10 设 A 是拓扑空间 X 的任一子集,则有 $\overline{A} = X - (X - A)^\circ$.

如果以"′"记作补集的运算,则定理 1.3.8 及定理 1.3.10 可分别记作 $0' = 1-$ 及 $-1 = '0$.

定义 1.3.11 点 x 称为集 A 的**聚点**(accumulation point)或**极限点**(limit point),如果 $x \in \overline{A - \{x\}}$;集 A 的所有聚点所成集称为集 A 的**导集**(derived set),记作 A^d.

定理 1.3.12 点 x 属于 A^d 当且仅当点 x 的每一个邻域包含集 A 的异于 x 的一个点.

证明 由定义 1.3.10, $x \in \overline{A - \{x\}}$. 由定理 1.3.3, $x \in \overline{A - \{x\}}$ 当且仅当 x 的每一个邻域与 $A - \{x\}$ 相交,即 x 的每一个邻域包含集 A 的异于 x 的一个点. 证完.

集 $A - A^d$ 的点称为集 A 的**孤立点**(isolated point),点 x 是空间 X 的孤立点当且仅当 $\{x\}$ 是一开集.

定理 1.3.13 导集满足如下条件:

(D1) $\overline{A} = A \cup A^d$,

(D2) 如 $A \subset B$,则 $A^d \subset B^d$,

(D3) $(A \cup B)^d = A^d \cup B^d$,

(D4) $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma^d \subset (\bigcup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma)^d$.

证明留给读者.

定义 1.3.14 集 A 称为**稠密**(dense)于空间 X,如果 $\overline{A} = X$;称为**无处稠密**(nowhere dense)于 X,如果 $(\overline{A})^\circ = \varnothing$;称为**第一纲**

的(first category),如果 A 是可数个无处稠密集的并;称为**第二纲的**(second category),如果不是第一纲的.

由无处稠密的定义可以推得:集 A 无处稠密于 X 当且仅当每一不空开集 U 包含某不空开集 V 使 $V \cap A = \varnothing$(习题 1.15).

例 1.3.15 数直线 R 上的自然数集、整数集无处稠密于 R,有理数集、无理数集稠密于 R. **有理数集 Q 是第一纲的**,因为它是可数集,而每一单点集是无处稠密于 R 的;**无理数集 I 是第二纲的**.证明于下,用反证法,设无理数集 I 是第一纲的,则 $R = Q \cup I$ 也是第一纲的.置

$$R = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i. \tag{3}$$

每一 $A_i(i=1,2,\cdots)$无处稠密于 X.取开区间 $I_1=(0,1)$,因 A_1 是无处稠密的,存在开集 $V_1 \subset I_1$,使 $V_1 \cap A_1 = \varnothing$,由于 R 中的开集可以表示为(可数个)开区间的并,而每一开区间总包含着某一闭区间,所以不失一般性可把 V_1 取作某开区间而使

$$V_1 \subset I_1, \overline{V}_1 \cap A_1 = \varnothing.$$

继续这方法可得开区间:$V_1, V_2, \cdots$使

$$V_1 \supset V_2 \supset \cdots, \tag{4}$$

$$\overline{V}_i \cap A_i = \varnothing, i = 1,2,\cdots, \tag{5}$$

$$V_i \text{ 的长度} \leqslant 1/i. \tag{6}$$

由(4)及(6),序列$\{\overline{V}_i\}$形成退缩闭区间套,存在点 $x \in \bigcap_{i=1}^{\infty} \overline{V}_i$,故 $x \in R$,但由(5),$x \notin A_i(i=1,2,\cdots)$,这一矛盾说明(3)式不能成立.所以无理数集 I 必须是第二纲的.

定义 1.3.16 设 A 是拓扑空间X 的子集,集 $\overline{A} \cap \overline{X-A}$称为集 A 的**边缘**(boundary 或 frontier),记作 F_rA,点 $x \in \overline{A} \cap \overline{X-A}$ 称为集A 的**边缘点**(boundary point 或 frontier point).

由定义 1.3.16,$F_rA = \overline{A} \cap (X - A^\circ) = \overline{A} - A^\circ$,从而易知 x 是集A 的边缘点当且仅当x 既不是集A 的内点,又不是集 $X-A$ 的内点.

定理 1.3.17 关于集 A 的边缘,有下列关系:

(i) $A^{\circ}=A-F_rA$,

(ii) $\overline{A}=A\cup F_rA$,

(iii) $F_r(A\cup B)\subset F_rA\cup F_rB$,

(iv) $F_r(A\cap B)\subset F_rA\cup F_rB$,

(v) A 是开集当且仅当 $F_rA=\overline{A}-A$,

(vi) A 是闭集当且仅当 $F_rA=A-A^{\circ}$,

(vii) A 是既开且闭的当且仅当 $F_rA=\varnothing$.

证明 这里证明(i)及(iii),其它类似.

$$A-F_rA=A-(\overline{A}\cap\overline{(X-A)}=(A-\overline{A})\cup(A-\overline{X-A})$$

$$=A-\overline{X-A}=A\cap A^{\circ}=A^{\circ}.$$

$$F_r(A\cup B)=\overline{A\cup B}\cap\overline{X-(A\cup B)}$$

$$=(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{(X-A)\cap(X-B)}$$

$$\subset(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{X-A}\cap\overline{X-B}$$

$$\subset(\overline{A}\cap\overline{X-A})\cup(\overline{B}\cap\overline{X-B})$$

$$=F_rA\cup F_rB.$$

所以(i),(iii)得证.证完.

§4. 滤 子 和 网

在这一节里我们叙述拓扑空间中的收敛概念.分析学中的收敛概念最简单的是序列的极限,级数的收敛就是用它部分和序列的极限去描述的.函数的极限或连续的 $\varepsilon-\delta$ 定义实际上是用邻域描述的.($f(x)$在点 x_0 的连续:对 $y_0=f(x_0)$的任何 ε 邻域 $S_\varepsilon(y_0)$存在 x_0 的 δ 邻域$S_\delta(x_0)$,使 $f(S_\delta(x_0))\subset S_\varepsilon(y_0)$).这里网的概念是序列概念的直接推广,滤子概念是邻域族概念的直接推广.前者在统一地阐述分析学中的极限概念时很有实用价值,后者在论证一般拓扑学的有关理论时比较便利,所以本书除了在这节里叙述网的概念外,此后都用滤子阐述.

定义 1.4.1 设$\mathscr{F}$是拓扑空间 X 的不空子集族满足下面条

件:

(i) $\varnothing \notin \mathscr{F}$,

(ii) 如 $A \in \mathscr{F}$ 及 $B \supset A$,则 $B \in \mathscr{F}$,

(iii) 如 $A \in \mathscr{F}$ 及 $B \in \mathscr{F}$,则 $A \cap B \in \mathscr{F}$.

则称 $\mathscr{F}$ 是一**滤子**(filter).如果不存在包含 $\mathscr{F}$ 的滤子以 $\mathscr{F}$ 作为它的真子族,则滤子 $\mathscr{F}$ 称为**极大滤子**(maximal filter)或**超滤子**(ultrafilter).

集族 $\mathscr{U}$ 称为具有**有限交性质**(finite intersection property),如果 $\mathscr{U}$ 中任何有限个元素的交不空.

定理 1.4.2 设集族 $\mathscr{F}'$ 具有有限交性质,则存在极大滤子 $\mathscr{F}$ 包含 $\mathscr{F}'$.

证明 设 $\Phi = \{\mathscr{F}: \mathscr{F}$ 是包含着 $\mathscr{F}'$ 的具有有限交性质的集族$\}$,以包含关系 $\mathscr{F}_1 \subset \mathscr{F}_2$ 定义 Φ 中元素 $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 的次序,则 Φ 是一偏序集,显然 Φ 的每一全序子集(链)具有上界.由 Zorn 引理,Φ 中存在极大元 $\mathscr{F}$.下面证明 $\mathscr{F}$ 是一滤子.显然满足定义 1.4.1 的(i).设 $A, B \in \mathscr{F}$,因 $\mathscr{F}$ 具有有限交性质,$A \cap B \neq \varnothing$,且集族 $\mathscr{F}'' = \{A \cap B\} \cup \mathscr{F}$ 也具有有限交性质,从而 $\mathscr{F}'' \in \Phi$;由于 $\mathscr{F}$ 是 Φ 的极大元,所以 $A \cap B \in \mathscr{F}$,满足定义 1.4.1 的(iii).为了证明满足(ii),设 $B \supset A$,$A \in \mathscr{F}$,则集族 $\{B\} \cup \mathscr{F} \in \Phi$,由极大性,$B \in \mathscr{F}$.证完.

定理 1.4.3 滤子 $\mathscr{F}$ 是极大滤子当且仅当每一个与 $\mathscr{F}$ 中每一元素相交的集是 $\mathscr{F}$ 的元素.

证明 设 $\mathscr{F}$ 是极大滤子,设集 A 与 $\mathscr{F}$ 中的每一个元素相交,置 $\mathscr{F}' = \{C: C \supset A \cap B, B \in \mathscr{F}\}$,容易验证 $\mathscr{F}'$ 是一滤子且包含着 $\mathscr{F}$,以 A 作为它的元素.由于 $\mathscr{F}$ 是极大滤子,$\mathscr{F} = \mathscr{F}'$,从而 $A \in \mathscr{F}$.

相反地,设 $\mathscr{F}$ 是一滤子满足定理 1.4.3 的条件,设 $\mathscr{F}'$ 是任一滤子包含着 $\mathscr{F}$,即 $\mathscr{F}' \supset \mathscr{F}$.下面证明相反的包含关系,从而定理得证.设 $A \in \mathscr{F}'$,由定义 1.4.1 的(iii)及(i),A 与 $\mathscr{F}'$ 中每个元素相交,从而与 $\mathscr{F}$ 中每个元素相交,由假设条件,$A \in \mathscr{F}$,所以 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.证完.

定义 1.4.4 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 中的滤子,$x \in X$,如果 x 的

每一邻域属于 $\mathscr{F}$,则称 $\mathscr{F}$ **收敛于 x**,记作 $\mathscr{F}\to x$.

由定义 1.4.1 的(ii)可知:$\mathscr{F}\to x$ 当且仅当对 x 的每一个邻域 U,存在 $A\in\mathscr{F}$ 使 $A\subset U$.

定义 1.4.5 如果对每一集 $A\in\mathscr{F}$,点 $x\in\overline{A}$,则称 x 是 $\mathscr{F}$ **的聚点**(cluster point of filter).

定义 1.4.6 设滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于 x,则 x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点;相反地,如 $\mathscr{F}$ 是极大滤子,x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点,则 $\mathscr{F}$ 收敛于 x.

证明 设 $\mathscr{F}\to x$ 及 $A\in\mathscr{F}$,由定义 1.4.4,x 的每一个邻域 $U\in\mathscr{F}$,由定义 1.4.1 的(iii)及(i),$A\cap U\neq\varnothing$,由定理 1.3.3,$x\in\overline{A}$,由定义 1.4.5,x 是 $\mathscr{F}$ 的聚点.

反之,设 x 是极大滤子 $\mathscr{F}$ 的聚点,则由定义 1.4.5,x 的每一邻域 U 与 $\mathscr{F}$ 的每一元素相交,由定理 1.4.3,$U\in\mathscr{F}$,由定义 1.4.4,$\mathscr{F}\to x$. 证完.

我们考虑减弱定义 1.4.1 的条件,设 $\mathscr{F}'$ 是滤子 $\mathscr{F}$ 的子族使对每一 $F\in\mathscr{F}$,存在 $F'\in\mathscr{F}'$ 使 $F'\subset F$,则称 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的**滤子基**(filter base),$\mathscr{F}'$ 满足:

(i) $\varnothing\notin\mathscr{F}'$,

(ii) 如 $F_1,F_2\in\mathscr{F}'$,则存在 $F_3\in\mathscr{F}'$,使 $F_3\subset F_1\cap F_2$.

反之,给定了某族 $\mathscr{F}'$ 满足(i),(ii). 则置 $\mathscr{F}=\{F:F\supset F',F'\in\mathscr{F}'\}$,可得到滤子 $\mathscr{F}$ 以 $\mathscr{F}'$ 为滤子基. 我们称 $\mathscr{F}'$ **生成** $\mathscr{F}$. 现在考察滤子基 $\mathscr{F}'$ 及点 x,如果对于点 x 的每一个邻域 U,存在 $F'\in\mathscr{F}'$,使 $F'\subset U$,则称 $\mathscr{F}'$ **收敛于** x,记作 $\mathscr{F}'\to x$. 设 $\mathscr{F}'$ 生成滤子 $\mathscr{F}$,则易知 $\mathscr{F}'\to x$ 当且仅当 $\mathscr{F}\to x$.

点 x 的邻域族 $\mathscr{U}(x)$ 满足定义 1.4.1 的(i)—(iii). 所以是一滤子,由定义 1.4.4,$\mathscr{U}(x)$ 收敛于 x,所以滤子是邻域族的推广.

所有包含点 x 的集所成的集族 $\mathscr{F}(x)$ 显然满足定义 1.4.1,是一滤子,而且是一极大滤子,证明于下. 设 $\mathscr{F}$ 是包含 $\mathscr{F}(x)$ 的滤子,对 $\mathscr{F}$ 中任一元素 B 必有 $x\in B$,这是因为 B 及 $\{x\}$ 都是 $\mathscr{F}$ 的元素,它们的交不空. 从而 $B\in\mathscr{F}(x)$,故有 $\mathscr{F}=\mathscr{F}(x)$,这说明 $\mathscr{F}(x)$ 是一极大滤子.

设 $H_i=(i,+\infty)$, $i=1,2,\cdots$,置 $\mathscr{F}'=\{H_i: i=1,2,\cdots\}$,则 $\mathscr{F}'$ 满足定义 1.4.1 的条件(i)及(iii),不满足(ii),置

$$\mathscr{F}=\{A: A\supset H_i, i=1,2,\cdots\}$$

得到滤子 $\mathscr{F}$,从而 $\mathscr{F}'$ 是 $\mathscr{F}$ 的滤子基,容易看出,$\mathscr{F}$,$\mathscr{F}'$ 都不收敛.

设 x,y 是平面上不同的两点,所有包含这两点的集所成的集族 $\mathscr{F}$ 是一滤子,容易看出,x,y 都是 $\mathscr{F}$ 的聚点,但 $\mathscr{F}$ 不收敛.

定义 1.4.7 设 D 是一集,对 D 的某些元素规定了次序 $>$ 满足:

(i) $a>b$, $b>c$,则 $a>c$;

(ii) 对 D 的每两个元素 $a,b\in D$,存在 $c\in D$,使 $c>a$ 及 $c>b$.

则称 D 是**一定向集**(direct set).

定义 1.4.8 设 Δ 是一不空的定向集,X 是一拓扑空间,由定向集 Δ 到 X 内的映射 $\varphi(\delta)(\delta\in\Delta)$,称为 **$\Delta$ 上的一个网**(net),或**简称网**,记作 $\varphi(\Delta;>)$,这里 $>$ 是定向集 Δ 上的次序,网可以理解为空间 X 的点集 $\{\varphi(\delta):\delta\in\Delta\}$ 而按指标集 Δ 定向.下面以 $\varphi(\delta)$ 记网 $\varphi(\Delta;>)$ 中的元素.

定义 1.4.9 设 $\varphi(\Delta;>)$ 是拓扑空间 X 中的网,$A\subset X$,如果存在 $\delta_0\in\Delta$ 使 $\delta>\delta_0\Rightarrow\varphi(\delta)\in A$,则称网 $\varphi(\Delta;>)$ **终留**(residual)于 A;如果对每一子集 $A\subset X$,$\varphi(\Delta;>)$ 终留于 A 或 $X-A$,则称网 $\varphi(\Delta;>)$ 是一**极大网**(maximal net)或**超网**(ultra net);如果对每一 $\delta_0\in\Delta$,存在 $\delta\in\Delta$, $\delta>\delta_0$,使 $\varphi(\delta)\in A$,则称网 $\varphi(\Delta;>)$ **共尾**(cofinal)于 A.

定义 1.4.10 设网 $\varphi(\Delta;>)$ 终留于点 x 的每一个邻域,则称这**网收敛于 x**,记作 $\varphi(\Delta;>)\to x$,如果网 $\varphi(\Delta;>)$ 共尾于点 x 的每一邻域,则称点 x 是这**网的聚点**(cluster point of net).

设 $\mathscr{F}=\{A_\delta:\delta\in\Delta\}$ 是一滤子,我们可以把指标集 Δ 作如下定向:$\delta>\delta'$ 当且仅当 $A_\delta\subset A_{\delta'}$(可以假说 $\delta\neq\delta'\Rightarrow A_\delta\neq A_{\delta'}$);这样可以得到一个定向集 Δ 上的网 $\varphi(\Delta;>)$ 满足对每一 $\delta\in\Delta$, $\varphi(\delta)\in A_\delta$,这网称为**滤子 $\mathscr{F}$ 的导出网**(derived net).

相反地,给定网 $\varphi(\Delta;>)$,置

$$\mathscr{F}=\{A:\varphi(\Delta;\ >)\text{ 终留于 }A\},$$

我们得到滤子 $\mathscr{F}$,这滤子 $\mathscr{F}$ 称为网 $\varphi(\Delta;>)$的**导出滤子**(derived filter).

定理 1.4.11 滤子 $\mathscr{F}$收敛于点 x 当且仅当 $\mathscr{F}$的每一个导出网收敛于点 x.

证明 设 $\mathscr{F}\to x$, $\mathscr{F}=\{A_\delta:\delta\in\Delta\}$,设 $\varphi(\Delta;>)$是 $\mathscr{F}$的某一导出网,也就是 $\varphi(\delta)\in A_\delta$, $(\delta\in\Delta)$,设 U 是点 x 的任一邻域,由定义 1.4.4, $U\in\mathscr{F}$,设 $U=A_{\delta_0}(\delta_0\in\Delta)$,如果 $\delta>\delta_0$,则 $A_\delta\subset A_{\delta_0}=U$,从而 $\varphi(\delta)\in U$,由定义 1.4.10,网 $\varphi(\Delta;>)\to x$.

相反地,设 $\mathscr{F}$不收敛于 x,由定义 1.4.4,存在点 x 的邻域 $U\notin\mathscr{F}$.从而对每一 $\delta\in\Delta$, $A_\delta\not\subset U$,(不然,由滤子的定义 1.4.1 的(ii), $U\in\mathscr{F}$).取点 $\varphi(\delta)\in A_\delta-U$, $(\delta\in\Delta)$,则得到 $\mathscr{F}$的导出网 $\varphi(\Delta;>)$,它不收敛于 x.证完.

定理 1.4.12 网 $\varphi(\Delta;>)$收敛于点 x 当且仅当这网的导出滤子收敛于点 x.

证明 设 $\mathscr{F}$是网 $\varphi(\Delta;>)$的导出滤子,即

$$\mathscr{F}=\{A:\varphi(\Delta;\ >)\text{ 终留于 }A\}.$$

设 $\varphi(\Delta;>)\to x$,则对 x 的任何邻域 U, $\varphi(\Delta;>)$终留于 U,所以 $U\in\mathscr{F}$,从而 $\mathscr{F}\to x$.

相反地,设 $\mathscr{F}\to x$,则对 x 的任何邻域 U,有 $U\in\mathscr{F}$,由 $\mathscr{F}$的定义, $\varphi(\Delta;>)$终留于 U.所以 $\varphi(\Delta;>)\to x$.证完.

例 1.4.13 分析学中的极限概念可用网 $\varphi(\Delta;>)$的收敛作统一阐述.在序列的极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 的情况,可取 Δ 为自然数集 N,次序$>$为自然数的大小次序, $\varphi(n)=x_n(n\in N)$,所以网是序列的推广.

在函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=b$ 的情况,可取 $\Delta=U(x_0)-\{x_0\}$这里 $U(x_0)$是 x_0 的某一足够小的开邻域,次序$>$可规定为 $x'>x$,当 $\rho(x',x_0)<\rho(x,x_0)$(这里 $\rho(x,y)$表示点 x,y 间的距离).

在作为黎曼和的极限的定积分情况比较复杂,因为这不是函数的极限.在一般分析教科书上都不予阐明.下面就一元函数情况叙述.按定积分 $\int_a^b f(x)dx$ 的定义,对区间 $[a,b]$ 作分划 T:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

记作如下的数组:

$$T = (a, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, b).$$

加入所取的点 $\zeta_i \in [x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 后得

$$T_\zeta = (a, \zeta_0, x_1, \zeta_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, \zeta_{n-1}, b)$$

取 Δ 为所有数组 T_ζ 所成的集,次序 $>$ 规定为 $T'_\zeta > T_\zeta$,当 $\lambda(T') < \lambda(T)$.(这里 $\lambda(T) = \max\limits_i \{x_{i+1} - x_i\}$),取

$$\varphi(T_\zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i)\Delta x_i (T_\zeta \in \Delta).$$

例 1.4.14 网是序列的推广,但并不具有某些相应于序列的良好性质,设 $\Delta = \{(n, m): n, m = 1, 2, \cdots\}$,规定 $(n, m) > (n', m')$,当 $n > n'$, $m \geqslant m'$,则 Δ 成为定向集.在 Δ 上定义一平面 R^2 上的网 $\varphi(\Delta; >)$ 为

$$\varphi((n, m)) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{m}).$$

显然,网 $\varphi(\Delta; >) \to (0,0)$,置 $\Delta' = \{(n, 1): n = 1, 2, \cdots\}$,$\Delta'$ 是 Δ 的无限的定向子集,但相应的"子网"$\varphi(\Delta'; >)$ 不收敛于 $(0,0)$,也不以 $(0,0)$ 为聚点,这与序列和它的子序列的情况不同.

为了免除上述不良情况,考虑到关于所谓"子网"的限制.定向集 Δ 的子集 Δ' 称为**共尾**于 Δ,如果对每一 $\delta \in \Delta$,存在 $\delta' \in \Delta'$ 使 $\delta' > \delta$.对 Δ 的共尾于子集 Δ',我们可以有 $\varphi(\Delta; >) \to x \Rightarrow \varphi(\Delta'; >) \to x$,但是即使加上上述限制,还是有些性质不同于序列,子序列情况,设 Δ 是一切可数序数按自然顺序的定向集.对每一个序数 $\delta \in \Delta$ 可以唯一地确定有限个序数使

$$\delta_1 < \delta_2 < \cdots < \delta_n = \delta,$$

这里 δ_1 是极限序数,每一个 δ_{i+1} 是大于 δ_i 的第一个序数.例如当

$\delta=\omega,2\omega,\omega^2$ 时,分别取 δ_1 为 $\omega,2\omega,\omega^2$;当 $\delta=\omega+3$ 时,取 $\delta_1=\omega,\delta_2=\omega+1,\cdots,\delta_4=\omega+3$,这样每一个序数 $\delta\in\Delta$ 对应着一个自然数 n($\omega,2\omega,\omega^2$ 都对应着 1,$\omega+3$ 对应着 4),在 Δ 上定义一数直线 R 上的网 $\varphi(\Delta;>)$为

$$\varphi(\delta)=\frac{1}{n}(\delta\in\Delta),$$

这里 n 是对应着 δ 的那个自然数. 容易看出,0 是网 $\varphi(\Delta;>)$的聚点,但是不存在 Δ 的共尾子集 Δ' 使 $\varphi(\Delta';>)\to 0$.

§5. 映　　射

定义 1.5.1 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 称为**连续的**(continuous),如果 Y 中开集 V 的逆象 $f^{-1}(V)$是 X 中的开集.

在证明下列定理前,复习一下集在映射 f 下的象和逆象的关系:$f^{-1}(f(A))\supset A$,$f(f^{-1}(B))\subset B$. 当 f 是到上的,即满映射时,后式为 $f(f^{-1}(B))=B$.

定理 1.5.2 下列论断是等价的:

(i) X 到 Y 内的映射 f 是连续的,

(ii) Y 中闭集 F 的逆象 $f^{-1}(F)$是闭集,

(iii) 对每一 $B\subset Y$,$f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$,

(iv) 对每一 $A\subset X$,$f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$,

(v) 对每一 $x\in X$ 及 $f(x)$的每一邻域 V,存在 x 的邻域 U,使 $f(U)\subset V$.

证明 (i)⇒(ii) 设 F 是 Y 中闭集,由(i)$f^{-1}(Y-F)$是 X 中开集,从而 $f^{-1}(F)=X-f^{-1}(Y-F)$是 X 中闭集.

(ii)⇒(i) 证法与上类似.

(ii)⇒(iii) $f^{-1}(\overline{B})\supset f^{-1}(B)\Rightarrow\overline{f^{-1}(\overline{B})}\supset\overline{f^{-1}(B)}$,由(ii),$\overline{f^{-1}(\overline{B})}=f^{-1}(\overline{B})$,所以 $f^{-1}(\overline{B})\supset\overline{f^{-1}(B)}$.

(iii)⇒(iv) 由(iii),$f^{-1}\overline{(f(A))}\supset\overline{f^{-1}(f(A))}\supset\overline{A}$,从而有

$f(f^{-1}(\overline{f(A)}))\supset f(\overline{A})$，由于$\overline{f(A)}\supset f(f^{-1}(\overline{f(A)}))$，故有$\overline{f(A)}\supset f(\overline{A})$.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) 设 F 是 Y 中闭集，由 (iv)，$f\overline{f^{-1}(F)})\subset\overline{f(f^{-1}(F))}\subset\overline{F}=F$，从而$\overline{f^{-1}(F)}\subset f^{-1}(F)$，这说明 $f^{-1}(F)$是闭集(定义 1.3.1).

(i)$\Rightarrow$(v) 设 $x\in X$，V 是$f(x)$的一邻域，存在开集 G，使$f(x)\in G\subset V$，由(i)$f^{-1}(G)$是开集. 置 $U=f^{-1}(G)$，U 是x 的开邻域，且 $f(U)\subset G\subset V$.

(v)$\Rightarrow$(i) 设 G 是Y 中开集，$x\in f^{-1}(G)\Rightarrow f(x)\in G$. G 是$f(x)$的邻域. 由(v)，存在 x 的邻域U 使$f(U)\subset G$，从而 $U\subset f^{-1}(f(U))\subset f^{-1}(G)$，该式对所有 $x\in f^{-1}(G)$ 成立，所以 $f^{-1}(G)$是开集(定理 1.1.5).

定义 1.5.3 设拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续映射f 是一一对应的，且逆映射是 Y 到X 上的连续映射，则称 f 是**同胚映射**(homeomorphism)或**拓扑映射**(topological mapping). 在此情况，空间 X 与空间 Y 称为**同胚的**(homeomorphic).

数直线 R 与它的任何开区间同胚，例如开区间$(0,1)$与 R 间的同胚映射f 可表示为$x\mapsto(2x-1)/x(1-x)$，刺破了一点的球面与平面同胚，它们间的同胚映射就是通常复变函数中的球极映射. 在拓扑学中，同胚的空间看作等同的，没有区别的.

定义 1.5.4 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射称为**闭映射**(closed mapping)，如果 X 中每一闭集F 的象$f(F)$是 Y 中的闭集；称为**开映射**(open mapping)，如果 X 中每一开集U 的象$f(U)$是 Y 中的开集.

例 1.5.5 R^2 到 R(数直线)上的投影映射 $f:(x,y)\mapsto x$ 是连续的，但不是闭映射，因为

$$F=\{(x,y):y=\frac{1}{x},x\in R-\{0\}\}$$

是 R^2 中的闭集(双曲线)，而 $f(F)=R-\{0\}$，(双曲线在 x 轴上的投影)在 R 上不是闭的. 下面还可看到，f 投影映射是开映射

(例 2.1.4 后).

设 X 是数直线上的闭区间$[0,2]$，Y 是闭区间$[0,1]$，定义映射：

$$f:\begin{cases} x \mapsto 0 & x \in [0,1], \\ x \mapsto x-1 & x \in (1,2). \end{cases}$$

显然 f 是连续映射. 设 F 是$X=[0,2]$中的任一闭集，置 $F_1 = F \cap [0,1]$，$F_2 = F \cap [1,2]$，F_1, F_2 都是 X 中的闭集，$F = F_1 \cup F_2$，$f(F_1)=\{0\}$是 $Y=[0,1]$中的闭集. $f(F_2)$是把闭集 F_2 沿数直线向左移一个单位长得到的集，在恒等映射$(x \mapsto x)$下的象是 Y 中的闭集(因 X，Y 上的拓扑都是数直线上的通常拓扑)，所以 $f(F)=f(F_1) \cup f(F_2)$是 Y 中闭集，从而 f 是闭映射，但 f 不是开映射，因为 X 中开集$(0,1)$的象 $f((0,1))=\{0\}$，不是 Y 中的开集.

设 X 是数直线R(通常拓扑)，Y 是在实数集R 上赋以离散拓扑，则在空间 Y 中R 的任何子集都是开集，也就是闭集. f 是空间 X 到空间 Y 上的恒等映射$(x \mapsto x, x \in R)$，显然 f 是开映射，也同时是闭映射，但不是连续映射.

容易看到 f 是同胚映射当且仅当f 是一一对应的连续闭(开)映射.

定理 1.5.6 下列论断是等价的：

(i) X 到 Y 内的映射f 是开映射，

(ii) 对 X 的每一子集A，$f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$，

(iii) 对 Y 的每一子集B，$f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$，

(iv) 每一点 $x \in X$ 的开邻域U 的象$f(U)$包含着 $f(x)$的某一开邻域.

证明 (i)⇔(ii) $f(A^\circ) \subset f(A)$，由(i)，$f(A^\circ)$是开集，所以 $f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$(定义 1.3.6)，相反的，设 A 是开集，所以 $A = A^\circ$，由(ii)，$f(A)=f(A^\circ) \subset (f(A))^\circ$，这说明 $f(A)$是开集(定义 1.3.6)，所以 f 是开映射.

(i)⇒(iii) 设 $x\in f^{-1}(\overline{B})$，则 $f(x)\in\overline{B}$，设 U 是 x 的任一邻域，由(i)，$f(U)$是 $f(x)$的邻域使 $f(U)\cap B\neq\varnothing$，从而存在 $x'\in U$，使 $f(x')\in B$，所以 $x'\in f^{-1}(B)$.

从而 $U\cap f^{-1}(B)\neq\varnothing$，所以 $x\in\overline{f^{-1}(B)}$.

(iii)⇒(ii) $A^\circ\subset A\subset f^{-1}(f(A))$，$A^\circ$开，故有

$$A^\circ\subset[f^{-1}(f(A))]^\circ \tag{1}$$

由于 $M^\circ=X-\overline{X-M}$(定理 1.3.7)，

$$[f^{-1}(f(A))]^\circ = X-\overline{X-f^{-1}(f(A))}. \tag{2}$$

而 $X-f^{-1}(f(A))=f^{-1}(Y-f(A))$，由(2)得

$$[f^{-1}(f(A))]^\circ = X-\overline{f^{-1}(Y-f(A))}. \tag{3}$$

由(iii)及(3)得

$$[f^{-1}(f(A))]^\circ\subset X-f^{-1}\overline{(Y-f(A))}. \tag{4}$$

由(1)，(4)及 $N^\circ=Y-\overline{Y-N}$(定理 1.3.7)，有

$$f(A^\circ)\subset f(X-f^{-1}\overline{(Y-f(A))}) = f(f^{-1}(Y-\overline{Y-f(A)})$$
$$\subset Y-\overline{Y-f(A)} = (f(A))^\circ.$$

(i)⇒(iv)显然. (iv)⇒(i)设 U 开于 X 而 $f(U)$不开于 Y，存在 $y\in f(U)$使 y 的任何开邻域都不能包含于 $f(U)$，则对 $x\in f^{-1}(y)\cap U$，(iv)不能成立. 证完.

定理 1.5.7 下列论断等价：

(i) X 到 Y 内的映射是闭映射，

(ii) 对 X 的每一子集 A，$f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$.

证明 (i)⇒(ii) $f(\overline{A})\supset f(A)$，由 $f(\overline{A})$是闭集，故有 $f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$.

(ii)⇒(i) 设 A 是空间 X 的闭集，由(ii)，$f(\overline{A})\supset\overline{f(A)}$及 $\overline{A}=A$，有 $f(A)\supset\overline{f(A)}$，这说明 $f(A)$是闭集. 证完.

下面的定理在论述连续闭映射保持某些拓扑性质时很有用处. 注意这里的映射是“到上”的，也就是满映射(不同于本节前面定理的情况).

定理 1.5.8 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续映射，则下列论断等价：

(i) f 是闭映射，

(ii) 对每一子集 $E\subset Y$ 及 X 中的开集 $U\supset f^{-1}(E)$，存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(E)\subset V\subset U$ 及 $V=f^{-1}(f(V))$，$f(V)$ 是 Y 中开集.

(iii) 对每一 $y\in Y$ 及 X 中的开集 $U\supset f^{-1}(y)$，存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(y)\subset V\subset U$ 及 $V=f^{-1}(f(V))$，$f(V)$ 是 Y 中开集.

证明 (i)⇒(ii) 对 X 中开集 $U=f^{-1}(E)$，置 $F=X-U$，F 闭于 X，$F\subset f^{-1}(f(F))$，因 f 连续且闭的，$f^{-1}(f(F))$ 闭于 X，置 $V=X-f^{-1}(f(F))$，V 即所要求的.

(ii)⇒(iii) 显然.

(iii)⇒(i) 设 F 是 X 中闭集，任取 $y\in Y-f(F)$，则 $f^{-1}(y)\cap F=\varnothing$，$f^{-1}(y)\subset X-F$，$X-F$ 开于 X，由(iii)，存在 X 中开集 V，使 $f^{-1}(y)\subset V\subset X-F$，且 $V=f^{-1}(f(V))$，$f(V)$ 是 Y 中开集，所以 $V\cap F=\varnothing$，从而 $f^{-1}f(V))\cap F=\varnothing$，$f(V)\cap f(F)=\varnothing$，$f(V)$ 是包含点 y 的开集，所以 $f(F)$ 是 Y 中闭集. 证完.

习 题 一

1.1 由开集出发按公理(O1)—(O3)定义拓扑空间$(X,\mathscr{T})$，由开集定义邻域，由邻域族定义拓扑空间$(X,\mathscr{T}')$，则 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$.

1.2 由邻域族 $\mathscr{U}(x)(x\in X)$ 出发按公理(N1)—(N5)定义拓扑空间. 由定理 1.1.5 导出开集，再由开集导出邻域族 $\mathscr{U}'(x)$. 以此定义拓扑空间，则前后得到的拓扑是一致的.

1.3 由开集出发按公理(O1)—(O3)定义拓扑空间$(X,\mathscr{T})$，由定义 1.3.1 定义闭包，然后从定理 1.3.5 中的(1)式定义新的开集，由此导出拓扑空间$(X,\mathscr{T}')$，则 $\mathscr{T}=\mathscr{T}'$.

1.4 由闭包 $\overline{A}$ 出发按公理(C1)—(C4)定义拓扑空间，以定理 1.3.5 的(1)式定义开集，再由定义 1.3.1 定义新的闭包 $\widetilde{A}$，则 $\overline{A}=\widetilde{A}$ 对每一子集 $A\subset X$ 成立.

1.5 X 上任何拓扑的交是 X 上的拓扑，X 上的两个拓扑的并未必是 X 上的拓扑(除非 X 至多包含两点).

1.6 考察例 1.2.7 的空间的点 0 的邻域族及序列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 的收敛情况.

1.7 考察 Niemytzki 例(例 1.2.8)的空间的 x 轴上的无理数点集及有理数点集,它们是否都是闭集.

1.8 考察例 1.3.1 中空间的点 x^* 的邻域及任一实数 $x\in R$ 的邻域.

1.9 拓扑空间的子集是闭的当且仅当它包含它的所有聚点.

1.10 拓扑空间的任一子集 A 及 B 有 $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$ 及 $\overline{A}-\overline{B}\subset\overline{A-B}$,上述关系式能否用等式代替,试以反例说明.

1.11 对拓扑空间 X 任何集序列,$A_1,A_2,\cdots$,有 $\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}\cup\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{\bigcup_{j=0}^{\infty}A_{i+j}}$.

作一例说明上式右端第二项不能去掉.

1.12 对拓扑空间 X 的子集 A,利用补集及闭包至多构成 14 种不同的集,试对数直线 R(通常拓扑)的实数集用补集及闭包构成 14 种不同的集.

1.13 设 E 是具有形式 $\frac{1}{2^m}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^l}$($m,n,l$ 取遍自然数集)的集,试求 E^d,$(E^d)^d$,$((E^d)^d)^d$,能否有 $(E^d)^d=E^d$?

1.14 任一集 E 的导集 E^d 是否总是闭集?考察实直线 R(通常拓扑)情况,构造一空间,其中某些子集的导集不是闭的.

1.15 拓扑空间 X 的子集 A 无处稠密于 X 当且仅当每一不空开集 U 包含某不空开集 V 使 $V\cap A=\varnothing$.

1.16 构造一例使集 D 稠密于 X,但对 X 的某子集 A,$D\cap A$ 不稠密于 A.

1.17 试证:如果 A 稠密于 $B\subset X$,则 A 稠密于 $\overline{B}$.

1.18 设 A 稠密于 X,开集 $U\subset X$,则 $U\subset\overline{A\cap U}$.

1.19 滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于 x 当且仅当 x 是每一包含 $\mathscr{F}$ 的滤子的聚点.

1.20 滤子 $\mathscr{F}$ 是极大的当且仅当对每一集 $A\subset X$,$A\in\mathscr{F}$ 或 $X-A\in\mathscr{F}$.

1.21 极大滤子的导出网是极大的.

1.22 极大网的导出滤子是极大的.

1.23 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射,$\mathscr{F}$ 是 X 中的滤子,则 $f(\mathscr{F})=\{f(F):F\in\mathscr{F}\}$ 是 Y 中的滤子基.

1.24 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射,则 f 是连续的当且仅当对 X 中每一收敛于 x 的网 $\varphi(\Delta;>)$ 有 $f\circ\varphi(\Delta;>)$ 收敛于 Y 中的点 $f(x)$.

1.25　点 x 是集 $A \subset X$ 的聚点当且仅当存在着 $A-\{x\}$ 中的网收敛于 x.

1.26　设 $\varphi(\Delta;>)$ 是一网,对每一 $\delta \in \Delta$,置 $A_\delta=\{\varphi(\delta'):\delta' \in \Delta, \delta'>\delta\}$,则 x 是这网的聚点当且仅当 x 是每一集 $A_\delta(\delta \in \Delta)$ 的聚点.

1.27　设 X 是可数集,规定它的拓扑是空集及有限集的补集,这空间的怎样的序列收敛于怎样的点?

1.28　f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的映射,如 X 上的拓扑是离散的,或 Y 上的拓扑是平凡的,则 f 连续;如 Y 上的拓扑是离散的,则 f 是既开且闭的.

1.29　关于集 A 的边缘 F_rA 有下列关系:

$$\text{(i) } F_r\overline{A} \subset F_rA; \qquad \text{(ii) } F_rA^\circ \subset F_rA;$$

$$\text{(iii) } X = A^\circ \cup F_rA \cup (X-A)^\circ.$$

1.30　证明数直线上的无理数集不能表示为 F_σ 集.

第二章　导出拓扑的方法、分离公理、可数公理、连通空间

在给出各种拓扑空间之前,先介绍一些由给定拓扑空间构造新的拓扑空间的方法.

§1.　导出拓扑的方法

设$(X,\mathscr{T})$是拓扑空间,$X'\subset X$,对 X 中每一开集$U\in\mathscr{T}$,置 $U'=U\cap X$,易证这些 X' 的子集 U' 所成的集族$\mathscr{T}'$ 满足(O1)—(O3),所以

$$\mathscr{T}'=\{U':U'=U\cap X',U\in\mathscr{T}\}$$

形成 X'上的拓扑,称为关于$\mathscr{T}$的**相对拓扑**(relative topology),拓扑空间$(X',\mathscr{T}')$称为拓扑空间$(X,\mathscr{T})$的**子空间**(subspace).

定理 2.1.1　设 $F'\subset X$,则 F'是子空间X'的闭集当且仅当存在 X 中的闭集F 使$F'=F\cap X'$,从而 $A\subset X'$关于X'的闭包$\widetilde{A}=\overline{A}\cap X'$.

证明　设 F'是子空间X'的闭集,则 $X'-F$ 开于X',$\exists\, U$ 开于X,使 $X'-F'=U\cap X'$. $F'=X'-(X'-F')=X'-(U\cap X')=X'\cap(X-(U\cap X'))=X'\cap((X-U)\cup(X-X'))=X'\cap(X-U)$,$X-U$ 闭于X,相反地,设 $A\subset X'$,$A=X'\cap F$,F 闭于 X,$X'-A=X'-(X'\cap F)=X'\cap(X-(X'\cap F))=X'\cap((X-X')\cup(X-F))=X'\cap(X-F)$. $X-F$ 开于X,故 $X'-A$ 开于X',从而 A 是子空间X'的闭集.

由上述所证结合闭包的定义(定义 1.3.1)易知 $\widetilde{A}=\overline{A}\cap X'$.
证完.

在分析学中考察函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续可导时，对端点 a 或b 分别考察它的右半或左半邻域，也就是点 a 或点b 在数直线上的开邻域与闭区间$[a,b]$的交，实际上已是相对拓扑概念.

下面介绍另一种方法.

对给定的两个拓扑空间 X,Y，可以定义 X 到 Y 的连续映射(定义 1.5.1)，现在的问题是：给定了拓扑空间$(X,\mathscr{U})$，集 Y 及集 X 到集 Y 的映射f，要求给 Y 以使f 成为连续映射的最精拓扑，(如果不提“最精”，则平凡拓扑就满足要求，而且满足要求的拓扑不是唯一的)，根据连续映射的定义，我们规定集 V 是 Y 中的开集当且仅当V 的逆象$f^{-1}(V)$是 X 中的开集，容易验证这些 V 所成的集族满足(O1)—(O3)，所以

$$\mathscr{V}=\{V:f^{-1}(V)\in\mathscr{U}\} \tag{1}$$

形成 Y 上的拓扑，$(Y,\mathscr{V})$是一拓扑空间，显然 $\mathscr{V}$是使 f 连续的 Y 上的最精拓扑.

对每一 $y\in Y,f^{-1}(y)\subset X$，这些 $f^{-1}(y)(y\in Y)$所成的集族满足下列两条件：

(i) $\bigcup\{f^{-1}(y):y\in Y\}=X$，

(ii) 对不同的 $y,y'\in Y,f^{-1}(y)\cap f^{-1}(y')=\varnothing$.

设有 X 的子集D 所成的集族 $\mathscr{D}=\{D\}$，如果满足上述两条件，则称 $\mathscr{D}$是 X 的一个**分解**(decomposition).

前面的$\{f^{-1}(y):y\in Y\}$形成 X 的一个分解.

设 R 是X 上的**等价关系**(equivalence relation，即满足 xRx，$xRx'\Rightarrow x'Rx$，xRx'及$x'Rx''\Rightarrow xRx''$的关系R)，熟知 R 把集X 分解许多等价类，这些类所成集 X/R 满足上述两条件，也就是形成 X 的一个分解. 当 X 是拓扑空间$(X,\mathscr{U})$时，由 X 到等价类所成集 X/R 上规定一映射f，使 X 中的每一点x 对应着它所属的等价类，从而在 X/R 上给以(1)式所示的拓扑，这拓扑就是前面问题中所要求的最精拓扑(由问题中的 f 可以确定等价关系$R:f(x)=f(x')\Leftrightarrow xRx'$，从而 $Y=X/R$)，称为**商拓扑**(quotient topology)，

$Y(=X/R)$称为**商空间**(quotient space),f 称为**商映射**(quotient mapping),如果着眼于 X 的分解 $\mathscr{D}$,则称 $Y(=X(\mathscr{D}))$为**分解空间**(decomposition space),f 为**自然映射**(natural mapping).

例 2.1.2 取前面的例1.2.7中的空间 R^+,把集 $\left\{\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\right\}$中的点算作一类,其他的点每一点算作一类,在类所成的集上给以商拓扑(1),得到商空间 Y^+.

例 2.1.3 取前面的例 1.2.8 中的 Niemytzki 半平面 R',把 x 轴上的有理点算作一类,无理点算作一类,其他的点每一点算作一类,在类所成的集上给以商拓扑(1),得商空间 Y'.

下面考察另一问题,设给定了集 X,拓扑空间$(Y,\mathscr{V})$及集 X 到集 Y 的映射f,要求给 X 以使f 成为连续映射的最粗拓扑(如果不提“最粗”,则离散拓扑总是满足要求的,而且满足要求的拓扑不是唯一的)根据连续函数的定义,我们规定集 U 是X 中的开集当且仅当它是Y 中某一开集V 的逆象,容易验证这些 U 所成的集族满足(O1)—(O3),所以

$$\mathscr{U}=\{U:U=f^{-1}(V),V\in\mathscr{V}\} \tag{2}$$

形成 X 上的拓扑,$(X,\mathscr{U})$是一拓扑空间,显然 $\mathscr{U}$是使 f 连续的X 上的最粗拓扑.

以上引进的构造新的拓扑空间的方法对下面定义积空间时很有用.

在通常的平面 R^2 上,以开圆族$\{S_\varepsilon((x,y))\}$作为点(x,y)的开邻域基,我们也可以取包含点(x,y)的开矩形族作为 R^2 的点的开邻域基,这是因为每一个开圆总包含着某一个开矩形,而每一个开矩形总包含着某一个开圆,这种开矩形可以表示为点 x,点 y 在数直线上的开区间的积,一般说,设有两个拓扑空间$(X,\mathscr{U})$,$(Y,\mathscr{V})$,作直积集 $Z=X\times Y$,可以给直积集 $Z=X\times Y$ 以如下的拓扑 $\mathscr{W}$,这拓扑 $\mathscr{W}$以集族

$$\{U\times V:U\in\mathscr{U},V\in\mathscr{V}\}$$

为它的开基,这样得到的拓扑空间$(Z,\mathscr{W})$称为拓扑空间$(X,\mathscr{U})$与

$(Y,\mathscr{V})$的积空间.这一方法可以推广到任意有限个拓扑空间的积空间情况.

设有拓扑空间$(X_i,\mathscr{T}_i)(i=1,2,\cdots,n)$,作直积集$X=\prod_{i=1}^n X_i$,给$X$以如下的拓扑$\mathscr{W}$,这拓扑$\mathscr{W}$以集族

$$\left\{\prod_{i=1}^n V_i: V_i\in\mathscr{T}_i, i=1,2,\cdots,n\right\} \tag{3}$$

为开基(容易验证满足(B1)—(B3)).

对无限个拓扑空间情况,似乎也可作如上处理,可是结果太不理想,不便于应用,为此作如下处理.

设有一族拓扑空间$\{(X_\gamma,\mathscr{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$,$\Gamma$是无限集,作直积集$X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$,设$p_\gamma$是$X$到$X_\gamma(\gamma\in\Gamma)$上的投影映射.我们要求给$X$以使每个投影射映$p_\gamma$都成为连续映射的最粗拓扑,为此我们可以把类似于(2)式给出的集族

$$\{W: W=f_\gamma^{-1}(V_\gamma), V_\gamma\in\mathscr{T}_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$$

作为X上拓扑$\mathscr{W}$的次开基,也就是这集族的元素的有限交形成$\mathscr{W}$的开基,因此这开基是如下集族:

$$\{\prod_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma: V_\gamma\in\mathscr{T}_\gamma, \gamma\in\Gamma,\text{且除有限个 }\gamma\text{ 外 }V_\gamma=X_\gamma\}^{*)} \tag{4}$$

(满足(B1)—(B3)),容易验证$\mathscr{W}$是使投影映射$p_\gamma(\gamma\in\Gamma)$都连续的$X$上的最粗拓扑,这拓扑$\mathscr{W}$称为**积拓扑**(product topology),这是A. Tychonoff引进的,也称为Tychonoff **拓扑**.我们以后将看到这一似乎不太自然的处理结果有很大的应用.空间$(X,\mathscr{W})$称为空间族$\{(X_\gamma,\mathscr{T}_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$的**积空间**(product space).

比较(3),(4),可看到在有限个拓扑空间的情况,两式是一致的,也就是说用两种处理方法得到的积空间是一致的.

例 2.1.4 通常的n维欧氏空间R^n是n个数直线R的积空间.Hilbert空间的子集

$$I^\omega=\{(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots): 0\leqslant x_i\leqslant 1/i, i=1,2\cdots\}$$

---

*)如把集族$\{\prod_{\gamma\in\Gamma}V_\gamma: V_\gamma\in\mathscr{T}_\gamma, \gamma\in\Gamma\}$作为$X$上拓扑的开基,则称此拓扑为**箱拓扑**(box topology),它远没有Tychonoff拓扑所具有的良好性质.

是闭区间$[0,1/i](i=1,2,\cdots)$的积空间. I^{ω} 称为 **Hilbert 立方体**(Hilbert cube).

设$\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的一族离散空间,指标集 Γ 是无限集,每一空间 $X_\gamma(\gamma\in\Gamma)$至少包含两点.则积空间$\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 不是离散空间,因为由(4)式,这积空间的单点集不可能是这空间的开集.

由(4)式,容易看到积空间到它的坐标空间内的投影是开映射.

定理 2.1.5 拓扑空间 X 到积空间 $Y=\prod_{\gamma\in\Gamma}Y_\gamma$ 内的映射 f 是连续的,当且仅当对积空间 Y 的每一个投影 $p_\gamma(\gamma\in\Gamma)$,映射 $p_\gamma\circ f$ 是连续的。

证明 设 f 连续,容易验证连续映射的复合映射是连续的,所以 $p_\gamma\circ f(\gamma\in\Gamma)$是连续的.

相反地,设 $p_\gamma\circ f(\gamma\in\Gamma)$是连续的,设 U_γ 是 Y_γ 中的开集,则 $(p_\gamma\circ f)^{-1}(U_\gamma)=f^{-1}(p_\gamma^{-1}(U_\gamma))$是开集.这里 $P_\gamma^{-1}(U_\gamma)$是积空间 Y 的次开基的元素.设 U 是 Y 中开集,不妨取作 Y 的开基中的元素,从而 U 是次开基中元素 $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$的有限交,由于有限交的逆象$(f^{-1}(U))$等于逆象$(f^{-1}(p_\gamma^{-1}(U_\gamma)))$的有限交,所以 $f^{-1}(U)$是 X 中开集. 证完.

定理 2.1.6 设 f 是拓扑空间 X 到它的商空间 Y 上的商映射,φ 是 Y 到拓扑空间 Z 上的映射.则 φ 是连续的当且仅当 $\varphi\circ f$ 是连续的.

证明 设 φ 是连续的,显然复合映射 $\varphi\circ f$ 是连续的.相反地,设 $\varphi\circ f$ 是连续的,设 U 是 Z 中的开集.所以$(\varphi\circ f)^{-1}(U)=f^{-1}(\varphi^{-1}(U))$是 X 中的开集,由商拓扑的定义,$\varphi^{-1}(U)$应是 Y 中的开基,所以,φ 是连续映射. 证完.

在第一章§4,用滤子和网刻画拓扑空间的收敛概念.积空间上的收敛概念可以通过坐标空间上的收敛概念用滤子(定理 2.1.3)或网刻画,下面的引理相当于分析学中用极限刻画连续性.

引理 2.1.7 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 内的映射 f 是连续

的，当且仅当对任一 $x\in X$ 及 X 中的任一收敛于点 x 的滤子基 $\mathscr{F}$，滤子基 $f(\mathscr{F})=\{f(A):A\in\mathscr{F}\}$ 收敛于 Y 中的点 $f(x)$.

证明 设 f 是连续的，即对每一 $x\in X$ 及 $f(x)$ 的每一邻域 V，存在 x 的邻域 U 使 $f(U)\subset V$（定理 1.5.2 的(V)），设滤子基 $\mathscr{F}$ 收敛于 x，即对 x 的任何邻域 U，存在 $F\in\mathscr{F}$，使 $F\subset U$. 显然 $f(\mathscr{F})$ 是滤子基，$f(\mathscr{F})$ 中的元素 $f(F)\subset f(U)\subset V$，所以 $f(\mathscr{F})$ 收敛于点 $f(x)$. 相反地，设 $x\in X$，V 是 $f(x)$ 的任一邻域，取点 x 的所有邻域形成的滤子 $\mathscr{U}(x)$，则 $\mathscr{U}(x)$ 收敛于 x，由假设滤子基 $f(\mathscr{U}(x))$ 收敛于 $f(x)$（作为滤子的象应是滤子基）. 所以存在 $F\in f(\mathscr{U}(x))$ 使 $F\subset V$，这就是存在 $U\in\mathscr{U}(x)$，使 $f(U)\subset V$，所以 f 连续. 证完.

以上引理 2.1.7 的相应于网 $\varphi(\Delta;>)$ 的论述留给读者（见习题 2.30）.

定理 2.1.8 积空间 $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的滤子 $\mathscr{F}$ 收敛于点 $x=\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 当且仅当 $\mathscr{F}$ 在坐标空间 $X_\gamma(\gamma\in\Gamma)$ 上的投影 $p_\gamma(\mathscr{F})$ 收敛于 X_γ 中的点 x_γ.

证明 设 $\mathscr{F}\to x$，由于投影 p_γ 是连续的，由引理 2.1.7 得证. 相反地，设 U 是 X 中含点 x 的开集，U 可以表示为 $U=\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$，这里 Γ' 是 Γ 的有限子集. 对 $\gamma\in\Gamma'$，由于滤子基 $p_\gamma(\mathscr{F})\to x_\gamma$，存在 $p_\gamma(\mathscr{F})$ 中元素包含在 U_γ 内，也就是存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $p_\gamma(F)\subset U_\gamma$. 由于 $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)\supset F$，由滤子的定义（定义 1.4.1 的(ii)），$p_\gamma^{-1}(U_\gamma)\in\mathscr{F}$，从而对 $\gamma\in\Gamma'$，$p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ 的有限交属于 $\mathscr{F}$（由定义 1.4.1 的(iii)）. 这有限交就是 U，所以 $U\in\mathscr{F}$，到此证明了 $\mathscr{F}\to x$. 证完.

这定理相应于网 $\varphi(\Delta;>)$ 的论述，其证明留给读者（见习题 2.31）.

由定理 2.1.8，积拓扑中的收敛可称为**按坐标收敛**（coordinatewise convergence）或**按点收敛**（pointwise convergence）. 后一术语更常用于所有坐标空间是相同的空间情况，即对 $\gamma\in\Gamma$，$X_\gamma=$

X,这时相应的积空间记作:X^{Γ}.

定义 2.1.9 空间 X 的分解 $\mathscr{D}$ 称为**上半连续的**(upper semi-continuous),如果对每一 $D\in\mathscr{D}$ 及每一开集 $U\supset D$,存在开集 V,使 $D\subset V\subset U$,且 V 是 $\mathscr{D}$ 中某些元素的并.

定理 2.1.10 拓扑空间 X 到它的分解空间 $X(\mathscr{D})$ 上的自然映射 f 是闭映射,当且仅当分解 $\mathscr{D}$ 是上半连续的.

这定理实际上是定理 1.5.8(iii)的特殊情况.证明留给读者.

§2. 分离公理

拓扑空间的定义是很一般的,很少的定理能建立在这样的情况下.必须加以各种限制,这一节里所讲的限制是关于点与点,点与闭集,闭集与闭集的各种分离情况,通常称为**分离公理**(axioms of separation).

定义 2.2.1(T_0 分离公理) 对拓扑空间 X 的不同两点 x_1, x_2 存在其中一点的邻域不包含另外一点(例如 x_1 的邻域 $U(x_1)$ 使 $x_2\notin U(x_1)$).以上叙述称为 **T_0 分离公理**,满足 T_0 分离公理的拓扑空间称为 **T_0 空间.**

具有两个点以上的平凡拓扑空间不是 T_0 空间,不是 T_0 空间的拓扑空间很少有用处.

定理 2.2.2 下列论断等价:

(i) X 是 T_0 空间,

(ii) 对 X 的不同的两点 x_1,x_2,或者 $x_1\notin\overline{\{x_2\}}$,或者 $x_2\notin\overline{\{x_1\}}$,

(iii) 对 X 的不同的两点 x_1 与 x_2 具有不同的闭包 $\overline{\{x_1\}}$ 与 $\overline{\{x_2\}}$.

证明 (i)⇒(ii) 设 $x_1\in\overline{\{x_2\}}$ 及 $x_2\in\overline{\{x_1\}}$ 同时成立,则 x_1 的任何邻域包含 x_2,x_2 的任何邻域包含 x_1,不满足(i).

(ii)⇒(i) 设 $x_1\notin\overline{\{x_2\}}$,则存在 x_1 的邻域 $U(x_1)$ 使 $x_2\notin$

$U(x_1)$,

(ii)⇒(iii)　显然,

(iii)⇒(ii)　设 $x_1 \in \overline{\{x_2\}}$, $x_2 \in \overline{\{x_1\}}$ 同时成立,亦即 $\{x_1\} \subset \overline{\{x_2\}}$, $\{x_2\} \subset \overline{\{x_1\}}$,从而有 $\overline{\{x_1\}} \subset \overline{\overline{\{x_2\}}} = \overline{\{x_2\}}$,同理 $\overline{\{x_2\}} \subset \overline{\{x_1\}}$,故有 $\overline{\{x_1\}} = \overline{\{x_2\}}$,不满足(iii).　证完.

定义 2.2.3(T_1 分离公理)　对拓扑空间 X 的不同两点 x_1, x_2,存在点 x_1 的邻域 $U(x_1)$ 使 $x_2 \notin U(x_1)$,点 x_2 的邻域 $U(x_2)$ 使 $x_1 \notin U(x_2)$. 以上叙述称为 $\boldsymbol{T_1}$ **分离公理**,满足 T_1 分离公理的拓扑空间称为 $\boldsymbol{T_1}$ **空间**.

设 $X = \{a, b\}$,规定 X 上的拓扑为 $\{\varnothing, \{a\}, X\}$,存在点 a 的邻域 $\{a\}$ 不包含点 b,但不存在点 b 的邻域不包含点 a,所以这空间是 T_0 空间,但不是 T_1 空间.

下述两定理的证明,读者可以自己完成.

定理 2.2.4　拓扑空间 X 是 T_1 空间当且仅当每一个单点集 $\{x\}$ $(x \in X)$ 是闭集.

定理 2.2.5　设 T_1 空间 X 具有无限个元素,A 是 X 的无限子集,则点 x 是集 A 的聚点,当且仅当 x 的任一邻域包含集 A 的无限个点.

定义 2.2.6　(T_2 分离公理)对拓扑空间 X 的不同两点 x_1, x_2,存在点 x_1 的邻域 $U(x_1)$,点 x_2 的邻域 $U(x_2)$,使 $U(x_1) \cap U(x_2) = \varnothing$. 以上叙述称为 $\boldsymbol{T_2}$ **分离公理或 Hausdorff 公理**,满足这公理的空间称为 $\boldsymbol{T_2}$ **空间或 Hausdorff 空间.**

例 2.2.7　(不是 T_2 空间的 T_1 空间)　取第一章的例 1.3.6 的空间 $R^* = R \cup \{x^*\}$,原来数直线 R 上的开集都是这空间 R^* 的开集,另外数直线上有限集的补集与 $\{x^*\}$ 的并也是 R^* 的开集,这些开集形成点 x^* 的邻域族,容易验证 R^* 是 T_1 空间,对任一点 $x \in R$ 及 x^* 不存在互不相交的邻域,所以 R^* 不是 T_2 空间.

由定义,显然 $T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$,由上面这些反例,知相反的蕴含关系都不能成立.

T_2 空间具有良好的特征，就是分析学上所谓“极限的唯一性”，现表述为如下定理.

定理 2.2.8 拓扑空间 X 是 T_2 空间当且仅当每一个滤子收敛于至多一点.

证明 设 X 是 T_2 空间，滤子 $\mathscr{F}\to x$，设 $x'\neq x$，由定义 2.2.6，存在点 x 的邻域 $U(x)$ 及点 x' 的邻域 $V(x')$，使 $U(x)\cap V(x')=\varnothing$. 因为 $\mathscr{F}\to x$，$U(x)\in\mathscr{F}$，由于 $U(x)\cap V(x')=\varnothing$，$V(x')\notin\mathscr{F}$，所以 $\mathscr{F}$ 不能收敛于 x'. 相反地(用反证法)，设 X 不是 T_2 空间，对不同的点 x,x' 的邻域 U,V 都相交，对这些相交的邻域对 (U,V)，置

$$\mathscr{F}=\{M:M\supset U\cap V,U\text{ 是 }x\text{ 的邻域},V\text{ 是 }x'\text{ 的邻域}\}.$$

$\mathscr{F}$ 是一滤子，由于 x 的每一邻域及 x' 的每一邻域都属于 $\mathscr{F}$，所以有 $\mathscr{F}\to x$ 及 $\mathscr{F}\to x'$. 证完.

定义 2.2.9 （T_3 分离公理） 对拓扑空间的闭集 F 及不属于 F 的点 x 存在开集 U 及 V，使 $U\supset F$，$x\in V$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 以上叙述称为 **T_3 分离公理**，满足 T_1 及 T_3 分离公理的拓扑空间称为**正则**(regular)空间.

显然 $T_1+T_3\Rightarrow T_2$，即正则$\Rightarrow$Hausdorff，相反的蕴含关系不成立. 见下例.

例 2.2.10 （不是正则的 T_2 空间）取例 1.2.7 及例 2.1.2 中的空间 R^+，容易验证这空间是 T_2 空间. 取 $F=\{\frac{1}{n}:n=1,2,\cdots\}$，$F$ 是一闭集，点 $0\notin F$，不存在分别包含 F 及点 0 的开集 U 及 V 使 $U\cap V=\varnothing$.

定理 2.2.11 T_1 空间 X 是正则空间当且仅当对每一 $x\in X$ 及每一包含 x 的开集 U，存在开集 V 使 $x\in V\subset\overline{V}\subset U$.

读者可以自己证明上述定理. 注意上述定理中的 U 可以取作基或次基的元素. 由定理 2.2.11 知正则空间的每一点具有由闭集组成的邻域基，称为**闭邻域基**.

定理 2.2.12 （T_4 分离公理）对拓扑空间不相交的闭集 F_1

及 F_2 存在开集 U_1 及 U_2，使 $U_1 \supset F_1$，$U_2 \supset F_2$，且 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. 以上叙述称为 **$T_4$ 分离公理**. 满足 T_1 及 T_4 分离公理的的拓扑空间称为**正规**(normal)空间.

显然，$T_1 + T_4 \Rightarrow T_1 + T_3$，即正规⇒正则，相反的蕴含关系不成立，见下例.

例 2.2.13 （不是正规的正则空间）取例 1.2.8 及例 2.1.3 的 Niemytzki 半平面 R'. 容易验证，这空间是正则空间. 下面证明 R'不是正规空间，把 X 轴上有理点 γ 所成集记为 Q，无理点 η 所成集记作 I，在空间 R'中，Q, I 是不相交的闭集. 用反证法，姑设存在开集 U 及 V，$U \supset Q$，$V \supset I$，$U \cap V = \varnothing$，把切于 x 轴上点处的直径为 ε 的圆的内部记作 $S'_\varepsilon(x)$，对每一 $\gamma \in Q$，存在 $S'_{d_\gamma}(\gamma) \subset U$，对集 I，置

$$I_n = \{\eta : \eta \in I, S'_{1/n}(\eta) \subset V\}, \tag{1}$$

得

$$I = \bigcup_{\lambda=1}^{\infty} I_n. \tag{2}$$

由于 $U \cap V = \varnothing$，任一 $S'_{d_\gamma}(\gamma)$与任一 $S'_{1/n}(\eta)$不相交，从而

$$(\gamma - \eta)^2 \geqslant \frac{1}{n} d_\gamma. \tag{3}$$

对每一 $\gamma \in Q$，取 $\varepsilon_\gamma > 0$，$\varepsilon_\gamma^2 = \frac{1}{n} d_\gamma$，由(3)及(1)知开区间$(\gamma - \varepsilon_\gamma, \gamma + \varepsilon_\gamma)$与 I_n 不相交（从此以下，把 x 轴作为数直线 R（通常拓扑）），从而 $\gamma \notin \overline{I_n}$，故有 $Q \subset R - \overline{I}_n$，由于 $\overline{Q} = R$ 及 $\overline{Q} \subset \overline{R - \overline{I}_n}$，得

$$R = \overline{R - \overline{I}_n} = R - (\overline{I}_n)^\circ.$$

所以$(\overline{I}_n)^\circ = \varnothing$，即 I_n 无处稠密于 R. 由(2)式，得无理数集 I 是第一纲的，这是矛盾的（我们已证明无理数集是第二纲的，见例 1.3.15），这说明反证法的假设不能成立，R'不是正规空间.

定理 2.2.14 T_1 空间是正规空间当且仅当对每一闭集 F 及每一包含 F 的开集 U，存在开集 V 使 $F \subset V \subset \overline{V} \subset U$（读者自证）.

满足 T_0,T_1,T_2,T_3 分离公理的空间的子空间分别满足 T_0，T_1,T_2,T_3 分离公理，(读者自证). 当然，正则空间的子空间是正则空间，可是满足 T_4 分离公理的空间的子空间未必满足 T_4 分离公理，正规空间的子空间未必是正规空间.

例 2.2.15 (正规空间的子空间不是正规的)设 $[0,\omega_1]$ 是不大于第一个不可数序数 ω_1 的序数所成集，$[0,\omega]$ 是不大于第一个无限序数 ω 的序数所成集，分别给以序拓扑. 由下章定理 3.1.11，知积空间 $[0,\omega_1]\times[0,\omega]$(称为 Tychonoff"板"，以 $[0,\omega_1]$ 为"底"，以 $[0,\omega]$ 为"高")是正规空间. 考察它的子空间 $[0,\omega_1]\times[0,\omega]-\{(\omega_1,\omega)\}$(去掉这"板"的右上角的点)设 $A=\{(\omega_1,y):y<\omega\}$("板"的右边)，$B=\{(x,\omega):x<\omega_1\}$("板"的上边). A,B 是不相交的闭集(关于这子空间，因为去掉了"板"的右上角点). 下面证明不存在分别包含它们的不相交的开集. 设开集 $U\supset A$，对每一 $y<\omega$，取 $\varphi(y)$ 为第一个满足 $x>\varphi(y)\Rightarrow(x,y)\in U$ 的序数. $\varphi(y)<\omega_1$，这可数个 $\varphi(y)$ 都小于 ω_1，从而 $\sup\{\varphi(y)\}<\omega_1$，所以存在序数 x^* 大于所有的 $\varphi(y)$，$(x^*,\omega)\in B$，所以 (x^*,ω) 的任何邻域与 U 相交.

定义 2.2.16 (T_5 分离公理)对拓扑空间的满足 $A\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=\varnothing$ 的集 A 及 B(满足该条件的集 A 及 B 也称为**可分离的**(separated))，存在开集 U 及 V 使 $U\supset A$，$V\supset B$ 且 $U\cap V=\varnothing$. 以上叙述称为 **T_5 分离公理**. 满足 T_1 及 T_5 分离公理的拓扑空间称为**完全正规**(completely normal)空间.

显然 $T_5\Rightarrow T_4$，完全正规$\Rightarrow$正规. 由下面定理及例 2.2.15 知相反的蕴含关系不成立.

定理 2.2.17 (P. Urysohn)拓扑空间 X 是完全正规空间当且仅当它的每一子空间是正规空间.

证明 只要证明空间 X 满足 T_5 分离公理当且仅当它的每一子空间满足 T_4 分离公理.

设 X 满足 T_5 分离公理，A 是 X 的子空间，F_1,F_2 是 A 中不相交的闭集. 由相对拓扑性(定理 2.1.1)，$F_1=\overline{F}_1\cap A$，$F_2=\overline{F}_2\cap A$，

这里 $\overline{F}_1,\overline{F}_2$ 是 F_1,F_2 关于空间 X 的闭包,因为

$$\overline{F}_1 \cap F_2 = \overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap A, F_1 \cap \overline{F}_2 = \overline{F}_1 \cap A \cap \overline{F}_2,$$

而 $\overline{F}_1 \cap \overline{F}_2 \cap A = F_1 \cap F_2 = \varnothing$,故有

$$\overline{F}_1 \cap F_2 = F_1 \cap \overline{F}_2 = \varnothing.$$

由 T_5 分离公理,存在开集 U,V,使 $U \supset F_1, V \supset F_2$ 且 $U \cap V = \varnothing$,所以在子空间 A 中有 $U \cap A \supset F_1, V \cap A \supset F_2$. 而 $U \cap A$, $V \cap A$ 是 A 中不相交的开集,所以子空间 A 满足 T_4 分离公理.

相反地,设空间 X 的每一子空间满足 T_4 分离公理,A,B 是 X 的子集满足 $A \cap \overline{B} = \overline{A} \cap B = \varnothing$. 置 $G = X - (\overline{A} \cap \overline{B})$. 则 $G \cap \overline{A}, G \cap \overline{B}$ 是子空间 G 中的不相交的闭集. 由假设,存在 G 中的开集 U 及 V 使 $U \supset G \cap \overline{A}, V \supset G \cap \overline{B}$,且 $U \cap V = \varnothing$. 由于 G 是 X 的开子空间,所以 U,V 是 X 中的开集,由于

$$G = X - (\overline{A} \cap \overline{B}) = (X - \overline{A}) \cup (X - \overline{B}),$$

故有

$$U \supset G \cap \overline{A} = (X - \overline{B}) \cap \overline{A} \supset A \cap \overline{A} = A.$$

同理,$V \supset B$,所以 X 满足 T_5 分离公理. 证完.

由上述定理,完全正规空间也称为**遗传正规**(hereditarily normal)空间. 所谓遗传性是指空间的每一子空间都具有这空间的性质. 容易验证 T_0, T_1, T_2, T_3 及正则性都具有遗传性. 例 2.2.15 说明 T_4 及正规性不具遗传性. 上述定理的证明中也证明了如下事实:"设空间 X 的每一开子空间是正规的,则 X 的每一子空间是正规的."

任意个 T_0(T_1, T_2, T_3,正则)空间的积空间是 T_0(T_1, T_2, T_3,正则)空间(读者可以自己证明,习题 2.8,2.9,可利用次基的元素). 但是两个正规空间的积未必是正规空间(见例 2.3.10).

§3. 可数公理

定义 2.3.1 拓扑空间 X 的基底的最小势(cardinal number)

称为这空间的**拓扑势**(weight),拓扑势不大于$\aleph_0$的空间称为满足**第二可数公理**(second axiom of countability),也就是具有可数基底的空间.如果拓扑空间 X 的每一点具有一个邻域基至多由可数个开集组成,则称 X 满足**第一可数公理**(first axiom of countability).拓扑空间 X 的集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:\alpha\in A\}$ 称为空间 X 的**覆盖**(covering),如$\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in A\}=X$.如果 $\mathscr{U}$ 中的元素都是开集(闭集),则称为开(闭)覆盖;当指标集 A 是有限集时(可数集时),则称有限(可数)覆盖;如果 $\mathscr{U}$ 的子集族 $\mathscr{V}$ ($\mathscr{V}\subset\mathscr{U}$)仍是覆盖,则称 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的**子覆盖**(subcovering);如果拓扑空间 X 的任一开覆盖具有可数子覆盖,则称 X 是 Lindelöf **空间**.如果拓扑空间 X 具有可数稠密子集,则称 X 是**可分**(Separable)**空间**.

定理 2.3.2 设拓扑空间 X 满足第一可数公理,则有:

(i)设点 x 是集$A\subset X$ 的聚点,则存在 $A-\{x\}$ 中的序列收敛于 x *),

(ii)集 A 是开集当且仅当收敛于A 中某一点的序列都终留于 A,

(iii)如果 x 是序列$\{x_n\}$的聚点,则存在$\{x_n\}$的子序列收敛于 x.

证明 (i)读者自证,并比较习题 1.25,

(ii)设 A 不是开的,则 $X-A$ 不是闭的,故存在 $X-A$ 的聚点x 不属于$X-A$,从而 $x\in A$,由(i)存在$(X-A)-\{x\}=X-A$ 中的收敛于 x 的序列,这一收敛序列显然不能终留于 A,

(iii)是显然的.证完.

满足第二可数公理的拓扑空间当然满足第一可数公理,此外,有下述两定理.

定理 2.3.3 满足第二可数公理的拓扑空间是可分的.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的可数基底,对每一 $U\in\mathscr{U}$,任取点

---

*)满足(i),(ii)的空间分别称为 Fréchet **空间**,**序列型**(sequential)**空间**,(S. Franklin(1965)),由证明(ii)知:Fréchet⇒序列型.

$x \in U$,则集 $A = \{x : x \in U, U \in \mathscr{U}\}$ 是可数集,下证集 A 稠密于空间X,$X - \bar{A}$ 是一开集,不能包含基 $\mathscr{U}$ 中的任何非空元素,故是空集.证完.

定理 2.3.4 (Lindelöf) 满足第二可数公理的拓扑空间是 Lindelöf 空间.

证明 设 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$是空间$X$ 的任一开覆盖,$\mathscr{U}$是 X 的可数基,因为每一 $V_\alpha(\alpha \in A)$是某些 $U \in \mathscr{U}$的并,所以存在 $\mathscr{U}$的子族 $\mathscr{U}'(\mathscr{U}' \subset \mathscr{U})$覆盖 X,对每一 $U \in \mathscr{U}'$,选取 V_α 使$U \subset V_\alpha$,这样得到的子覆盖 $\mathscr{V}' = \{V_\alpha : V_\alpha \supset U, U \in \mathscr{U}'\}$是可数的.证完.

数直线 R 可以取所有开区间(a,b)作为基,这里 a,b 是有理数,由于有理数是可数的,知数直线 R 具有可数基,从而 R 是可分空间,Lindelöf 空间.

例 2.3.5 (不满足第二可数公理的可分空间).设 X 是不可数集,规定空集及有限集的补集是开集,从而每个无限集(包括可数无限集).与每一个开集相交,故每个无限集都稠密于 X,F 证这空间没有可数基.设具有可数基 $\mathscr{B}$,由于这空间是 T_1 的,所以 $\mathscr{B}$ 中所有包含点 x 的元素的交(可数交)是$\{x\}$.用 DeMorgan 公式于这可数交的补集($X - \{x\}$),得到 $X - \{x\}$是可数个有限集的并,从而 $X - \{x\}$是一可数集,这是矛盾的.

例 2.3.6 (不满足第一可数公理的 Lindelöf 空间).取例 2.2.15 的空间$[0,\omega_1]$,点 ω_1 的邻域基为 $\mathscr{U}(\omega_1) = \{(\beta,\omega_1] : \beta < \omega_1\}$不是可数的,所以空间$[0,\omega_1]$不满足第一可数公理.下面证明空间$[0,\omega_1]$的任何开覆盖具有有限子覆盖.

设 $\mathscr{U}$是空间$[0,\omega_1]$的任一开覆盖,设 $\omega_1 \in$某 $U_1 \in \mathscr{U}$,存在 ω_1 的开邻域$(\beta_1,\omega_1] \subset U_1$,$\beta_1 \in$某 $U_2 \in \mathscr{U}$,存在 β_1 的开邻域$(\beta_2,\beta_1] \subset U_2$,…,依次可得:

$$V(\omega_1) = (\beta_1,\omega_1], V(\beta_1) = (\beta_2,\beta_1], V(\beta_2) = (\beta_3,\beta_2], \cdots.$$

$\mathscr{V} = \{V(\omega_1)\} \cup \{V(\beta_n) : n \in N\}$是$[0,\omega_1]$的开覆盖,这里$\cdots < \beta_3 < \beta_2 < \beta_1$,这样的过程如无限继续下去,则集$\{\cdots,\beta_3,\beta_2,\beta_1\}$没有最小元素,这与$[0,\omega_1]$是良序集矛盾,所以这过程经有限次而终

止，$\mathscr{U}$ 中包含这有限个 V 的元素形成 $\mathscr{U}$ 的有限子覆盖.

附带地考察空间 $[0,\omega_1)$，这空间满足第一可数公理，但不是 Lindelöf 空间，对每一 $\alpha\in[0,\omega_1)$，$\alpha\neq 0$ 取 $\beta(\alpha)<\alpha$，则开覆盖 $\mathscr{V}=\{\{0\},(\beta(\alpha),\alpha]:0<\alpha<\omega_1\}$ 没有可数子覆盖.

容易看到空间 $[0,\omega_1)$，$[0,\omega_1]$ 都不是可分的，另外，例 1.3.6 空间 R^+，易知不满足第一可数公理，这空间的有理点集形成可数稠密子集，从而 R^* 是可分的，可分而不是 Lindelöf 的空间见例 2.3.10.

定理 2.3.7 (Tychonoff[1925]) 正则 Lindelöf 空间是正规空间

证明 设 A，B 是不相交的闭集，由正则性，对每一 $x\in A$，存在开集 $U(x)$ 使 $\overline{U(x)}\cap B=\varnothing$，$\mathscr{U}=\{U(x):x\in A\}$ 覆盖 A；同理，对每一 $y\in B$，存在开集 $V(y)$，使 $\overline{V(y)}\cap A=\varnothing$，$\mathscr{V}=\{V(x):x\in B\}$ 覆盖 B，从而 $\mathscr{U}\cup\mathscr{V}\cup(X-(A\cup B))$ 是 X 的开覆盖，因 X 是 Lindelöf 空间，存在可数子覆盖，从而得到 A 及 B 的可数开覆盖 $\{U_n\}$ 及 $\{V_n\}$. 置

$$U'_n=U_n-\bigcup\{\bar{V}_k:k\leqslant n\},\quad V'_n=V_n-\bigcup\{\bar{U}_k:k\leqslant n\},$$

则得 $U'_n\cap V'_n=\varnothing$，$V'_n\cap U'_m=\varnothing(m\leqslant n)$，即任一 U'_n 与任一 V'_m 不交，从而

$$U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U'_n\ ,\quad V=\bigcup_{n=1}^{\infty}V'_n$$

是不相交的开集，它们分别包含着 A，B. 证完.

推论 2.3.8 具有可数基的正则空间是正规空间.

证明 由定理 2.3.4 及 2.3.7 即得.

满足第一(第二)可数公理的空间的任何子空间满足第一(第二)可数公理，比较例 2.3.6 中的空间 $[0,\omega_1]$ 与 $[0,\omega_1)$ 知 Lindelöf 空间的子空间可以不是 Lindelöf 空间. 可分空间的子空间也未必是可分空间(见下例 2.3.9 及例 2.3.10).

不超过可数个满足第一(第二)可数公理的空间的积空间满足第一(第二)可数公理.(习题2.16)，E. Marczewski[1952]证明了

不超过 c(连续统的势)个可分空间的积空间是可分的空间*),两个 Lindelöf 空间的积空间未必是 Lindelöf 空间(见下例 2.3.9 及 2.3.10).

例 2.3.9 (半开区间拓扑 Sorgenfrey 直线) 取实数集 X,规定所有半开区间 $[a,b)$(这里 a,b 是实数)的集族 $\mathscr{B}$ 作为开基.这样得到的拓扑称为**半开区间拓扑**(half-open interval topology),赋以半开区间拓扑的数直线通常称为 Sorgenfrey **直线**(Sorgenfrey line).$\mathscr{B}$ 中的元素是既开且闭的集.形如 (a,b),$(a,+\infty)$ 的集也是开集,因为 $(a,b)=\bigcup\{[\alpha,b):a<\alpha<b\}$,这拓扑不同于数直线 R 上的通常拓扑,显然这空间是 T_2 的.

这空间满足第一可数公理,因为对每一点 $x\in X$,可取 $\{[x,a_i)\}$(a_i 是有理数)作为点 x 的可数邻域基.

这空间是可分空间,因为有理点集稠密于这空间.

这空间不满足第二可数公理,设 $\{[a_n,b_n)\}$ 是开基 $\mathscr{B}$ 中任意可数个元素所成集族.取 $c\in X$ 使 $c\neq a_n$ $(n=1,2,\cdots)$,任取 $c'>c$,则不存在任何 $[a_n,b_n)$,使 $c\in[a_n,b_n)\subset[c,c')$.

这空间是 Lindelöf 空间,设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的任一开覆盖,以 U°_α 记在数直线 R 的通常拓扑下 U_α 的内核,由于数直线 R 的任何子空间是 Lindelöf 的,作为 $U=\bigcup_{\alpha\in A}U^\circ_\alpha$ 的开覆盖 $\{U^\circ_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 具有可数子覆盖 $\{U^\circ_{\alpha_i}\}$,置 $F=X-U$,下面证明 F 是可数集,从而可被 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中可数个覆盖,对每一点 $a\in F$,a 必是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中某半开区间的左端点,所以存在 $x_a>a$ 使 $(a,x_a)\cap F=\varnothing$,这样的开区间族 $\{(a,x_a)\}$,$(a\in F)$ 是两两互不交的(不然与 F 的定义矛盾).所以必须是可数的,从而 F 是可数集.

这空间是遗传正规的,取满足 $\bar{F}\cap H=F\cap\bar{H}=\varnothing$ 的集 F,H,因 $F\subset X-\bar{H}$,对每一点 $x\in F$,存在 $\varepsilon(x)>0$ 使 $[x,x+$

---

*)K. A. Ross 及 A. H. Stone[1964],W. W. Comfort[1969]曾先后给出这定理的简化证明.

$\varepsilon(x))\cap\bar{H}=\varnothing$,令 $U=\bigcup\{U(x)=[x,x+\varepsilon(x)):x\in F\}$,这是含 F 的开集,设 $y\in H$,对小于 y 的(在 y 左边的点)$x\in F$ 的邻域 $U(x)$的并

$$U'_y=\bigcup\{U(x):x\in F,x<y\}\subset(-\infty,y). \qquad (1)$$

所以对任何 $\varepsilon>0$,y 的邻域$[y,y+\varepsilon)\cap U'_y=\varnothing$. 另一方面,因 $y\notin\bar{F}$,存在 y 的邻域$[y,y+\varepsilon(y))\cap F=\varnothing$,($\varepsilon(y)>0$),对大于 y 的(在 y 右边的)点 $x\in F$ 的邻域 $U(x)$的并

$$U''_y=\bigcup\{U(x):x\in F,x>y\}\subset X-[y,y+\varepsilon(y)). \quad (2)$$

置 $V(y)=[y,y+\varepsilon(y))$,因 $U=U'_y\cup U''_y$,由(1),(2) $V(y)\cap U=\varnothing$. 令 $V=\bigcup\{V(y):y\in H\}$,V 是含H 的开集,$U\cap V=\varnothing$,由定理 2.2.17,知 X 是遗传正规空间. 证完.

例 2.3.10 (半开矩形拓扑). 取例 2.3.9 中空间 X 与它自身的积空间 $Y=X\times X$,作为两个可分空间的积是可分空间.

考察 Y 的闭子空间$E=\{(x,y):x+y=1\}$,E 不是可分空间(不存在真子集稠密于 E,直线 $x+y=1$ 上以有理数为坐标的点集不再是关于这子空间的稠密子集).

容易看出闭子空间 E 不是 Lindelöf 空间(这空间的单点集都是开集,是离散空间). 此外,可以证明 Lindelöf 空间的任何闭子空间是 Lindelöf 空间(习题 2.17),由此可推得空间 Y 不是 Lindelöf 空间.

这里说明可分空间的子空间未必可分,Lindelöf 空间的积空间未必是 Lindelöf 空间.

空间 $Y=X\times X$ 不是正规空间,仍考察它的闭子空间 E,在直线 $x+y=1$ 上取所有第一坐标是有理数的点所成集为 Q,所有第一坐标是无理数的点所成集为 I,$Q\cup I=E$,Q,I 是闭于子空间E 的,也是空间 Y 的不相交的闭集,用例 2.2.13 的相同的方法(这里 E 中点的邻域呈半开矩形,例 2.2.13Niemytzki 半平面的 x 轴上的点的邻域是切于这一点的开圆连同这一点,二者有某些共同性),可以证明不存在分别包含 Q,I 的不相交的开集.

这里看到两个正规空间的积空间未必是正规的. 这两个例非

常重要,以后还要引用.

§4. 函数分离性与完全正则空间

§2 的分离公理笼统地说是把点与点,点与闭集,闭集与闭集用互不相交的开集把它们分离,通常称为邻域分离性.这里引进函数(拓扑空间到数直线的映射)这一工具分离点与闭集,闭集与闭集,通常称相应的性质为函数分离性.

定理 2.4.1 (Urysohn 引理[1925]) 设 A,B 是正规空间 X 的两个不相交闭集,则存在连续函数 $f:X\to[0,1]$ 使 $f(x)=0$, $x\in A$; $f(x)=1$, $x\in B$.

证明 因 A,B 是不相交的闭集,$X-B$ 是包含 A 的开集,由正规性,存在开集 $U_{1/2}$ 使

$$A\subset U_{1/2}\subset \bar{U}_{1/2}\subset X-B.$$

由正规性,存在开集 $U_{1/4}$,及 $U_{3/4}$. 使

$$A\subset U_{1/4}\subset \bar{U}_{1/4}\subset U_{1/2}\subset \bar{U}_{1/2}\subset U_{3/4}\subset \bar{U}_{3/4}\subset X-B.$$

这样下去,可以得到一族开集,它的足标是 $k/2^n$ 型的真分数,用 Γ 记一切 $k/2^n$ 型的真分数所成集,记这开集族 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. 显然,集 Γ 稠密于 $[0,1]$,且对 $\gamma<\gamma'$ 有

$$A\subset U_\gamma\subset \bar{U}_\gamma\subset U_{\gamma'}\subset \bar{U}_{\gamma'}\subset X-B.$$

定义映射 $f:X\to[0,1]$

$$f(x)=\begin{cases}\inf\{\gamma:x\in U_\gamma\}, & x\in \text{某些 } U_\gamma,\\ 1, & x\notin \text{任何 } U_\gamma.\end{cases}$$

显然,$x\in B$ 时,$f(x)=1$; $x\in A$ 时,$x\in$ 所有 $U_\gamma(\gamma\in\Gamma)$, $f(x)=0$.

现在证 f 的连续性,设 $x_0\in X$, $f(x_0)\in(0,1)$(当 $f(x_0)=0$ 或 1 时,证法类似). 取 $\varepsilon>0$ 使

$$0<f(x_0)-\varepsilon<f(x_0)<f(x_0)+\varepsilon<1$$

(也就是取点 $f(x_0)$ 的 ε-邻域使这邻域包含在 $(0,1)$ 内). 存在 $\gamma',\gamma''\in\Gamma$,使

$$0 < f(x_0) - \varepsilon < \gamma' < f(x_0) < \gamma'' < f(x_0) + \varepsilon < 1.$$

由定义 $f(x) = inf\{\gamma: x \in U_\gamma\}$，知 $x_0 \in U_{\gamma''}, x_0 \notin \bar{U}_{\gamma'}$（不然，$f(x_0) \leqslant \gamma'$）. 从而 $U_{\gamma''} - \bar{U}_{\gamma'}$ 是点 x_0 的开邻域，记作 $U(x_0)$，则有

$$f[U(x_0)] \subset (f(x_0) - \varepsilon) f(x_0) + \varepsilon).$$

证完.

如把定理 2.4.1 所证明的内容："对不相交的闭集 A, B 存在连续函数 $f: X \to [0,1]$ 使 $f(x) = 0, x \in A; f(x) = 1, x \in B$"（通常称为不相交闭集的函数分离性），记作 F_4，则定理 2.4.1 所证可简写为：$T_4 \Rightarrow F_4$，其逆也成立，只要对满足 F_4 的上述函数 f，置 $U = f^{-1}([0, 1/2))$, $V = f^{-1}((1/2, 1])$，则 $U \supset A$, $V \supset B$，且 $U \cap V = \varnothing$. 所以对不相交的闭集说邻域分离性等价于函数分离性，从而正规空间的定义也可写作 $T_1 + F_4$，也就是：

"T_1 空间 X 称为正规空间如果对不相交的闭子集 A, B 存在连续函数 $f: X \to [0,1]$，使 $f(x) = 0, x \in A; f(x) = 1, x \in B$."

设 f 是空间 X 的子空间 X' 到空间 Y 的连续映射，如果存在 X 到 Y 的连续映射 g，使 $g(x) = f(x), x \in X'$，则称 g 是 f 到 X 上的（连续）**扩张**（extension）；也称 f 是 g 在 X' 的**限制**（restriction）. 例如，设 $X = [0,1] X' = (0,1]$，则定义在 $(0,1]$ 上的函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 不能扩张到 $[0,1]$ 上；而定义在 $(0,1]$ 上的函数 $\varphi(x) = x \cdot \sin\dfrac{1}{x}$ 可以扩张到 $[0,1]$ 上；只要置 $g(0) = 0, g(x) = \varphi(x), x \in (0,1]$.

设 A, B 是空间 X 上的任意两个不相交闭集，定义函数 $f: A \cup B \to [0,1]$，使 $f(x) = 0, x \in A; f(x) = 1, x \in B$，$f$ 在闭子空间 $A \cup B$ 上是连续的，因为 A, B 是关于子空间 $A \cup B$ 的既开且闭集，如果存在 f 到 X 上的（连续）扩张 g，可置 $U = g^{-1}([0, 1/2))$, $V = g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$，则 U, V 是分别包含 A, B 的不相交开集，故 X 是正规空间，相反地，有下述定理.

定理 2.4.2（Tietze 扩张定理[1923]） 设 X 是正规空间，F

是闭子集，f 是 F 到 R 内的有界连续函数，则存在 f 到 X 上的连续扩张 g，使 $\sup\{|g(x)|:x\in X\}=\sup\{|f(x)|,x\in F\}$.

证明 设 $\mu=\sup\{|f(x)|:x\in F\}$，置

$$F_1 = f^{-1}([\mu/3,\infty)),\quad F_2 = f^{-1}((-\infty,-\mu/3]).$$

由 Urysohn 引理，可得连续函数 $g_0:X\to R$ 且

$$g_0(x)=\begin{cases}\mu/3, & x\in F_1,\\ -\mu/3, & x\in F_2.\end{cases}$$

$\sup\{|g_0(x)|:x\in X\}=\mu/3$，置（在 F 上）

$$f_1(x)=f(x)-g_0(x).$$

则 $\sup\{|f_1(x)|:x\in F\}=\mu_1\leqslant 2\mu/3$，这样继续下去，可得 $g_n(x),f_n(x)$ 满足：

(i) $g_n(x)$ 在 X 上连续，$f_n(x)$ 在 F 上连续；

(ii) $f_n(x)=f_{n-1}(x)-g_{n-1}(x)$；$(f_0(x)=f(x),x\in F)$；

(iii) $\sup\{|f_n(x)|:x\in F\}=\mu_n\leqslant(2/3)^n\mu$，

$\sup\{|g_n(x)|:x\in X\}=\mu_n/3 \qquad (\mu_0=\mu)$.

置
$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x),x\in X. \tag{1}$$

由(iii)，$|g_n(x)|\leqslant\mu_n/3\leqslant\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\mu$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n\cdot\mu=\mu$，所以(1)式右端连续函数（由(i)）项级数一致收敛，故 $g(x)$ 在 X 上连续，此外由(ii)

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)=g(x),x\in F$$

故 g 是 f 到 X 上的扩张且 $\sup\{|g(x)|:x\in X\}=\mu$. 证完.

定义 2.4.3 T_1 空间 X 称为**完全正则**(completely reyular)**空间或 Tychonoff 空间**，如果对空间的每一闭集 F，及每一点 $x\notin F$，存在连续函数 $f:X\to[0,1]$，使 $f(x)=0$；$f(x')=1,x'\in F$.

如把上述定义中的条件记作 F_3，则上述定义可改写为：满足 F_3 函数分离性的 T_1 空间称为完全正则空间.

显然，完全正则性蕴含正则性($F_3\Rightarrow T_3$)，读者可自证（同前面

的 $F_4 \Rightarrow T_4$)，但其逆不真. Tychonoff[1929]曾给出正则而不是完全正则的空间，这例比较复杂，这里从略.

在 T_1 空间，显然 $F_4 \Rightarrow F_3$，也就是正规⇒完全正则，但其逆不真. 例2.2.13的Niemytzki半平面 R' 不是正规空间，是正则空间，实际上还是完全正则空间，验证于下.

现在就 x 轴上的点 $p(x,0)$ 及任一闭集 $F \not\ni p$ 验证(其它情况类似)，存在点 p 的开邻域 $U_\varepsilon(p)$ 使 $U_\varepsilon(p) \cap F = \varnothing$，这里 $U_\varepsilon(p) = S'_\varepsilon(p) \cup \{p\}$，$S'_\varepsilon(p)$ 是切 x 轴于点 p 处直径为 ε 的圆的内部，对任何点 $q \in S'_\varepsilon(p)$，通过点 q 切 x 轴于点 p 处的圆的直径记作 $d(q)$，定义 R' 上的函数 g 如下：

$$\begin{cases} g(p) = 0, \\ g(q) = \begin{cases} d(q), & q \in S'_\varepsilon(p), \\ \varepsilon, & q \notin U'_\varepsilon(p), \end{cases} \end{cases}$$

(处于开圆 $S'_\varepsilon(p)$ 内部切于点 p 的圆周上的点取相同的值(这圆的直径))，置 $f = g/\varepsilon$，则得连续函数 $f: R' \to [0,1]$，使

$$f(p) = 0, f(q) = 1, q \in F.$$

对应于 T_2 分离公理的函数分离性 F_2 可以叙述为：对空间 X 的不同的点 x_1, x_2 存在连续函数 $f: X \to [0,1]$，使 $f(x_1) = 0$，$f(x_2) = 1$，满足函数分离性 F_2 的空间称为**函数分离 T_2 空间**. 显然，函数分离 T_2 空间是 T_2 空间，但其逆不真. П. С. Урысон (Urysohn)曾作出不是函数分离 T_2 空间的 T_2 空间，见他的论文[1925].

容易验证Tychonoff空间的子空间是Tychonoff空间.

定理 2.4.4 Tychonoff空间的积空间是Tychonoff空间.

证明 为行文便利起见，对连续映射 f，点 x，开集 $U \ni x$，满足 $f(x) = 0, f(x') = 1, x' \in X - U$ 者称为 f 是关于 (x, U) 的映射. 设 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 分别是关于 $(x, U_1), (x, U_2), \cdots, (x, U_n)$ 的映射，取 $g(x) = \sup\{f_i(x): i = 1, 2, \cdots, n\}$，则 g 是关于 $(x, \bigcap_{i=1}^n U_i)$ 的映射. 为此只要证明对积空间 $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 中任一 (x, U) 存在

关于它的映射 f,这里 U 是积空间次基的元素,$x=\{x_\alpha:\alpha\in A\}$.

对 $x\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$,设 U_α 是 x_α 在 X_α 中的开邻域,由假设 X_α 是 Tychonoff 空间,存在关于 (x_α,U_α) 的映射 f_α,则 $f_\alpha\circ p_\alpha$ 是关于 $(x,p_\alpha^{-1}(U_\alpha))$ 的映射,这里 p_α 是积空间到坐标空间 X_α 上的投影,而 $p_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ 正是积空间的次基的元素.

此外,T_1 空间的积空间是 T_1 空间. 证完.

定理 2.4.5(Tychonoff 浸没定理[1930]) 拓扑空间 X 是 Tychonoff 空间当且仅当 X 同胚于闭区间 I=[0,1] 的积空间的某一子空间.

证明 $I=[0,1]$ 是 Tychonoff 空间,由定理 2.4.4,积空间也是 Tychonoff 空间,从而其子空间也是 Tychonoff 空间.

相反地,设 X 是 Tychonoff 空间,设 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 到 $[0,1]$ 内的连续函数的全体,对指标集 A,构造积空间 $P=\prod_{\alpha\in A}I_\alpha$,这里 $I_\alpha=[0,1]$,$\alpha\in A$,对每一点 $x\in X$,使对应着 P 中的点

$$f(x)=\{f_\alpha(x):\alpha\in A\}$$

得到 X 到 P 内的映射 f,下面证明 f 是同胚映射.

设 x,y 是 X 中不同的两点. 因 X 是 T_1 空间,单点集是闭的,从而存在连续函数 $f_\alpha:X\to[0,1]$ 使 $f_\alpha(x)=0$,$f_\alpha(y)=1$. 所以 $f(x)$,$f(y)$ 的 α 坐标是不同的,从而 $f(x)\neq f(y)$,所以 f 是一一对应的.

为了证明 f 的连续性,对每一点 $x\in X$ 及空间 P 中点 $f(x)$ 的给定邻域 V,由积拓扑的定义,存在 I_{α_i} 中点 $f_{\alpha_i}(x)$ 的邻域 V_{α_i} $(i=1,2,\cdots,k)$ 使

$$V'=\prod_{i=1}^{k}V_{\alpha_i}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}I_\alpha\subset V.$$

由于 f_{α_i} $(i=1,2,\cdots,k)$ 是连续的,存在点 x 的邻域 U 使 $f_{\alpha_i}(U)\subset V_{\alpha_i}$ 对 $i=1,2,\cdots,k$ 成立. 从而

$$f(U)\subset V'\subset V.$$

所以 f 是连续的.

为了证明 f^{-1} 是连续的,设 U 是空间 X 中点 x 的邻域(不失

一般性，U 可作为是开的）. 因 X 是 Tychonoff 空间，存在连续函数 $f_\alpha: X \to [0,1]$，使 $f_\alpha(x)=0, f_\alpha(y)=1, y\in X-U$. 取空间 P 中点 $f(x)$ 的邻域 $V=U_\alpha\times\prod_{\alpha'\neq\alpha}I_{\alpha'}$，这里 $U_\alpha=[0,1)$，如 $x'\notin U$，则 $f_\alpha(x')=1$. 从而 $f(x')\notin V$. 所以 $f(x')\in V$ 蕴含 $x'\in U$，也就是 $p'\in V\cap f(X)\Rightarrow f^{-1}(p')\in U$. 从而

$$f^{-1}(V\cap f(X))\subset U.$$

所以 f^{-1} 是 $f(X)$ 到 X 的连续映射. 到此证明了 f 是 X 到 $f(X)\subset P$ 上的同胚映射.　证完.

§5.　连 通 空 间

定义 2.5.1　拓扑空间 X 称为**连通空间**（connected space），如果 X 不能表示为两个不相交的不空闭集的并，X 的子集 $X'\subset X$ 称为**连通的**（connected），如果子空间 X' 是连通空间.

例 2.5.2　数直线 R 是连通空间，姑设 $R=F\cup G$，F,G 是不交的不空闭集. 存在闭区间 $I=[a,b]$ 使 $I\cap F\neq\varnothing$，$I\cap G\neq\varnothing$，b 属于 F 或 G，现设 $b\in I\cap G$，置 $c=\sup(I\cap F)$，因 $I\cap F$ 是闭集，$C\in I\cap F$. 显然 $c<b$，由 c 的定义，知 $(c,b]\subset I\cap G$. 因 $I\cap G$ 是闭集，$[c,b]\subset I\cap G$，从而 $C\in F\cap G$，这与 F,G 不相交矛盾. 所以 R 是连通空间. R 上所有有理点 r 所成集 Q 不是连通集. 因为对任一无理数 η，集 $F=\{r: r>\eta\}$ 及 $G=\{r: r<\eta\}$ 是不相交的闭集（关于子空间 Q），而 $Q=F\cup G$. 同理，R 上所有无理点所成集也不是连通的.

定理 2.5.3　设 $\{A_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 的一族连通子集，设 $\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma\neq\varnothing$，则 $\bigcup\{A_\gamma:\gamma\in\Gamma\}$ 是连通集.

证明　姑设 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma=F\cup G$，$F,G$ 是子空间 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$ 的不相交的不空闭集. 取点 $x\in\bigcap_{\gamma\in\Gamma}A_\gamma$，则 $x\in F$ 或 $x\in G$. 设 $x\in F$，因 G 不空，存在 $\gamma\in\Gamma$，使 $G\cap A_\gamma\neq\varnothing$. 置 $F\cap A_\gamma=F'$，$G\cap A_\gamma=G'$. F'，G' 是子空间 A_γ 的不空闭集，且 $A_\gamma=F'\cup G'$，$F'\cap G'=\varnothing$，所以 A_γ 不是连通集，这与假设矛盾.　证完.

定理 2.5.4 设 A 是拓扑空间 X 的连通子集且 $A \subset B \subset \bar{A}$，则 B 是连通集.

证明 姑设 $B = F \cup G$，F, G 是子空间 B 的不相交的不空闭集. 注意 F, G 同时又都是子空间 B 的开集，任取 $x \in F$；$x \in \bar{A}$，作为 x 的邻域 F 应有 $F \cap A \neq \varnothing$，同理 $G \cap A \neq \varnothing$，置

$$F' = F \cap A, \quad G' = G \cap A.$$

则 F', G' 是子空间 A 的不相交闭集，且 $A = F' \cup G'$，$F' \cap G' = \varnothing$. 所以 A 不是连通集. 这与假设矛盾. 证完.

定理 2.5.5 设 x 是拓扑空间 X 的点，设 P 是空间 X 的包含点 x 的所有连通子集的并，则 P 是连通闭集.

证明 由定理 2.5.2，P 是连通集. 由定理 2.5.3，$\bar{P}$ 是连通集，$x \in \bar{P}$；由定义 $\bar{P} \subset P$，所以 $\bar{P} = P$，即 P 是闭集. 证完.

定义 2.5.6 上述定理 2.5.4 中的连通集 P 称为空间 X 的**连通区**(或称**成分**)(component)，也就是极大连通子集(不存在真包含它的其他连通子集)，拓扑空间 X 的每一连通区如果都仅由一点组成，则称 X 为**完全不连通**(totally disconnected)**空间**.

易知如果两个连通区相交，则这两个连通区重合，每一拓扑空间 X 可以分解为两两不相交的连通区的并.

定理 2.5.7 连通空间的积空间是连通空间.

证明 设 $X_\alpha(\alpha \in A)$ 是连通空间，设 $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ 可表示为两个不相交闭集 F, G 的并，下证必有一个闭集(F 或 G)是空集，从而 X 是连通的. 设 F 不空，则可取点 $x = \{x_\alpha : \alpha \in A\} \in F$. 下面证明：与点 x 仅有限个坐标不同的点属于 F. 为此只要证明：与点 x 仅有一个坐标不同的点属于 F，然后重复有限回即得. 置

$$P = \{\{x'_\alpha : \alpha \in A\} : x'_\alpha = x_\alpha, \alpha \neq \alpha_0\},$$

则易知 $P \subset X$ 且同胚于空间 X_{α_0}. 所以 P 是连通的. 另外，P 可以表示为两个不相交闭集 $P \cap F$，$P \cap G$ 的并. 由于 $x \in P \cap F$，所以 $P \cap F \neq \varnothing$，因为 P 是连通的. 因此 $P \cap G = \varnothing$. 所以 $P \cap F = P$，$P \subset F$. 到此证明了与点 x 仅有一个坐标不同的点属于 F. 置

$$Q = \{\{y_\alpha : \alpha \in A\} : y_\alpha = x_\alpha \text{ 除有限个 } \alpha \text{ 外}\},$$

则由上所证，$Q \subset F$，从而 $\bar{Q} \subset \bar{F}$. 另一方面，由积拓扑的定义，Q 稠密于 X. 从而 $\bar{F} = X$，因 F 是闭集，$F = X$. 从而 $G = \varnothing$. 所以 X 是连通空间. 证完.

由例 2.5.1 及定理 2.5.6 知，n 维欧氏空间 R^n 是连通空间.

定义 2.5.7 拓扑空间 X 称为**局部连通**的(locally connected)，如果对每一 $x \in X$ 及包含 x 的每一个开集 U，存在开的连通集 V，使 $x \in V \subset U$.

显然，局部连通空间未必是连通的(例如数直线上由两个不相交的开区间的并形成的子空间). 但也存在连通空间而不是局部连通的.

例 2.5.8 考察平面 R^2 上由 $f(x) = \sin \dfrac{1}{x} (0 < x \leqslant 1)$ 的图像及点$(0,0)$形成的子空间，由定理 2.5.3，这子空间是连通的，但包含在点$(0,0)$的任何开邻域中的连通集只有单点集$\{(0,0)\}$，而$\{(0,0)\}$不是这子空间的开集.

定义 2.5.9 拓扑空间 X 称为**弧式连通**(arcwise comected)**空间**，如果对这空间的任意两点 a, b，存在连续映射 $f: [0,1] \to X$，使 $f(0) = a, f(1) = b$.

显然，弧式连通空间是连通空间，但其逆不真，例 2.5.8 的连通空间不是弧式连通空间.

习 题 二

2.1 证明例 2.1.2 中空间 R^+ 到商空间 Y^+ 的商映射是闭映射，验证 Y^+ 是否 T_2 空间？从这些事实可以得出什么结论？

2.2 证明例 2.1.3 中 Niemytzki，半平面 R' 到商空间 Y' 上的商映射是闭映射. 验证 Y' 是否正则空间？从这些事实可以得出什么结论？

2.3 拓扑空间中子集的导集是否总是闭的？试证明在 T_1 空间子集的导集是闭的.

2.4 拓扑空间 X 的子集的导集是闭的当且仅当单点集$\{x\}(x \in X)$的导集是闭的.(杨忠道).

2.5 “拓扑空间的子集的导集是闭的”可以作为介于 T_0, T_1 间的分离公理.试证明它严格地强于 T_0 分离公理,严格地弱于 T_1 分离公理(高国士).

2.6 证明 $y=\sin x(x\in R)$不是 R 到$[-1,1]$上的闭映射.

2.7 拓扑空间 X 是 T_2 空间当且仅当积空间 $X\times X$ 中的对角线 $\Delta=\{(x,x):x\in X\}$是闭集.

2.8 T_2 空间的积空间是 T_2 空间.

2.9 正则空间的积空间是正则空间.

2.10 正规空间的闭子空间、F_σ 子空间是正规的.

2.11 正规空间在连续闭映射 F 的象是正规空间.

2.12 完全正规空间在连续闭映射下的象是完全正规空间.

2.13 设 X 是正规空间,F、G 分别是这空间的闭、开集,且 $G\supset F$,则存在开的 F_σ 集 W 使 $F\subset W\subset G$.

2.14 设 W 是正规空间 X 的开 F_σ 集,则存在 X 到$[0,1]$上的映射 f 使 $W=\{x:x\in X,f(x)>0\}$.

2.15 设 W 是正规空间 X 的开 F_σ 集,则 $W=\bigcup_{i=1}^{\infty}F_i$,诸 F_i 是闭集且满足 $F_i\subset F^\circ{}_{i+1}\subset F_{i+1}(i=1,2,\cdots)$.

2.16 可数个满足第一(第二)可数公理的空间的积空间满足第一(第二)可数公理.

2.17 Lindelöf 空间的闭子空间是 Lindelöf 空间.

2.18 可分空间的开子空间是可分空间.

2.19 设拓扑空间 X 具有一个可数开基,则 X 的每一个开基总包含着一个可数子族也是空间 X 的开基.

2.20 拓扑空间称为满足**可数链条件**(countable chaincondition)简记为 C.C.C.,如果这空间的每一个互不相交的开集族是可数的.可分空间满足可数链条件,但是其逆不真(考察一不可数集,规定空集及可数集的补集为开集).

2.21 Lindelöf 空间,可分空间在连续映射下的象分别是 Lindelöf 空间,可分空间.

2.22 连通空间在连续映射下的象是连通空间.

2.23 设 X 是连通空间,Y 是连通子集且 $X-Y=A\cup B$,这里 A 与 B 是可分离的,则 $A\cup Y$ 是连通集.

2.24 设 E 是欧氏平面 R^2 内具有下列性质的点所成集:它的两个坐标

中至少有一个无理数,则 E 是 R^2 的连通子空间.

2.25　设拓扑空间 X 是有限个正规闭子空间的并,则 X 是正规空间.

2.26　设 f 是拓扑空间 X 到 T_2 空间 Y 内的连续映射,则集 $\{(x,y):x\in X, y\in Y, f(x)=y\}$ 是积空间 $X\times Y$ 的闭集.

2.27　设 f 是正规空间 X 的闭子集 F 到 I^n ($I=[0,1]$) 内的连续映射,则 f 可以连续地扩张到 X 上.

2.28　拓扑空间 X 的集族称为**离散的**(discrete),如果对每一 $x\in X$ 存在邻域 $U(x)$ 至多和集族中一个元素相交,设 $\{F_n\}$ 是正规空间 X 的可数离散闭集族,则存在可数互不相交的开集族 $\{G_n\}$ 使 $G_n\supset F_n$ ($n=1,2,\cdots$).

2.29　设 $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是正规空间 X 的离散闭集族,$\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是互不相交的开集族且对每一 $\gamma\in\Gamma$, $U_\gamma\supset F_\gamma$,则存在离散开集族 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 使对每一 $\gamma\in\Gamma$,有 $F_\gamma\subset V_\gamma\subset\bar{V}\subset U_\gamma$ (Dowker).并利用这一结果改进上一题的结果.

2.30　空间 X 到空间 Y 的映射 f 是连续的,当且仅当对每一 $x\in X$ 及 X 中任一收敛于点 x 的网 $\varphi(\Delta;>)$,网 $f\circ\varphi(\Delta;>)$ 收敛于 Y 中的点 $f(x)$.

2.31　积空间 $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 中的网 $\varphi(\Delta;>)$ 收敛于点 $x=\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 当且仅当 $\varphi(\Delta;>)$ 在坐标空间 X_γ ($\gamma\in\Gamma$) 上的投影 $p_\gamma\circ\varphi(\Delta;>)$ 收敛于 X_γ 中的点 x_γ.

第三章 紧 空 间

紧空间是拓扑空间中最重要的空间类之一.它具有相应于数直线 R 上闭区间所具有的 Heine-Borel 性质,也就是每一开覆盖具有有限子覆盖.紧空间类包含着所有闭区间类以及 n 维欧氏空间 R^n 中的有界闭子集类.分析学中有许多重要性质与紧性有关.

§1. 紧 空 间

定义 3.1.1 拓扑空间 X 称为**紧空间**(compact space 或 bicompact space),如果 X 的每一开覆盖具有有限子覆盖.

显然,紧空间是 Lindelöf 空间(定义 2.3.1),前面例 2.3.6 中的空间$[0,\omega_1]$是紧空间,数直线上的闭区间是紧空间,数直线本身是 Lindelöf 空间不是紧空间.

回忆(定义 1.4.1 后):集 X 的子集族 $\mathscr{F}=\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$称为具有有限交性质,如果$\mathscr{F}$的任何有限子族的交不空,也就是设 $\Gamma'\subset\Gamma$ 是任何有限子族,$\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}F_\gamma\neq\varnothing$.

定理 3.1.2 拓扑空间 X 是紧空间当且仅当每一具有有限交性质的闭集族的交不空.

证明 按"X 的每一开覆盖具有有限子覆盖"等价于"如果 X 的开集族的任何有限子族不能覆盖 X,则这开集族不能覆盖 X",取开集族中开集的补集,由 De Morgan 公式知后一论断又等价于"X 中具有有限交性质的闭集族的交不空",故得证.证完.

作为上述定理的推论有

定理 3.1.3 紧空间的闭集(闭子空间)是紧的.

下面是关于紧子空间的一些定理.由子空间的定义,立刻得到下述定理.

定理 3.1.4 拓扑空间 X 的子集 A 是紧的当且仅当由 X 的开集组成的每一开集族 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 使 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma}U_\gamma\supset A$，存在有限子族 $\Gamma'\subset\Gamma$，使 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma'}U_\gamma\subset A$.

由定理 3.1.3 及定理 3.1.4，可得

推论 3.1.5 设 $F_1,F_2,\cdots,F_k$ 是拓扑空间 X 的闭集，$F=\bigcup_{i=1}^k F_i$ 是紧集当且仅当每一 $F_i(i=1,2,\cdots,k)$ 是紧集.

在定理 3.1.4 中，置 $U=X-A$，$F_\gamma=X-U_\gamma(\gamma\in\Gamma)$. 由 De-Morgan 公式，定理 3.1.4 中的两个包含式分别转换为 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma$ 及 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}F_\gamma$. 如设 A 为闭集，则 U 为开集，由定理 3.1.4 中的 A 是紧集，故应设 X 为紧空间，故得下述定理.

定理 3.1.6 设 X 是紧空间，$\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 中的闭集族，U 是开集. 如果 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma$，则存在有限子族 $\Gamma'\subset\Gamma$，使 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}F_\gamma$.

推论 3.1.7 设 $\{F_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是拓扑空间 X 中的闭集族，其中至少有一个闭集(例如 F_{γ_0})是紧的，U 是开集. 如果 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma}F_\gamma$，则存在有限子族 $\Gamma'\subset\Gamma$ 使 $U\supset\bigcap_{\gamma\in\Gamma'}F_\gamma$.

证明 以 F_{γ_0} 作为定理 3.1.5 中的 X，$F_{\gamma_0}\cap F_\gamma(\gamma\in\Gamma)$ 作为 F_γ 即得证.

定理 3.1.8 设 A 是正则空间 X 的紧子空间，闭集 $B\subset X-A$，则存在开集 U,V 使 $U\supset A$，$V\supset B$ 且 $U\cap V=\varnothing$.

证明 由 X 的正则性，对每一 $x\in A$ 存在开集 U_x 及 V_x 使 $x\in U_x$，$B\subset V_x$ 且 $U_x\cap V_x=\varnothing$.

由于 $A\subset\bigcup_{x\in A}U_x$，由定理 3.1.4，存在有限个 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$，使 $A\subset\bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$. 置 $U=\bigcup_{i=1}^k U_{x_i}$，$V=\bigcap_{i=1}^k V_i$，容易验证 U,V 满足定理的要求. 证完.

推论 3.1.9 设 A 是 T_2 空间 X 的紧子集，点 $x\in X-A$，则存在开集 U,V，使 $U\supset A$，$x\in V$ 且 $U\cap V=\varnothing$.

证明 这是定理 3.1.8 中 B 是单点集 $\{x\}$ 的情况，用同样的证法，空间 X 是 T_2 已足够. 证完.

推论 3.1.10 设 X 是 T_2 空间，A,B 是互不相交的紧子集．则存在开集 U,V 使 $U\supset A$，$V\supset B$ 且 $U\cap V=\varnothing$．

证明 这是定理 3.1.8 中 B 是紧子集的情况，可由推论 3.1.9 得结果后，再用定理 3.1.8 的证法即得．证完．

由定理 3.1.3 及上述推论 3.1.10 即得：

定理 3.1.11 T_2 紧空间是正规空间．

由上述推论 3.1.9 即得

定理 3.1.12 T_2 空间的紧集是闭的．

相应于定理 3.1.6 的函数分离性的情况，有

定理 3.1.13 设 A 是 Tychonoff 空间 X 的紧子空间，闭集 $B\subset X-A$．则存在 X 到$[0,1]$上的连续函数 f 使 $f(x)=0, x\in A$；$f(x)=1, x\in B$．

证明 对每一点 $x\in A$，存在 X 到$[0,1]$上的连续函数 f_x 使 $f_x(x)=0$；$f_x(x')=1, x'\in B$．从而 $A\subset\bigcup_{x\in A}f_x^{-1}([0,1/2))$．由定理 3.1.4，存在有限个点 $x_1,\cdots,x_k\in A$，使 $A\subset\bigcup_{i=1}^{k}f_{x_i}^{-1}([0,1/2))$，置

$$g(x) = \min(f_{x_1}(x),f_{x_2}(x),\cdots,f_{x_k}(x)),$$

则 $g(x)$是 X 到$[0,1]$上的连续函数，且

$$A \subset g^{-1}([0,1/2)),g(x) = 1,x \in B.$$

置 $f(x)=2\max(g(x)-1/2,0)$，容易验证 $f(x)$满足定理要求．证完．

下面是关于紧空间的映射方面的定理．

定理 3.1.14 紧空间在连续映射下的象是紧空间．

证明 设 f 是紧空间X 到空间 Y 上的连续映射，$\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$是空间$Y$ 的任一开覆盖，则$\{f^{-1}(U_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$是空间$X$ 的开覆盖．因 X 紧，存在有限子覆盖$\{f^{-1}(U_{\gamma_i})\}\ i=1,2,\cdots,k$，覆盖空间 X，从而$\{U_{\gamma_i}\}\ i=1,2,\cdots,k$ 是$\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$的有限子覆盖，覆盖空间 Y，故 Y 是紧空间．证完．

定理 3.1.15 紧空间到 T_2 空间上的连续映射是闭映射．

证明 设 f 是紧空间 X 到 T_2 空间 Y 上的连续映射, F 是空间 X 的任一闭集. 由定理 3.1.3, F 是紧集. 由于连续函数限制在它的定义域的任一子空间上时仍是连续的, 从而由定理 3.1.14, 知 $f(F)$ 是空间 Y 的紧子集. 因 Y 是 T_2 的, 由定理 3.1.12, $f(F)$ 是闭集, 所以 f 是闭映射. 证完.

推论 3.1.16 紧空间到 T_2 空间上的一一对应的连续映射是同胚映射.

推论 3.1.17 在集 X 上给以拓扑 $\mathscr{T}_1$ 及 $\mathscr{T}_2$ 且 $\mathscr{T}_1 \supset \mathscr{T}_2$, 设 $(X, \mathscr{T}_1)$ 是 T_2 紧空间, $(X, \mathscr{T}_2)$ 是 T_2 空间, 则 $\mathscr{T}_1 = \mathscr{T}_2$.

下面用滤子刻画紧空间.

定理 3.1.18 拓扑空间 X 是紧空间当且仅当满足下列条件之一:

(i) X 中的每一个滤子具有聚点,

(ii) X 中的每一个极大滤子是收敛的.

证明 紧性 $\Rightarrow$ (i), 设 $\mathscr{F}$ 是紧空间 X 中的滤子, 则 $\overline{\mathscr{F}} = \{\bar{A} : A \in \mathscr{F}\}$ 是具有有限交性质的闭集族, 由定理 3.1.2, 这闭集族的交不空, 也就是存在点 x 属于每一个 $\bar{A}$ $(A \in \mathscr{F})$, 由定义 1.4.5, x 是滤子 $\mathscr{F}$ 的聚点.

(i) $\Rightarrow$ (ii) 由 (i), X 中每一极大滤子具有聚点 x, 由定理 1.4.6 知, 这极大滤子收敛于点 x.

(ii) $\Rightarrow$ 紧性, 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, 但不具有有限子覆盖, 则

$$\mathscr{F}' = \{X - U : U \in \mathscr{U}\}$$

具有有限交性质. 由定理 1.4.2, 存在极大滤子 $\mathscr{F} \supset \mathscr{F}'$, 由 (ii) $\mathscr{F}$ 收敛. 从而 $\mathscr{F}$ 具有聚点 x, 也就是点 x 属于 $\mathscr{F}$ 中每一个元素的闭包. 当然对 $\mathscr{F}'$ 中每一个元素也成立, 所以对每一个 $U \in \mathscr{U}$, 有

$$x \in \overline{X - U} = X - U.$$

这与 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖矛盾(利用 De Morgan 公式), 所以 $\mathscr{U}$ 具有有限子覆盖. 故 X 是紧空间. 证完.

定理 3.1.19 相应于网的论述留给读者论证(参见习题 3.8).

下面是关于紧空间的拓扑势(定义 2.3.1)的讨论.

定义 3.1.20 拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{N}$ 称为 X 的**网络**(network),如果对每一 $x\in X$ 及包含 x 的邻域 U,存在 $\mathscr{N}$ 中的元素 N,使 $x\in N\subset U$,空间 X 的网络的势的最小者称为这空间的**网络势**(network weight),表示为 $n(X)$.

拓扑空间 X 的任一开基显然是网络,另外 X 的每一单点集组成的集族 $\{\{x\}:x\in X\}$ 也是网络.因此,网络势 $n(X)$ 不比 X 的拓扑势 $w(X)$ 及 X 的势 $|X|$ 大,即 $n(X)\leqslant w(X)$ 及 $n(X)\leqslant |X|$,由下例 3.1.22,知在一般情况 $n(X)=w(X)$ 不能成立.

定义 3.1.21 设 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是一族不相交的拓扑空间,也就是 $\gamma\neq\gamma'$ 时,$X_\gamma\cap X_{\gamma'}=\varnothing$.在集 $X=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$ 上规定 $U\subset X$ 是 X 中的开集,如果对每一 $\gamma\in\Gamma$,$U\cap X_\gamma$ 是 X_γ 中的开集.这样规定的开集族显然满足(O1)—(O3),形成 X 上的拓扑.这一拓扑空间称为空间族 $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 的**拓扑和**(topological sum),记作 $\bigoplus_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$.

例 3.1.22 设 $I_i(i=1,2,\cdots)$ 为单位闭区间 $I[0,1]$ 的拷贝,对于 $x\in[0,1]$,设 x_i 是 I_i 的对应点.置 $X=\bigoplus_{i=1}^{\infty}I_i$ 为诸 I_i 的拓扑和,引入等价关系 R:对 $x\in(0,1]$,各 $x_i\in I_i$ 仅等价于其本身;对于 0,0_i 等价于 0_j,也就是把所有的 0_i 叠合为一点,记这一点为 0^*,这样得到的商空间记作 $X/R=K$,相应的商映射记作 f,由商拓扑的定义,K 中点 0^* 的邻域应是 $\bigcup_{i=1}^{\infty}f([0_i,x_i))$,这里每一 i $(i=1,2,\cdots)$,x_i 可以取任意小的正数,所以 K 中点 0^* 的邻域基的势至少是 $\aleph_0^{\aleph_0}=C$,从而 $w(K)\geqslant c$.另一方面,$K-\{0^*\}$ 是可数个不相交的半开区间 $(0_i,I_i]$ 的并,故具有可数基 $\mathscr{B}'$,从而 $\mathscr{B}=\mathscr{B}'\cup\{0^*\}$ 是空间 K 的可数网络,所以 $n(X)\leqslant\aleph_0$(实际上等号成立).故 $n(K)<w(K)$,注意:空间 K 不是紧的.

定理 3.1.23 设 X 是 T_2 紧空间,则 $n(X)=w(X)$.

证明 这里只要证明 $n(X)\geqslant w(X)$.设 $n(X)=m$,当 m 是有限数时.因 X 是 T_1 空间,可知 $|X|\leqslant m$,且 X 是离散空间,故等式成立.

设 $m \geqslant \aleph_0$. 网络 $\mathscr{N}$的势是 m. 考察 $\mathscr{N}$ 中满足下列条件(1)的一对元素 N_1, N_2:

存在 $U_1, U_2 \in \mathscr{T}_1$ 使 $U_1 \supset N_1, U_2 \supset N_2$ 且 $U_1 \cap U_2 = \varnothing$(1)

这里 $\mathscr{T}_1$ 是 X 上的拓扑,对满足(1)的网络元素对(N_1, N_2),取定 $\mathscr{T}_1$ 中的元素对(U_1, U_2)与之对应,$\mathscr{T}_1$ 中具有上述性质的 U 的全体记作 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 中元素的有限交所成族记作 $\mathscr{B}_0$,下面证明 $\mathscr{B}_0$ 满足开基条件$(B1)$—$(B3)$.

$\mathscr{B}_0$ 满足$(B1)$,$(B2)$是显然的,设 $x \in X$,存在 $U \in \mathscr{T}_1$ 使 $x \in U$,由正则性,存在开集 V 使$x \in V \subset \bar{V} \subset U$,从而存在 $N_1 \in \mathscr{N}$使 $x \in N_1 \subset V$, $X - \bar{V}$ 是开集. 任取 $x' \in X - \bar{V}$,存在 $N_2 \in \mathscr{N}$,使 $x' \in N_2 \subset X - \bar{V}$,所以$(N_1, N_2)$是满足(1)的网络元素对,从而有 $\mathscr{T}_1$ 中的元素对(U_1, U_2)与之对应,从而 $x \in U_1 \in \mathscr{B} \subset \mathscr{B}_0$. 所以 $\mathscr{B}_0$ 满足$(B3)$,$\mathscr{B}_0$ 可以作为某一拓扑的开基. 设这一由 $\mathscr{B}_0$ 生成的拓扑为 $\mathscr{T}_2$,则 $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{T}_1$.

现证空间$(X, \mathscr{T}_2)$是 T_2 空间,对 $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$,因$(X, \mathscr{T}_1)$是 T_2 空间,存在 $U', U'' \in \mathscr{T}_1$ 使 $x_1 \in U', x_2 \in U''$,且 $U' \cap U'' = \varnothing$. 因 $\mathscr{N}$是网络,存在 $N_1, N_2 \in \mathscr{N}$使 $x_1 \in N_1 \subset U', x_2 \in N_2 \subset U''$. 所以$(N_1, N_2)$是满足(1)的网络元素对,从而存在$(U_1, U_2)$与之对应,$U_1, U_2 \in \mathscr{T}_2$. 所以$(X, \mathscr{T}_2)$是 T_2 空间,由定理 3.1.15 的推论 3.1.17,$\mathscr{T}_2 = \mathscr{T}_1$.

显然,$|\mathscr{B}_0| \leqslant m$,到此证明了 $w(X) \leqslant n(X)$. 证完.

推论 3.1.24 T_2 紧空间的拓扑势不大于这空间的势,即 $w(X) \leqslant |X|$.

推论 3.1.25 设 f 是拓扑空间 X 到 T_2 紧空间 Y 上的连续映射,则 $w(Y) \leqslant w(X)$.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的开基,由 f 的连续性,知$\{f(U)\}$, $U \in \mathscr{B}$,是空间 X 的网络,由定理 3.1.23 得证.

例 3.1.26 考察平面 R^2 内的两个闭区间 $C_i = \{(x, y): y = i, 0 \leqslant x \leqslant 1\}, i = 1, 2$. 记它们的和为 $Z = c_1 \cup c_2$,规定每一点 $z \in Z$ 的邻域基 $\mathscr{B}(z)$如下:

$\mathscr{B}(z)=\{\{z\}\}, \qquad z\in c_2,$

$\mathscr{B}(z)=\{U_k(z)\}_{k=1}^{\infty};$

$U_k(z)=\{(x',y'):0<|x-x'|<1/k\}\cup\{z\}, z=(x,1)\in c_1.$

容易验证$\{\mathscr{B}(z)\}_{z\in Z}$满足($NB1$)—($NB4$)(定理1.2.5),且$Z$是$T_2$空间.

子空间c_2是具有势C的离散空间,它开且稠于空间Z,子空间c_1同胚于R上通常拓扑的闭区间,它闭于空间Z.

读者可以自己证明这空间Z是紧空间(习题3.9).此外,易知这空间Z满足第一可数公理,不满足第二可数公理,也不是可分空间.

如在Z中引入等价关系R:C_2中的每一点等价于本身,c_1中的点两两等价,得到商空间Z/R,原来c_1中的所有点使等同于Z/R中的点z^*,相应的商映射当然连续.从而Z/R是紧的(定理3.1.14).此外,易知Z/R是T_2的,点z^*的邻域基的势不是可数的.这里说明推论3.1.25关于拓扑势的论述对于邻域基的势并不成立.

例3.1.27 这里将给出一个具有可数个点的空间(简称可数空间)X,它的每一点的邻域基的势都不是可数的,这例说明推论3.1.24关于T_2紧空间的结论在一般情况下不能成立.如果在上述可数集X上另外给以离散拓扑得到空间X',考察由X'到X上的恒等映射,通过这映射拓扑势增大了,这说明推论3.1.25中的条件T_2紧是重要的.

设R是数直线,N是自然数集,也是R中的离散子空间,$|R|=c$,$N_t(t\in R)$是N的拷贝,N_t是可分空间,c个可分空间的积是可分空间(见推论2.3.8后的叙述).置$N^c=\prod_{t\in R}N_t$,则存在可数子集X稠密于N^c.下面证明这可数空间X的每一点的邻域基的势都不是可数的.为此,只要证对任一$x\in X$,x的任一可数邻域族$\{V_i\}_{i\in N}$,存在x的邻域U使对每一$i\in N$有

$$V_i \cap (X - U) \neq \varnothing. \tag{1}$$

设 $x = \{x_t\}_{t\in R} \in X$，$\{V_i\}_{i\in N}$是点 x 的邻域族，由积拓扑的定义，对每一 $i\in N$，存在有限集 $R_i \subset R$ 使

$$x \in X \cap \prod_{t\in R} W_t^i \subset V_i, \tag{2}$$

这里，当 $t\in R_i$ 时，W_t^i 是坐标空间 N_t 中包含点 x_t 的开集(可以取作单点集 $\{x_t\}$，因 N_t 离散)；$t\in R - R_i$ 时，$W_t^i = N_t$.

因 R 不可数，存在 $t_0 \in R - \bigcup_{i\in N} R_i$，开集 $U = p_{t_0}^{-1}(x_{t_0})$是点 x 在 N^t 中的邻域，因 N_{t_0} 中的单点集是闭的，U 又是 N^t 中的闭集，从而

$$\prod_{t\in R} W_t^i - U (i\in N)$$

是 N^t 中的开集. 易知这开集不空，因 X 稠密于空间 N^t，所以这开集与 X 的交不空，即 $\prod_{t\in R} W_t^i \cap (X - U) \neq \varnothing$. (因 $\prod_{t\in R} W_t^i - U = \prod_{t\in R} W_t^i \cap (N^t - U)$). 由(2)式，即得(1)，证完.

§2. Tychonoff 定理

Tychonoff 定理(定理 3.2.1)是一般拓扑学中最重要的定理之一，这定理显示了前面(第二章 §1)所定义的 Tychonoff 积拓扑的合适与美好，以及紧空间的良好性质(可与本章 §5 中的空间比较).

Tychonoff 定理的证明不可避免地要用选择公理(axiom of choice)，下面证明中用的 Tukey 引理是选择公理的一种形式，这一证明属于 N. Boucbaki[1951].

集族 $\mathscr{A}$ 称为**有限特征的**(finite character)如果 A 是 $\mathscr{A}$ 的元素当且仅当 A 的每一有限子集是 $\mathscr{A}$ 的元素.

Tukey 引理 对每一有限特征族，存在极大元，也就是说，存在 $A_0 \in \mathscr{A}$ 使对任何 $A_1 \in \mathscr{A}$，$A_1 \supset A_0$，有 $A_1 = A_0$.

定理 3.2.1 (Tychonoff[1930]) 任意个紧空间的积空间是紧空间.

证明 设积空间 $X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$，每一 $X_\gamma(\gamma\in\Gamma)$是紧空间，设 $\mathscr{F}$是空间 X 的具有有限交性质的闭子集族，所有这种具有有限交性质的子集族所成的类是有限特征的．由 Tukey 引理，存在极大元 $\mathscr{F}_0\supset\mathscr{F}$. 为了证明 $\mathscr{F}$中的元素的交不空，只要证明，存在 $x\in X=\prod_{\gamma\in\Gamma}X_\gamma$，使对每一 $A\in\mathscr{F}_0$，$x\in\bar{A}$．

由 $\mathscr{F}_0$ 的极大性，有

$$A_1,A_2,\cdots,A_k\in\mathscr{F}_0,\text{则 }\bigcap_{n=1}^{k}A_n\in\mathscr{F}_0, \tag{1}$$

$$A_0\subset X,A_0\cap A\neq\varnothing\text{ 对每一 }A\in\mathscr{F}_0\text{ 成立，则 }A_0\in\mathscr{F}_0 \tag{2}$$

因 $\mathscr{F}_0$ 具有有限交性质，空间 X_γ 的闭子集族 $\{\overline{p_\gamma(A)}\}_{A\in\mathscr{F}_0}$也具有有限交性质，对每一 $\gamma\in\Gamma$ 成立．因 $X_\gamma(\gamma\in\Gamma)$是紧空间，对每一 $\gamma\in\Gamma$，存在点 $x_\gamma\in X_\gamma$，使 $x_\gamma\in\bigcap_{A\in\mathscr{F}_0}\overline{p_\gamma(A)}$．设 w_γ 是X_γ 中点x_γ的任一邻域，则 $w_\gamma\cap p_\gamma(A)\neq\varnothing$对每一 $A\in\mathscr{F}_0$ 成立．也就是 $p_\gamma^{-1}(W_\gamma)\cap A\neq\varnothing$，对每一 $A\in\mathscr{F}_0$ 成立，由(2)，$p_\gamma^{-1}(w_\gamma)\in\mathscr{F}_0$，这对每一 $\gamma\in\Gamma$ 成立．由(1)对任何有限集 $\Gamma_0\subset\Gamma$，$\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0}p_\gamma^{-1}(w_\gamma)\in\mathscr{F}_0$．从而$\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0}p_\gamma^{-1}(w_\gamma)$与每一 $A\in\mathscr{F}_0$ 相交．由于$\{\bigcap_{\gamma\in\Gamma_0}p_\gamma^{-1}(w_\gamma):\Gamma_0$ 是 Γ 的有限子集$\}$构成点 $x=\{x_0\}$的邻域基(积拓扑定义)，所以点 $x=\{x_\gamma\}$的任何邻域与每一 $A\in\mathscr{F}_0$ 的交不空，是即对每一 $A\in\mathscr{F}_0$，$x\in\bar{A}$．证完．

由于 Tychonoff 定理的各种证明中都用了选择公理，人们猜测可能 Tychonoff 定理等价于选择公理．J. L. Kelley[1950]证明了 Tychonoff 定理蕴涵选择公理*)，证实了上述猜测．

数直线 R 上的闭区间是 T_2 紧空间，由定理 3.2.1，$I=[0,1]$的积空间是 T_2 紧的；另一方面，T_2 紧空间是正规的(定理 3.1.11)，从而是 Tychonoff 空间且具有遗传性．所以第二章的 Tychonoff 浸没定理(定理 2.4.5)可以改写为如下形式：

---

*)L. E. Ward[1962]进一步证明了弱 Tychonoff 定理(任意个同胚的紧空间的积空间是紧空间)蕴涵选择公理．

定理 3.2.2 拓扑空间 X 是 Tychonoff 空间当且仅当 X 同胚于 T_2 紧空间的某一子空间.

定义 3.2.3 欧几里得空间 R^n 的子集 A 称为**有界的**(bounded),如果存在闭区间 $J=[a,b]\subset R$ 使 $A\subset J^n\subset R^n$,实值连续函数 $f:X\to R$ 称为**有界的**(bounded)如果 $f(X)$是 R 中的有界集.

定理 3.2.4 欧几里得空间 R^n 中的子集 A 是紧的当且仅当 A 是有界闭子集.

证明 设集 A 是 R^n 的紧子集,因 R^n 是 T_2 空间,集 A 是闭的(定理 3.1.12).由于 $A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i^n$,这里 $K_i=(-i,i)$且对 $i<j$ 有 $K_i^n\subset K_j^n$,而 A 是紧的.故存在自然数 i_0 使 $A\subset K_{i_0}^n$,令 $J=[-i_0,i_0]$,则 $A\subset J^n$,所以集 A 是有界的.

相反地,设 A 是 R^n 中的有界闭子集,由有界性,$A\subset J^n$,这里 $J=[a,b]$.由定理 3.2.1,J^n 是紧集,A 也是紧子空间 J^n 的闭集,故 A 是紧的(定理 3.1.3).证完.

由于紧空间在连续映射下的象是紧空间(定理 3.1.14),故得如下推论.

推论 3.2.5 紧空间上的实值连续函数有界且达到最大值和最小值.

§3. 完 备 映 射

映射是近代一般拓扑学中的有效工具.前面(第一章§6)讲过连续映射、开映射,本书以后所讲映射都至少是连续的.这里我们介绍一种特殊的连续闭映射——完备映射.

在定义完备映射之前,先证明下述定理.

定理 3.3.1 设 X 是紧空间,Y 是拓扑空间,则积空间 $X\times Y$ 到 Y 上的投影 p 是闭映射.

证明 设 F 是积空间 $X\times Y$ 中的闭集,$p(F)$是 F 在 Y 上的投影,设 $y_0\notin p(F)$,因 F 闭于 $X\times Y$.故对每一点$(x,y_0)\notin F$,$(x$

$\in X$). 存在点 x 在 X 中的开邻域 U_x 及点 y_0 在 Y 中的开邻域 V_{xy_0}，使 $(U_x \times V_{xy_0}) \cap F = \varnothing$. $\{U_x\}_{x \in X}$ 形成 X 的开覆盖，因 X 紧，存在有限子覆盖 $\{U_{x_1}, U_{x_2}, \cdots, U_{x_n}\}$. 置 $V_{y_0} = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i y_0}$，则 V_{y_0} 是 y_0 的开邻域，使 $(X \times V_{y_0}) \cap F = \varnothing$. 所以 $V_{y_0} \cap p(F) = \varnothing$，$p(F)$ 是空间 Y 的闭集. 证完.

在上述定理中可以适当地减弱对 X 的假设条件，同时对空间 Y 加以限制而得到同样的结论(见习题 3.16).

定义 3.3.2 拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的连续闭映射 $f: X \to Y$ 称为**完备映射**(perfect mapping)，如果对每一 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 是空间 X 的紧集.

上面定理 3.3.1 中的投影映射是完备映射，因为对每一 $y \in Y$，$f^{-1}(y) = X \times \{y\}$ 是同胚于紧空间 X 的积空间 $X \times Y$ 的紧子空间.

定理 3.3.3 设 $f: X \to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射. 如果 X 是 T_2、正则或满足第二可数公理，则空间 Y 也分别是 T_2、正则或满足第二可数公理.

证明 设 X 是 T_2 空间，设 $y_1, y_2 \in Y (y_1 \neq y_2)$，则 $f^{-1}(y_1) \cap f^{-1}(y_2) = \varnothing$. 因 f 是完备映射，$f^{-1}(y_1)$，$f^{-1}(y_2)$ 都是紧子集，由推论 3.1.10，存在开集 U, V 使得

$$U \supset f^{-1}(y_1), V \supset f^{-1}(y_2), \text{且 } U \cap V = \varnothing.$$

因 f 是连续闭映射，由定理 1.5.8，存在开集 U', V'，使

$$U \supset U' \supset f^{-1}(y_1), V \supset V' \supset f^{-1}(y_2),$$

$$U' = f^{-1}(f(U')), V' = f^{-1}(f(V')),$$

且 $f(U')$，$f(V')$ 都是空间 Y 中的开集. 从而容易验证 $f(U')$，$f(V')$ 是分别包含 y_1, y_2 的互不相交的开集.

设 X 是正则空间，F 是 Y 中的闭集，$y \notin F$，$f^{-1}(y) \cap f^{-1}(F) = \varnothing$，$f^{-1}(y)$ 紧，闭集 $f^{-1}(F) \subset X - f^{-1}(y)$，由定理 3.1.8，存在开集 U, V 使 $U \supset f^{-1}(y)$，$V \supset f^{-1}(F)$，且 $U \cap V = \varnothing$，和上面的证明一样，存在相应的开集 U', V' 使 $f(U')$，$f(V')$

是分别包含 y,F 的互不相交的开集.

设 X 满足第二可数公理,设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基,设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{B}$ 中有限个元素的并集组成的集族,则 $\mathscr{U}$ 仍是 X 的可数基,对每一 $U\in\mathscr{U}$,置

$$U' = \bigcup \{f^{-1}(y): f^{-1}(y) \subset U\}, \tag{1}$$
$$\mathscr{V} = \{f(U'): U \in \mathscr{U}\}.$$

因 f 是连续闭映射,容易验证 $f(U')$是 Y 中的开集,下面证明 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的基.

对 $y\in Y$,开集 $V \ni y$, $f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V)$. 因 $f^{-1}(y)$紧,存在 $U\in\mathscr{U}$,使 $f^{-1}(y)\subset U\subset f^{-1}(V)$. 由(1), $f^{-1}(y)\subset U'\subset U$,故 $y\in f(U')\subset V$,而 $f(U')\in\mathscr{V}$. 证完.

回忆第二章定理 2.1.1 后引入的空间的分解概念,下面用分解空间的形式叙述上述定理.

设 $\mathscr{D}$ 是空间 X 的一个分解,f 是 X 到 $\mathscr{D}$ 上的自然映射,给 $\mathscr{D}$ 以商拓扑,得到**分解空间**(decomposition space),由分解的上半连续定义(定义 2.1.9)及定理 2.1.10,上述定理 3.3.3 可叙述为如下形式.

定理 3.3.4 设拓扑空间 X 的分解 $\mathscr{D}$ 是上半连续的,且 $\mathscr{D}$ 中每一元素是紧集. 如果 X 是 T_2、正则或满足第二可数公理,则分解空间 $\mathscr{D}$ 也分别是 T_2、正则或满足第二可数公理.

下面叙述关于完备映射的逆象的结果.

定理 3.3.5 设 $f: X\to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射. 如果 Y 是紧空间或 Lindelöf 空间,则 X 也分别是紧空间或 Lindelöf 空间.

证明 这里证明 Lindelöf 空间情况. 紧空间情况,证法相同.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ 是 X 的任一开覆盖,对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$为 $\mathscr{U}$ 中有限个 U_α 所覆盖,记这有限个开集 U_α 的并为 U_y,则 $f^{-1}(y)\subset U_y$. 由定理 1.5.8,存在开集 U'_y,使

$$f^{-1}(y) \subset U'_y \subset U_y, U'_y = f^{-1}(f(U'_y)),$$

且 $f(U'_y)$是 Y 中的开集.

$\{f(U_y')\}_{y\in Y}$覆盖 Y,因 Y 是 Lindelöf 空间,存在可数子覆盖 $\{f(U_{y_i}')\}_{i\in N}$(这里 N 是自然数集),从而$\{U_{y_i}'\}_{i\in N}$是X 的可数开覆盖,每一 $U_{y_i}'\subset U_{y_i}(i\in N)$,$U_{y_i}$是 $\mathscr{U}$ 中某有限个 U_α 的并.这些 U_α 的全体(对应着 $i\in N$)形成 $\mathscr{U}$ 的可数子覆盖,所以 X 是 Lindelöf 空间.证完.

定理 3.3.6 Lindelöf 空间与紧空间的积空间是 Lindelöf 空间.

证明 定理 3.3.1 中的投影映射是完备映射,由定理 3.3.5 即得.证完.

§4. 局部紧空间与 k 空间

数直线 R 不是紧空间,R 中的任何闭区间是紧子空间,这一性质在分析学中起很大作用,R 的开基可以取作$\{(a,b)\}$(a,b 是任意实数).由于每一开区间总包含着某一闭区间,所以 R 的基也可取作$\{[a,b]\}$(具有闭邻域基是正则性的特征),这基的元素都是闭紧集,所以 R 中的每一点都具有紧的邻域,也都具有闭的紧邻域基.

定义 3.4.1 拓扑空间 X 称为**局部紧的**(locally compact),如果每一点 $x\in X$ 具有一个紧的邻域.

紧空间当然是局部紧空间,局部紧性是紧性的一种推广,这种推广的方法称为**局部化**(localization).

数直线 R 是局部紧空间,每一离散空间都是局部紧空间.

由于闭集与紧集的交集是闭于这紧集的,所以这交集是紧集(定理 3.1.3),从而得下述定理.

定理 3.4.2 局部紧空间的闭子空间是局部紧空间.

由本节开始时对数直线的分析,导向证明下述定理.

定理 3.4.3 正则的局部紧空间 X 的每一点具有闭的紧邻域基.

证明 设 U 是$x\in X$ 的任一邻域,由局部紧性,设 x 具有紧

邻域C.由正则性,存在x的闭邻域V,使$x\in V\subset(U\cap C)$,闭集$V\subset C$,C是紧集,所以V是紧的(定理3.1.3).证完.

下面是关于T_2局部紧空间的深刻的结果.

定理 3.4.4 T_2局部紧空间X是Tychonoff空间.

证明 设U是点$x_0\in X$的任一开邻域.为此,只要证明存在连续映射$f:X\to[0,1]$,使$f(x_0)=0,f(x)=1,x\in X-U$.

由局部紧性设C是x_0的紧邻域,置$V=U\cap C^\circ$因X是T_2空间,紧集C是闭的(定理3.1.12),$\bar{V}\subset C$,从而$\bar{V}$是紧集(定理3.1.3),T_2紧空间$\bar{V}$是正规的(定理3.1.11),从而是Tychonoff的,所以存在连续映射$g:\bar{V}\to[0,1]$,使$g(x_0)=0,g(x)=1$,$x\in\bar{V}-V$.在X上定义映射$f:X\to[0,1]$,使

$$f(x)=g(x),x\in\bar{V},$$
$$f(x)=1,x\in X-V.$$

下面验证f在X上连续.设F是$[0,1]$中的任一闭集.如果$1\notin F$,则$f^{-1}(F)=g^{-1}(F)$,由g的连续性,知$f^{-1}(F)$是X中的闭集.如果$1\in F$,则$f^{-1}(F)=g^{-1}(F)\cup(X-V)$也是$X$中的闭集.所以$f$是连续映射.由于$V\subset U$,$f(X-V)=\{1\}\Rightarrow f(X-U)=\{1\}$,$f$就是所要求的.证完.

结合定理3.4.3,可得如下推论.

推论 3.4.5 T_2局部紧空间的每一点具有闭的紧邻域基,从而T_2局部紧空间的开子空间是T_2局部紧的.

下面叙述局部紧空间上的连续映射.

紧空间在连续映射下的象是紧空间(定理3.1.14).局部紧空间在连续映射下的象未必是局部紧空间(离散空间是局部紧空间,离散空间到任何拓扑空间上的映射都是连续的).但连续开映射能保持局部紧性.

定理 3.4.6 局部紧空间在连续开映射下的象是局部紧空间.

证明 设f是局部紧空间到拓扑空间Y上的连续开映射.对任一点$y\in Y$,任取点$x\in f^{-1}(y)$,由X的局部紧性,存在x的紧

邻域 C,由于 f 是开映射及定理 3.1.14,知 $f(C)$是 y 的紧邻域. 证完.

下面是关于完备映射方面的结果,为此先证明关于闭映射的下述引理.

引理 3.4.7 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的闭映射,A 是 X 的子集满足 $A=f^{-1}(B)$,$B\subset Y$.则 f 在 A 上的限制 $f|_A$:$A\to B$ 是闭映射.

证明 设集 E 是子空间 A 的闭集,存在空间 X 的闭集 F,使 $E=A\cap F$.下证

$$f(A\cap F)=f(A)\cap f(F).\tag{1}$$

为此,只要证 $f(A\cap F)\supset f(A)\cap f(F)$,因为相反包含式是显然的.设 $y\in f(A)\cap f(F)$,$y\in f(F)$,存在 $x\in F$,使 $f(x)=y$.因 $y\in f(A)=B$,$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(B)=A$.由于 $f(x)=y$,$x\in f^{-1}(y)\subset A$,所以 $x\in A\cap F$.从而 $y\in f(A\cap F)$.到此证明了(1)式.

因 f 是 X 到 Y 上的闭映射,F 闭于 X,所以 $f(F)$闭于 Y.由(1)式,知 $f(E)=f(A\cap F)$闭于 $f(A)$.到此证明了 $f|_A$ 是 A 到 $f(A)=B$ 上的闭映射.证完.

定理 3.4.8 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的完备映射,则 X 是局部紧空间当且仅当 Y 是局部紧空间.

证明 设 X 是局部紧空间.对任一 $y\in Y$,$f^{-1}(y)$是空间 X 中的紧集,因 X 是局部紧的,对每一 $x\in f^{-1}(y)$,存在 x 的紧邻域 C_x,$\{C^\circ{}_x\}_{x\in X}$形成 $f^{-1}(y)$的开覆盖,$f^{-1}(y)$紧,存在有限子覆盖 $\{C^\circ{}_{x_1},C^\circ{}_{x_2},\cdots,C^\circ{}_{x_n}\}$,从而 $C_y=\bigcup_{i=1}^n C_{x_i}$ 是紧集且满足 $f^{-1}(y)\subset U\subset C_y$.这里 $U=\bigcup_{i=1}^n C^\circ{}_{x_i}$,因 f 是闭映射.由定理 1.5.8,存在 X 中开集 V 使 $f^{-1}(y)\subset V\subset U$,且 $f(V)$是 Y 中开集,从而得 $y\in f(V)\subset f(C_y)$.由 f 的连续性,知 $f(C_y)$是 Y 中紧集(定理 3.1.14),所以 $f(C_y)$是点 y 的紧邻域,Y 是局部紧空间.

相反地,设 Y 是局部紧空间,对每一 $x\in X$,$f(x)=y$ 具有紧

邻域 U_y. 由引理 3.4.7, 闭映射 f 在 $f^{-1}(U_y)$ 上的限制 $f|f^{-1}(U_y)$ 是 $f^{-1}(U_y)$ 到 U_y 上的闭映射. 从而也是完备映射. 由定理 3.3.5 知 $f^{-1}(U_y)$ 是空间 X 中的紧集, 显然也是点 x 的邻域. 到此证明了 X 是局部紧空间. 证完.

有一类拓扑空间, 它的拓扑可以由它的紧子集族确定的, 为了导出这类空间, 先证明局部紧空间的下述性质.

引理 3.4.9 设 X 是局部紧空间, 则 X 的子集 A 是闭集当且仅当对 X 的每一紧子集 C, $A\cap C$ 闭于紧子空间 C.

证明 设 A 是闭集, 显然, 对任何紧子集 C, $A\cap C$ 闭于 C. 相反地, 用反证法. 设集 A 不闭, 存在集 A 的聚点 $x\notin A$. 因 X 局部紧, 存在点 x 的紧邻域 C, 使 $A\cap C\neq\varnothing$. $A\cap C$ 关于 C 的闭包含点 x, 但 $x\notin A\cap C$, 所以 $A\cap C$ 不闭于紧子空间 C. 证完.

定义 3.4.10 拓扑空间 X 称为 ***k* 空间**, 如果 X 的子集 A 是闭集当且仅当对 X 的每一紧集 C, $C\cap A$ 闭于紧子空间 C *).

由引理 3.4.9, 有下述定理.

定理 3.4.11 局部紧空间是 k 空间.

定理 3.4.12 满足第一可数公理的空间是 k 空间.

证明 用反证法. 设集 A 不闭, 存在集 A 的聚点 $x\notin A$, 因 X 满足第一可数公理, 存在 A 中的序列 $\{x_i\}_{i\in N}$, (N 是自然数集), 它收敛于 x (定理 2.3.2). 置 $C=\{x_i\}_{i\in N}\cup\{x\}$, 则 C 是紧集, $A\cap C=\{x_i\}_{i\in N}$ 不闭于紧子空间 C. 证完.

定理 3.4.13 设 f 是 k 空间 X 到拓扑空间 Y 上的商映射. 则 Y 是 k 空间. (即 k 空间的商空间是 k 空间).

证明 设 $A\subset Y$ 对 Y 中的任一紧集 K, $A\cap K$ 闭于 K, 要证明 A 是 Y 中的闭集. 由于 f 是商映射, 只要证明 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的闭集.

设 C 是空间 X 的任一紧集, 由 f 的连续性, $f(C)$ 是 Y 中的

---

*) 关于 k 空间的论述参见 A. Arhangelski[1963a], [1963b].

紧集(定理 3.1.14). 由假设, $A\cap f(C)$ 闭于 $f(C)$. 置 $g=f|C:C\to f(C)$, (f 在 $C\subset X$ 上的限制). 由 g 的连续性, $g^{-1}(A\cap f(C))$ 闭于 C, 按 $g^{-1}(A\cap f(C))=f^{-1}(A)\cap C$, 所以 $f^{-1}(A)\cap C$ 闭于 C. 由于 C 是空间 X 的任一紧集, 而 X 是 k 空间, 所以 $f^{-1}(A)$ 是 X 中的闭集. 证完.

定理 3.4.14 (Cohen[1954]) 拓扑空间 X 是 k 空间当且仅当 X 是局部紧空间的商空间.

证明 因局部紧空间是 k 空间(定理 3.4.11), 由定理 3.4.13, 局部紧空间的商空间是 k 空间.

相反地, 设 X 是 k 空间, 要证明 X 是某一局部紧空间在商映射下的象. 现在从 X 出发构造一个局部紧空间 S 使 S 到 X 上的映射为商映射.

设 X 中所有紧集所成的集族为 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$. 把集族中的元素(紧集)看作是两两不交的, 取这些紧子空间的拓扑和, 记作 $S=\bigoplus_{\alpha\in\Lambda}K_\alpha$. 按拓扑和的定义(定义 3.1.21), 对 S 上的拓扑规定为 A 是 S 中的闭集当且仅当对每一 $\alpha\in\Lambda$, $A\cap K_\alpha$ 闭于 K_α. 从而 S 是一局部紧空间, 规定 S 到 X 上的映射 f 为对每一 $\alpha\in\Lambda$, $f|K_\alpha$ 是 K_α 到 X 内紧集 K_α 上的同胚映射. 下面证明 f 是 S 到 X 上的商映射.

为此. 应证明 F 是 X 中的闭集, 当且仅当 $f^{-1}(F)$ 是 S 中的闭集.

(i) 设 F 是 X 中的闭集, $f^{-1}(F)\cap K_\alpha=F\cap K_\alpha$ 闭于 K_α, 对每一 K_α 成立, 故 $f^{-1}(F)$ 闭于 S,

(ii) 设 $f^{-1}(F)$ 闭于 S, $f^{-1}(F)\cap K_\alpha$ 闭于 K_α, 对(S 中的)所有 K_α 成立, 而 $f^{-1}(F)\cap K_\alpha=F\cap K_\alpha$ 闭于 K_α 对(X 中的)所有 K_α 成立, 因 X 是 k 空间, 所以 F 是 X 中闭集. 证完.

§5. 紧性的推广

这一节所述都是紧性的推广(除序列式紧性外). 事实上, 前面

的 Lindlöf 性质,局部紧性都是紧性的推广,这里侧重联系分析中有关紧性的常用概念,故也把序列式紧性列入.

定义 3.5.1 拓扑空间称为**可数紧空间**(countably compact),如果 X 的每一可数开覆盖具有有限子覆盖.

比较紧空间的定义(定义 3.1.1),显然紧空间是可数紧空间.但其逆不真.空间$[0,\omega_1)$是可数紧空间(习题 3.10),但不是紧空间.

作为定理 3.1.2 的特例,有下述定理.

定理 3.5.2 拓扑空间 X 是可数紧空间当且仅当每一具有有限交性质的可数闭集族的交不空.

定理 3.5.3 拓扑空间 X 是可数紧空间当且仅当这空间 X 中的每一序列有聚点.

证明 设$\{x_n\}$是可数紧空间 X 的序列.置

$$F_n = \{x_{n+i}: i = 0,1,2,3,\cdots\},(n = 1,2,\cdots).$$

则 $\mathscr{F}=\{\bar{F}_n\}$是具有有限交性质的可数闭集族.由定理 3.5.2,这闭集族的交不空,也就是存在点 x 属于每一个 $\bar{F}_n$,从而 x 是序列$\{x_n\}$的聚点(参见定义 1.4.10).

相反地,设$\{F_n\}$是 X 的具有有限交性质的可数闭集族,置

$$\mathscr{F} = \{\bigcap_{i=1}^n F_i : n = 1,2,\cdots\}.$$

任取 $x_n \in \bigcap_{i=1}^n F_i (n=1,2,\cdots)$,由假设,序列$\{x_n\}$有聚点 x.显然 $x \in F_n (n=1,2,\cdots)$,由定理 3.5.2,知 X 是可数紧空间.证完.

定义 3.5.4 点 x 称为无限集A 的 **ω 聚点**(ω-acc umulation point),如果点 x 的任何邻域包含集A 的无限个点.

引理 3.5.5 拓扑空间 X 的每一序列具有聚点当且仅当每一无限集有 ω 聚点.

证明 设每一序列具有聚点.设 A 是一无限集,由 A 中不同的点形成的序列的聚点显然是集A 的 ω 聚点.

相反地,设每一无限集具有 ω 聚点,设$\{x_n: n=1,2,\cdots\}$是一序列,下面分两种情况:(i)这序列中不同的点所成的集是无限集,则这无限集的 ω 聚点就是这序列的聚点,(ii)这序列中不同的点

所成集是有限集,则必有某一点 x 在序列中出现无限回,即 $x_n=x$ 对无限个自然数 n 成立,则点 x 是这序列的聚点.证完.

由定理 3.5.3,引理 3.5.5 及定理 2.2.5 立得下述定理.

定理 3.5.6 设 X 是 T_1 空间,则 X 是可数紧的当且仅当每一无限集具有聚点.

定义 3.5.7 拓扑空间 X 称为**序列式紧的**(sequentially compact),如果 X 中每一序列具有收敛子序列.

序列式紧性不能由紧性推导出,不是紧性的推广;另外,序列式紧性也不能推导出紧性.$[0,\omega_1)$是序列式紧的(习题 3.10),但不是紧的,紧空间而不是序列式紧的空间的例见 Steen and Seebach[1978],p.125,例 105.

由于具有收敛子序列的序列必有聚点,故由定理 3.5.3 得下述定理.

定理 3.5.8 序列式紧空间是可数紧空间.

由于当空间 X 满足第一可数公理时,X 中具有聚点的序列必具有收敛的子序列(定理 2.3.2 的(iii)),故有下述定理.

定理 3.5.9 满足第一可数公理的可数紧空间是序列式紧空间.

定义 3.5.10 拓扑空间 X 称为**伪紧的**(pseudo-compact),如果 X 上的每一实值连续函数有界.

定理 3.5.11 可数紧空间是伪紧空间.

证明 设 f 是可数紧空间 X 上的任一实值连续函数,置 $U_n=\{x:|f(x)|<n\}(n=1,2,\cdots)$.则$\{U_n:n=1,2,\cdots\}$是空间 X 的可数开覆盖.由 X 的可数紧性,存在有限子覆盖$\{U_{n_1},\cdots,U_{n_k}\}$.从而$|f(x)|<\max(n_1,n_2,\cdots,n_k)$,对所有 $x\in X$ 成立.所以 X 是伪紧空间.证完.

定理 3.5.11 的逆不真,见下例.

例 3.5.12 (不是可数紧的伪紧空间)设 X 是可数集,$x_0\in X$.规定 X 上的拓扑为$\varnothing$及包含点 x_0 的 X 的任何子集,则这空

间 X 中具有聚点的序列只能是某一点 $x\in X$ 在序列中出现无限次的情况. 其他的序列(例如由可数集 X 形成的序列)都没有聚点. 由定理 3.5.3 知空间 X 不是可数紧的 . 但 X 是伪紧的,因为这空间 X 不存在不相交的不空开集. 这导致 X 上的任一实值连续函数是常值函数.

定理 3.5.13 (Hewitt[1948])正规的伪紧空间是可数紧空间.

为了证明上述定理,先把 Tietze 定理(定理 2.4.2)推广到无界的连续函数情况.

引理 3.5.14 设 X 是正规空间, F 是闭子集, f 是 F 到 R 的无界连续函数,则存在 f 到 X 上的扩张 g.

证明 arctg f 应是 F 上的有界连续函数,满足

$$|\operatorname{arctg} f|<\frac{\pi}{2}.$$

由 Tietze 扩张定理,存在 arctg f 到 X 上的(连续)扩张 Φ,使 $|\Phi|\leqslant\frac{\pi}{2}$,置

$$G=\left\{x:\Phi(x)=\frac{\pi}{2},\text{或 }\Phi(x)=-\frac{\pi}{2}\right\},$$

则 G 是空间 X 的闭集且与 F 不相交,由 Urysohn 引理可定义 X 到 $[0,1]$ 的连续函数 g,使

$$g(F)=\{1\},\qquad g(G)=\{0\}.$$

置 $\Phi'=g\circ\Phi$,则得 X 上的连续函数 Φ' 使

$$|\Phi'|<\frac{\pi}{2},$$

且
$$\Phi'(x)=\operatorname{arctg}f(x),x\in F.$$

所以 $\varphi=\operatorname{tg}\Phi'$ 是 f 到 X 上的(连续)扩张. 证完.

定理 3.5.13 的**证明**:设正规空间 X 不是可数紧的. 则由定理 3.5.3,存在序列 $\{x_n:n=1,2,\cdots\}$ 没有聚点,则这序列中点形成的集是可数集. 为便利起见仍记作 $\{x_n:n=1,2,\cdots\}$. 这集闭于空间 X,且是空间 X 的离散子空间,定义实值连续函数 f 使 $f(x_n)=n$,

$n=1,2,\cdots$. 由引理 3.5.14,存在 f 到 X 上的扩张 φ,显然 φ 不是有界实值连续函数. 所以 X 不是伪紧空间. 证完.

注记 可数紧性是紧性的可数情况的推广,它联系着分析学中许多重要概念,它具有紧性的一些性质,例如可数紧空间的闭子空间是可数紧的,可数紧空间在连续映射下的象是可数紧的(容易类似于紧性情况作出证明),但是它的性质毕竟没有紧性那么良好. 下面从两方面谈.

(i) T_2 紧空间是正规空间,但 T_2 可数紧空间未必是正规的,因为空间 $[0,\omega_1)$ 是 T_2 可数紧的(习题 3.10),空间 $[0,\omega_1]$ 是 T_2 紧的,它们的积空间 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 是 T_2 可数紧的(习题 3.23),但不是正规的(习题 3.11).

(ii) 任意个紧空间的积空间是紧空间,但存在着两个可数紧空间的积空间不是可数紧的. E. Cech 首先提出"两个可数紧空间的积是否可数紧". J. Novák[1953]构造了两个可数紧的 Tychonoff 空间,它们的积不是可数紧的,此例参见 Novák[1953]或 R. Engelking[1977]p. 262, Ex 3.10.19. 事实上,这积空间不仅不是可数紧的,也不是伪紧的(见 Engelking [1977]p265). 这说明两个伪紧空间的积未必是伪紧的.

下面介绍紧性的一种最重要的推广. 这是 J. Dieudonné 于 1944 年引进的. 空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 称为**局部有限的** locally finite),如果对每一 $x\in X$,存在 x 的邻域 $U_{(x)}$ 使 $U_{(x)}\cap U_\alpha\neq\varnothing$,仅对有限个 $\alpha\in A$ 成立. 覆盖 $\mathscr{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ 称为是覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的**加细覆盖**(refinement),如果 $\mathscr{V}$ 中的每一元素总包含于 $\mathscr{U}$ 中的某一元素 U_α 内.

定义 3.5.15 拓扑空间 X 称为**仿紧的**(paracompact),如果 X 的每一开覆盖具有局部有限的加细开覆盖.

显然,紧空间是仿紧空间,因为有限子覆盖是局部有限加细覆盖. 具有无限个元素的离散空间不是紧空间,而是仿紧空间,因为对离散空间的任何开覆盖,这空间的所有单点集形成的覆盖总是所要求的局部有限开加细覆盖.

定理 3.5.16 仿紧空间的闭子空间是仿紧的.

证明 设 F 是仿紧空间 X 的闭子集,设 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是关于子空间 F 的任一开覆盖. 对每一开于子空间 F 的集 V_α,存在空间 X 的开集 U_α,使 $V_\alpha=U_\alpha\cap F$. 置 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$,则 $\mathscr{U}\cup\{X-F\}$ 是空间 X 的开覆盖,由仿紧性,存在局部有限加细开覆盖 $\{W_\beta\}$,则 $\{W_\beta\cap F\}$ 是关于子空间 F 的开覆盖且加细 $\mathscr{V}$,所以 F 是仿紧空间. 证完.

下面将证明 T_2 仿紧空间是正规的. 为此先证明下述引理.

引理 3.5.17 设 $\mathscr{U}$ 是局部有限覆盖(集族),$\mathscr{U}'\in\mathscr{U}$,则 $\bigcup\{\bar{U}:U\in\mathscr{U}'\}=\overline{\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$.

证明 关系式 $\bigcup\{\bar{U}:U\in\mathscr{U}'\}\subset\overline{\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$ 是显然的,下证相反的关系式. 设 $x\notin\bigcup\{\bar{U}:U\in\mathscr{U}'\}$,由 $\mathscr{U}$ 局部有限性,知存在邻域 $V(x)$ 仅与有限个 U 相交,设为 $U_1,U_2,\cdots,U_n,U_i\in\mathscr{U}'$ $(i=1,2,\cdots n)$,

$$x\notin\bigcup\{\bar{U}:U\in\mathscr{U}'\}\Rightarrow x\notin\bigcup_{i=1}^n\bar{U}_i.$$

则 $X-\bigcup_{i=1}^n\bar{U}_i$ 是 x 的邻域与 $U_1,U_2,\cdots,U_n$ 不相交,所以 x 的邻域 $W(x)=V(x)\cap(X-\bigcup_{i=1}^n\bar{U}_i)$ 与 $\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}'\}$ 不相交,即 $x\notin\overline{\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}$. 到此证明了

$$\bigcup\{\bar{U}:U\in\mathscr{U}'\}\supset\overline{\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}'\}}.$$ 证完.

推论 3.5.18 设 $\mathscr{U}$ 是局部有限覆盖(集族),$\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$ 是任一子族,则 $\bigcup\{\bar{U}:U\in\mathscr{U}'\}$ 是闭集.

引理 3.5.19 设 X 是仿紧空间,A,B 是不相交的闭集,如果对每一 $x\in B$,存在开集 U_x,V_x,使 $A\subset U_x$,$x\in V_x$ 且 $U_x\cap V_x=\varnothing$,则存在开集 U、V 使 $A\subset U$,$B\subset V$,且 $U\cap V=\varnothing$.

证明 $\{X-B\}\cup\{V_x\}_{x\in B}$ 形成空间 X 的开覆盖. 由仿紧性,存在局部有限加细开覆盖 $\{W_s\}_{s\in S}$,置

$$S_1=\{s:s\in S,W_s\subset V_x\text{ 对某些 }x\in B\text{ 成立}\}.$$

则 $A\cap\bar{W}_s=\varnothing\ (s\in S_1)$ 和 $B\subset\bigcup_{s\in S_1}W_s$. 由局部有限性(引理 3.5.17),有

$$\bigcup_{s\in S_1}\bar{W}_s = \overline{\bigcup_{s\in S_1} W_s}.$$

从而集 $U = X - \bigcup_{s\in S_1}\bar{W}_s$ 是开的. 容易验证集 U 及集 $V = \bigcup_{s\in S_1} W_s$ 满足引理 3.5.19 的要求. 证完.

定理 3.5.20 T_2 仿紧空间是正规空间.

证明 先设上述引理中的 A 是单点集, 由 T_2 性, 引理 3.5.19 的假设成立, 由此引理知 T_2 仿紧空间是正则的.

再用一次引理, 得正则仿紧空间是正规的. 证完.

定理 3.5.16、定理 3.5.20 所表述的是仿紧空间所具有的紧空间的相应的性质(见定理 3.1.3 及定理 3.1.11).

关于可数紧性与紧性的关系, 显然有如下定理.

定理 3.5.21 Lindelöf 空间是紧空间当且仅当它是可数紧空间.

此外, 可以证明如下定理.

定理 3.5.22 仿紧空间是紧空间当且仅当它是可数紧空间.

证明 必要性是显然的. 下证充分性, 设 X 是仿紧空间但不是紧的, 则存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 没有有限子覆盖, 因 X 是仿紧的, 存在局部有限开覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$, 显然 $\mathscr{V}$ 也没有有限子覆盖, 因此可在 $\mathscr{V}$ 中选取 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$, 使

$$V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i \neq \varnothing, \quad (V_n \in \mathscr{V}, n = 1, 2, \cdots).$$

对每一 $n(n=1,2,\cdots)$. 取点 $x_n \in V_n - \bigcup_{i=1}^{n-1} V_i$, 则序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 无聚点(如不然, 设 x 是聚点, 点 x 的任何邻域应包含这集中无限个点, 从而与无限个 V_n 相交, 这与 $\mathscr{V}$ 的局部有限性矛盾). 由定理 3.5.3, 知 X 不是可数紧的. 证完.

关于在怎样的拓扑空间中, 可数紧性与紧性等价, 许多学者进行过研究, 参见 D. K. Burke[1969a], J. M. Worrell, Jr. 及 H. H. Wicke[1980]及刘应明[1977], 他们都改进了定理 3.5.22 的结果.

§6. 紧　　化

在分析学中, 紧空间上的实值连续函数具有重要性质. 例如,

闭区间上的连续函数取到最大最小值.数直线不是紧空间,要使它成为紧空间,通常可用下列两种方法:

(i)补上两个特殊的点"$-\infty$"及"$+\infty$",前者作为小于一切实数,后者作为大于一切实数.事实上,可把数直线同胚地映射为开区间$(-1,1)$ $\left(\text{利用同胚映射} f: x \mapsto \frac{x}{1+|x|}\right)$,然后补上两点$-1,1$,得到$[-1,1]$.从而特殊点$-\infty$或$+\infty$的邻域可以用$-1$或$1$的邻域按$f$的原象去规定.

(ii)在复变函数论中,通常的复平面不是紧空间,可以补上一个无穷远点"∞"使成为紧空间.事实上,可以通过熟知的球极映射把复平面同胚地映射为移去了北极的球面.从而无穷远点,"∞"的邻域可以用球面上北极的邻域去规定,在这映射下,数直线映射为球面上通过北极的大圆移去北极后的图形,补上相应的一个无穷远点∞后也使数直线成为紧空间.

定义 3.6.1 拓扑空间X的**紧化**(compactification)是一对(f,Y),这里Y是紧空间,f是X到Y的稠密子集上的同胚映射$(\overline{f(X)}=Y)$,当Y是T_2紧空间时,(f,Y)称为**T_2紧化**.

为叙述简单起见,有时把X与它的同胚象$f(X)$等同起来,称Y是X的紧化.

如果拓扑空间X浸没在紧空间Y内,也就是存在同胚映射$f: X \to f(X) \subset Y$,则$(f,\overline{f(X)})$显然是X的紧化.

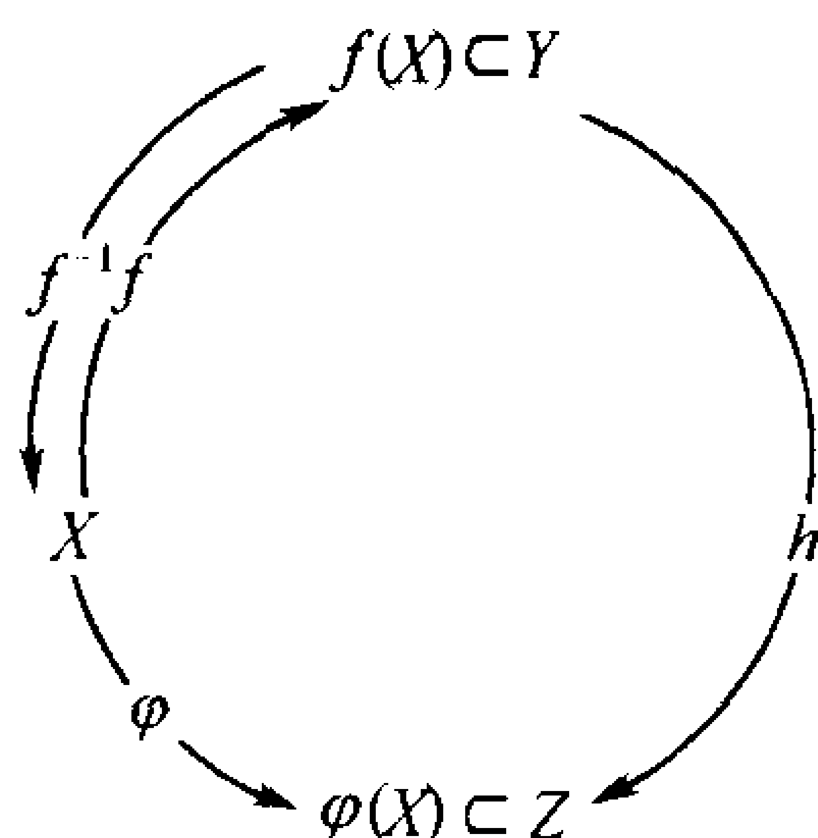
定义 3.6.2 设(f,Y),(φ,Z)是X的紧化,称$(f,Y) \geqslant (\varphi, Z)$,如果存在$Y$到$Z$上的连续映射$h$,使$h \circ f=\varphi$,上述条件等价于映射$\varphi f^{-1}: f(X) \to Z$存在连续扩张$h: Y \to Z$.

定义 3.6.3 拓扑空间X的**单点紧化**(one point compactification)是集$X^*=X \cup \{\infty\}$,具有如下拓扑:

(i)X中的开子集,

(ii)X^*的子集U之使X^*-U是X中的闭紧集者.

当然应验证满足上述条件的子集族构成拓扑.这一验证见下述定理.



定理 3.6.4 (P. Alexandroff[1924])

(i)X 的单点紧化X^*是紧空间,以 X 为子空间,

(ii)X^*是 T_2 空间当且仅当 X 是 T_2 局部紧空间,

(iii)(唯一性)X 的任何两个单点紧化是同胚的.

证明 考察定义 3.6.2 的(i),(ii)中开集的有限交、任意并,当∞不属于这交、并时,这交、并(可以看作)是由(i)中开集形成,从而仍是(i)中开集.当∞属于这有限交时,这交的补集应是 X 中闭紧集的有限并,从而仍是 X 中的闭紧集,故这交是(ii)中的开集,当∞属于这任意并时,这并可以看作是一个(ii)中的开集与一个(i)中开集的并((i)中开集的任意并是(i)中开集),这并的补集是 X 中的闭紧集与 X 中闭的集的交,从而是 X 中的闭紧集.故这并是(ii)中开集.所以 X^*是拓扑空间以 X 为子空间.设 $\mathscr{U}$ 是 X^* 的任一开覆盖,则∞属于某一开集 $U\in\mathscr{U}$,而 X^*-U 是紧的,故具有有限子覆盖,所以 X^*是紧空间.

(ii)设 X^*是 T_2 空间,X 作为 T_2 紧空间的开子集应是 T_2 局部紧的(推论 3.4.5).设 X 是局部紧空间.为了证明 X^*是 T_2 空间,只要证对任何点 $x\in X$,存在 x 与∞的不相交的邻域,由推论 3.4.5,x 具有一个闭紧邻域 U,而 X^*-U 正好是∞的所要求的邻域.

(iii)设 X^*,Y^*是 X 的两个单点紧化,置 $Y^*-X=\infty_Y$.取一一对应映射 $f:X^*\to Y^*$,使 $f(x)=x$,$f(\infty)=\infty_Y$.下证 f 是同胚的.由于 f,f^{-1}是对称的,只要证明 f 是开映射,从而只要证

明∞的开邻域的象开于 Y. 设 $X^* - C$ 是∞的任一开邻域,这里 C 是 X 中的闭紧集,从而 $f(C)$也是闭紧集,由于 f 是一一对应的,$f(X^* - C) = Y^* - f(C)$是 Y^* 中开集. 证完.

拓扑空间 X 的单点紧化X^*可以写成(i, X^*),这里 i 是空间 X 到自己的恒等映射,下面证明定理3.6.6,说明在 T_2 紧化情况,单点紧化是最小紧化.

引理3.6.5 设 X 是T_2空间,设 A 是X 的局部紧的稠密子集,则 A 是开集.

证明 因为 A 是局部紧子集,对每一 $x \in A$,存在关于子空间 A 的紧邻域V,因 X 是T_2 空间,V 是闭集,令 W 是V 关于子空间A 的内核,存在空间 X 的开集U 使 $W = U \cap A$. 因 $\bar{A} = X$,所以

$$U = U \cap X = U \cap \bar{A} \subset \overline{U \cap A} = \bar{W} \subset V,$$

(因 $W \subset V$,而 V 是闭集),上式说明 V 是点 x 关于空间X 的邻域,从而证明了 A 是开集. 证完.

定理3.6.6 设(f, Y)是 X 的任一T_2 紧化,X 的单点紧化 X^*是 T_2 空间,则$(f, Y) \geqslant (i, X^*)$.

证明 由定义3.6.2,只要证明映射 $f^{-1}: f(X)(\subset Y) \to X$ 可以连续扩张到Y 上. 为此置 $h: Y \to X^*$,使

$$h(y) = \begin{cases} f^{-1}(y), & y \in f(X), \\ \infty, & y \in Y - f(X). \end{cases}$$

现证 h 是Y 到X^*的连续映射,X^* 中开集 U 包含在X 中时,U 是X 中开集,$h^{-1}(U) = f(U)$是 $f(X)$中的开集. 因 X^*是 T_2 空间,由定理3.6.3,X 是局部紧的,从而 $f(X)$也是局部紧的. 因 Y 是T_2 空间且$\overline{f(X)} = Y$,由引理3.6.5,$f(X)$是 Y 中开集,从而 $h^{-1}(U)$是 Y 中开集. X^* 中的开集 U 不包含在X 中时(即$\infty \in U$ 时),$U = X^* - C$,C 是X 中的闭紧集. 从而 $h^{-1}(C) = f(C)$ 是 $f(X)$中紧集,也是 Y 中紧集. Y 是 T_2 空间,$h^{-1}(C)$闭于 Y,从而 $h^{-1}(U)$开于 Y. 到此证明了 h 在Y 上连续. 证完.

由定理3.6.4的唯一性部分可知引进无穷远点,∞使复平面、

数直线成为紧空间分别是复平面、数直线的单点紧化. 对半开区间 $(0,1]$,补上点 0 使成 $[0,1]$ 也是单点紧化. 考察定义在 $(0,1]$ 上的实值连续函数 $f: x \mapsto \sin\frac{1}{x}$,即使对 $(0,1]$ 单点紧化了,但是 f 不能连续地扩张到 $[0,1]$ 上. 这导致要求具有更"良好"性质的紧化——Stone-Čech 紧化.

设 A 是任一集, $|A|$ 表示集 A 的势, $Q=[0,1]$ 是闭区间,积空间 Q^A 是 $|A|$ 个 $[0,1]$ 的积,每一 $q \in Q^A$ 可表示为 $q=\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$,这里 $x_\alpha \in [0,1]\ (\alpha\in A)$, q 可以看作集 A 到 $[0,1]$ 内的实值函数,对每一 $\alpha\in A$, $q(\alpha)=x_\alpha$. 如用 p_α 表示积空间 Q^A 到第 $\alpha\ (\alpha\in A)$ 个坐标空间上的投影映射,则有

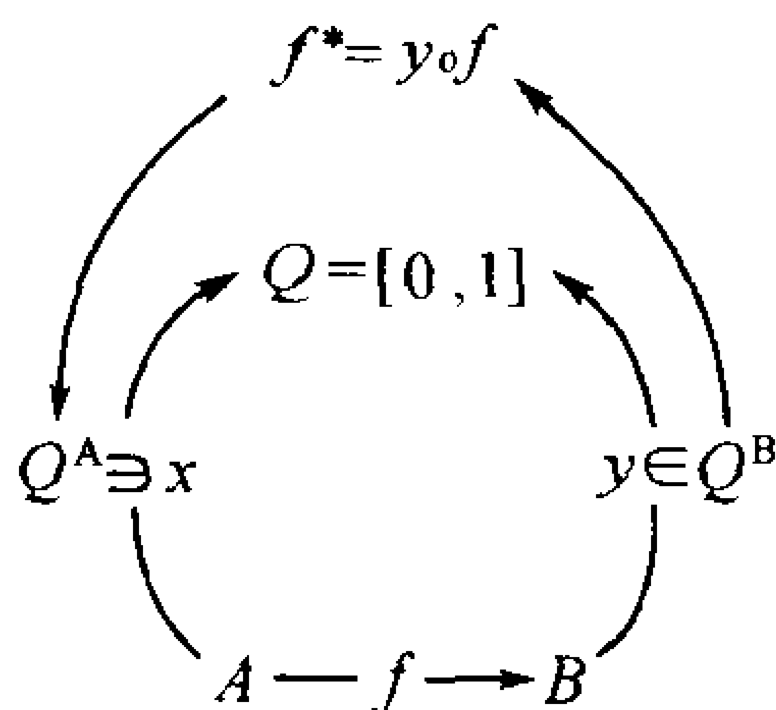
$$p_\alpha \circ q = x_\alpha = q(\alpha). \tag{1}$$

引理 3.6.7 设 f 是由集 A 到集 B 的映射,对每一 $y\in Q^B$,置

$$f^*(y) = y\circ f. \tag{2}$$

则 f^* 是 Q^B 到 Q^A 内的连续映射.

证明 按 $y\in Q^B$ 是由 B 到 Q 的实值函数, $y\circ f$ 是由 A 到 Q 的实值函数. 所以 $f^*(y)=y\circ f$ 是 Q^B 到 Q^A 内的映射(如下图所示)



为了证明 $f^*(y)=y\circ f$ 是 Q^B 到 Q^A 内的连续映射,只要证明对 Q^A 的每一坐标空间(即对每一 $\alpha\in A$), $p_\alpha\circ f^*(y)$ 在 Q^B 上是连续的(定理 2.1.5),由(2)及(1)

$$p_\alpha \circ f^*(y) = p_\alpha(y\circ f) = (y\circ f)(\alpha) = y\circ f(\alpha).$$

这里 $f(\alpha)\in B$, $y\in Q^B$. 更由(1)有

$$y \circ f(\alpha) = p_{f(\alpha)} \circ y.$$

这正好是积空间 Q^B 中的元素 y 在 $f(\alpha)$坐标空间上的投影，显然是连续的.证完.

设 $F(X)$是由空间 X 到 $Q=[0,1]$内的实值连续函数的全体所成集. $|F(X)|$是 $F(X)$的势，$Q^{F(X)}$是$|F(X)|$个闭区间$[0,1]$形成的积空间.由 Tychonoff 定理知 $Q^{F(X)}$是紧空间，此外，$Q^{F(X)}$也是 T_2 空间.

定义 3.6.8 从 X 到$Q^{F(X)}$内的映射 e 称为**赋值映射**(evaluation mapping)，如果对每一 $x \in X$，每一 $\alpha \in F(X)$

$$p_\alpha \circ e(x) = \alpha(x). \tag{3}$$

上述定义中的 $\alpha \in F(X)$是 X 到$[0,1]$内的连续映射，由此容易证明下述引理.

引理 3.6.9 赋值映射 e 是 X 到 $Q^{F(X)}$内的连续映射.

证明 由(3)式，$p_\alpha \circ e(x) = \alpha(x)$，$\alpha(x)$在 X 上连续，由定理 2.1.5，$e(x)$在 X 上连续.证完.

设 F 是空间X 到$[0,1]$内的函数所成族.族 F 称为在X 上区别点的，如果对任何 $x, y \in X$，$x \neq y$，存在 $f \in F$ 使$f(x) \neq f(y)$；称为在 X 上区别点与闭集的，如果对任何闭集 A 及任何$x \notin A$，存在 $f \in F$ 使$f(x) \notin \overline{f(A)}$.显然，Tychonoff 空间到$[0,1]$内的连续函数族是区别点的，全正则空间到$[0,1]$内的连续函数族是区别点与闭集的(相反论断也成立，见习题 3.24).

引理 3.6.10 设 e 是X 到 $Q^{F(X)}$内的赋值映射，则有

(i)如果 $F(X)$是区别点与闭集的，则 e 是 X 到$e(X)$上的开映射.

(ii)如果 $F(X)$是区别点的，则 e 是一一对应映射.

证明 (i)只要证明对每一 $x \in X$ 的开邻域U 的象(按映射 e 的象)包含着 $e(x)$在积空间 $Q^{F(X)}$的一个邻域与 $e(X)$的交(定理 1.5.6 的(iv))，由于 $F(x)$是区别点与闭集的，对 x 及闭集 $X-U$，存在 $f \in F$，使 $f(X) \notin \overline{f(X-U)}$.置 $V = \{y: y \in Q^{F(X)}$,

$p_f(y)\notin\overline{f(X-U)}\}$. 显然, V 是积空间 $Q^{F(X)}$ 中的开集, 且 $e(x)\in V$, 易知 $V\cap e(X)\subset e(U)$.

(ii) 设 $x',x''\in X$, $x'\neq x''$, 存在 $\alpha\in F(X)$, 使 $\alpha(x')\neq\alpha(x'')$. 由(3), $p_\alpha\circ e(x')\neq p_\alpha\circ e(x'')$, 所以 $e(x')\neq e(x'')$. 证完.

由引理 3.6.8, 3.6.9 及上述讨论, 得以下定理.

定理 3.6.11 设 X 是 Tychonoff 空间, 赋值映射 e 是 X 到 $Q^{F(X)}$ 的子集 $e(X)$ 上的同胚映射.

由上述定理及 $e(X)$ 关于 T_2 紧空间 $Q^{F(X)}$ 的闭包是 T_2 紧的, 记 $\overline{e(X)}=\beta(X)$, 显然 $(e,\beta(X))$ 是 X 的一个 T_2 紧化.

定义 3.6.12 设 X 是 Tychonoff 空间, 称 X 的 T_2 紧化 $(e,\beta(X))$ 为 **Stone-Čech 紧化**, 这里 $\beta(X)$ 是 $e(X)$ 在 $Q^{F(X)}$ 中的闭包.

定理 3.6.13 (M. H. Stone[1937], Čech[1937]) 设 X 是 Tychonoff 空间, Y 是 T_2 紧空间, f 是 X 到 Y 内的连续映射, $(e,\beta(X))$ 是 X 的 Stone-Ceeh 紧化, 则由 $e(X)$ 到 Y 内的连续映射 $f\circ e^{-1}$ 可以扩张为由 $\beta(X)$ 到 Y 内的连续映射.

证明 对给定的 X 到 Y 内的连续映射 f, 定义由 $F(Y)$ 到 $F(X)$ 内的映射 f^*:

$$f^*(a)=a\circ f,\quad a\in F(Y). \tag{4}$$

从而定义由 $Q^{F(X)}$ 到 $Q^{F(Y)}$ 内的映射 f^{**}:

$$f^{**}(q)=q\circ f^*, q\in Q^{F(X)}. \tag{5}$$

e 是 X 到 $Q^{F(X)}$ 内的赋值映射, g 是 Y 到 $Q^{F(Y)}$ 内的赋值映射, 因 X 是 Tychonoff 空间, 由定理 3.6.11, e 把 X 同胚地映射成 $e(X)\subset\beta(X)$, 因 Y 是 T_2 紧空间, g 把 Y 同胚地映成 $g(Y)=g(\bar{Y})=\beta(Y)$ (因 Y 紧, $g(Y)$ 紧, $Q^{F(Y)}$ 是 T_2 的, 故 $g(Y)$ 闭), 图解如下:

$$\begin{array}{ccc}
e(X)\subset\overline{e(X)}=\beta(X)\subset Q^{F(X)} & \xrightarrow{f^{**}} & Q^{F(Y)}\supset\beta(Y)=\overline{g(Y)}=g(Y)\\
\uparrow e & & \uparrow g\\
X & \xrightarrow{\quad f\quad} & Y
\end{array}$$

由引理 3.6.6,映射 f^{**} 连续,由图可以看到,如果能证明 $f^{**}\circ e = g\circ f$,则 $g^{-1}\circ f^{**}$ 就是要求的 $f\circ e^{-1}$ 的连续扩张了.

现证 $f^{**}\circ e = g\circ f$. 设 $x\in X, h\in F(Y)$,分别由(1),(5),(4),(3)式可得:

$$p_h(f^{**}\circ e(x)) \overset{(1)}{=\!=} (f^{**}\circ e(x))(h) \overset{(5)}{=\!=} (e(x)\circ f^{*})(h) = e(x)\circ f^{*}(h) \overset{(4)}{=\!=} e(x)(h\circ f) \overset{(3),(1)}{=\!=\!=} (h\circ f)(x) = h\circ f(x) \overset{(3),(1)}{=\!=\!=} g(f(x))(h) = (g\circ f(x))(h) \overset{(1)}{=\!=} p_h(g\circ f(x)).$$ 证完.

推论 3.6.14 在 T_2 紧化情况,Stone-Čech 紧化是最大的紧化.

证明 由定义 3.6.12,这里考察的空间 X 应是 Tychonoff 空间.设(f, Y)是 X 的任一 T_2 紧化,f 是 Tychonoff 空间 X 到 T_2 紧空间 Y 内的连续映射,由定理 3.6.13,存在 $f\circ e^{-1}$ 的扩张 h 映 $\beta(X)$ 到 Y 内,由定义 3.6.2 得证.证完.

例 3.6.15 $[0,1]$是$(0,1]$的单点紧化,但不是$(0,1]$的 Stone-Čech 紧化,因为定义在$(0,1]$上到 T_2 紧空间$[-1,1]$上的函数 $x\mapsto\sin\frac{1}{x}$,不能连续扩张到$[0,1]$上,数直线的单点紧化同胚于平面上的圆周,同样不是 Stone-Čech 紧化,函数 $x\mapsto\text{arctg}\ x$ 给出同样的矛盾.

例 3.6.16 Stone-Čech 紧化是非常复杂的,自然数集 N 作为数直线的子空间(按相对拓扑)是一离散空间,从而是 T_2 局部紧的,Tychonoff 的.B. Popiši[1937]证明 N 的 Stone-Čech 紧化的势 $|\beta(N)| = 2^c$(c 是连续统的势),J. Novák[1953]证明了 $\beta(N)$ 的任何无限闭子集的势是 2^c,从而在 βN 中不存在非平凡的收敛序列,而 $N\cup\{x\}$ $(x\in\beta N - N)$不是第一可数的(见 J. Dugundji [1966]p. 244).此外,空间$[0,\omega_1]$的单点紧化应是$[0,\omega_1]$,而可以证明$[0,\omega_1]$的 Stone-Čech 紧化也是$[0,\omega_1]$(习题 3.25).

这里叙述了两种紧化,相应于最小与最大(在 T_2 紧化)的情况.

习 题 三

3.1 离散空间是紧空间当且仅当它是有限的.

3.2 设序列$\{x_n\}_{n\in N}$收敛于x_0,则$\{x_0\}\cup\{x_n\}_{n\in N}$是紧集.

3.3 证明空间 X 是紧空间当且仅当每一开覆盖具有局部有限子覆盖.

3.4 拓扑空间的两个紧子集的交可以不是紧的,试举出这样的例.

3.5 证明任意个闭紧集的交是闭紧集.

3.6 拓扑空间的紧子集的闭包可以不是紧的,试举出这样的例.

3.7 证明正则空间的紧子集的闭包是紧的.

3.8 叙述并证明定理 3.1.12 相应于网的论述.

3.9 证明例 3.1.26 的空间的紧性.

3.10 证明空间$[0,\omega_1)$是序列式紧的、局部紧的.

3.11 证明空间$[0,\omega_1)$,$[0,\omega_1]$都是正规的,但它们的积$[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$不是正规的.

提示:互不相交的闭集 $A=[0,\omega_1)\times\{\omega_1\}$及 $B=\{(\alpha,\alpha):\alpha\in\omega_1\}$不存在不相交的邻域.

3.12 证明 T_2 空间的局部紧子集可以表示为一个开集与一个闭集的交.

3.13 设$\mathscr{A}$是 T_2 空间的紧子集族,$\mathscr{A}$中元素的有限交是连通的,则$\bigcap\{A:A\in\mathscr{A}\}$是连通的.

3.14 设 A 是数直线上的不空的紧集,则 A 的上确界、下确界都属于 A.

3.15 设 f 是紧空间 X 上的实值连续函数,设 f 总是正的,则存在 $\varepsilon>0$,使对 $x\in X$,$f(x)>\varepsilon$.

3.16 设 X 是可数紧空间,Y 满足第一可数公理,则投影映射 $f:X\times Y\rightarrow Y$ 是闭映射.

3.17 T_1 空间是可数紧的当且仅当每一无限开覆盖具有真子覆盖.

3.18 空间 X 是可数紧的当且仅当每一个具有有限交性质的闭集族具有可数交性质(即任意可数交不空).

3.19 空间 X 是可数紧的,当且仅当每一递减的不空闭集序列$\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$有$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$.

3.20 正则空间 X 是可数紧的当且仅当每一按点有限开覆盖具有有限子覆盖(注意在 T_2 空间不复成立).

3.21 完全正则空间 X 是伪紧的,当且仅当 X 中的每一局部有限的不空开集族是有限的.

3.22 完全正则空间是伪紧的,当且仅当每一局部有限可数开覆盖具有真子覆盖.

3.23 证明可数紧空间与紧空间的积是可数紧空间.

3.24 设 Φ 是空间 X 到 $[0,1]$ 的连续函数族,能区别点与闭集.则 X 是完全正则空间.

3.25 证明空间 $[0,\omega_1)$ 的 Stone-Čech 紧化 $\beta([0,\omega_1))$ 同胚于 $[0,\omega_1]$.

3.26 k 空间 X 到空间 Y 的映射是连续的当且仅当在 X 的每一紧子集上是连续的.

3.27 完全正则空间 X 是局部紧的当且仅当 X 开于任一 T_2 紧化 (f, X).

3.28 空间 X 称为**序列型**(sequential)空间,如果集 U 是这空间的开集当且仅当每一收敛于 U 的点列终留于 U.试证明序列型空间是 k 空间.

3.29 可数个序列式紧空间的积是序列式紧的.

3.30 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的完备映射,则对 Y 中的任一紧集 K, $f^{-1}(K)$ 是 X 中的紧集.

3.31 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到 Y 上的**准完备**(quasiperfect)映射(闭映射且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可数紧的).则对 Y 中的任一可数紧集 K, $f^{-1}(K)$ 是 X 中可数紧集.

3.32 设有空间 X_1, X_2,紧集 $A_i\subset X_i(i=1,2)$, W 是积空间 $X_1\times X_2$ 的开集, $W\supset A_1\times A_2$,则存在 X_i 中的开集 $U_i\supset A_i(i=1,2)$,使 $W\supset U_1\times U_2\supset A_1\times A_2$.把上述两个空间的情况推广到任意有限个空间的情况.

第四章　度 量 空 间

度量空间在分析学中有广泛的应用.数直线 R, n 维欧几里德空间 R^n,连续函数空间,希尔伯特空间等都是度量空间.除紧空间外,度量空间可以作为又一类重要的拓扑空间类,它给许多拓扑概念以适当的直观描述.

§1.　度 量 空 间

定义 4.1.1　设 X 是一集,如果对任意两点 $x,y\in X$,可以定义一个非负值函数 $\rho(x,y)$满足:

(M1)　$\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

(M2)　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$,

(M3)　$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$ $z\in X$,(三角形不等式)

则称 $\rho(x,y)$为 X 上的**度量**(或**距离** metric),集 X 带有度量 ρ 后称为**度量空间**(或**距离空间** metric space),可以记为(X,ρ),或简记为 X.

(M1)—(M3)称为**度量公理**(或**距离公理**),(M1)指出不同两点间的度量(距离)是正值,且点到自己的度量(距离)是零,(M2)指出 $\rho(x,y)$是一对称函数,不依赖点 x,y 的次序,(M3)称为三角不等式,在平面上,直观地表示为三角形两边的和不小于第三边.

如果在定义 4.1.1 中,把(M1)换为:

(M1′)　$\rho(x,y)=0$,当 $x=y$,

则得到的 $\rho(x,y)$称为 X 上的**拟度量**(或**拟距离** pseudometric),相应的(X,ρ)称为**拟度量空间**(或**拟距离空间** pseudometric space),容易看到在这样的空间里,不同两点间的距离可以是零,这种空间

显得非常广泛,我们不去研究它,这里引入拟度量,只是为了在某些情况下,拟度量概念是一较便利的工具.

实数集 R 中的两点 x,y 的度量可规定为 $\rho(x,y)=|x-y|$,显然满足度量公理,所以 R 是度量空间.这一度量空间称为 R 上的**通常度量**(usual metric).

一般说,如对 n 维欧几里得空间 R^n 中的点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$,规定

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2},$$

则 $\rho(x,y)$ 满足度量公理(读者自证),从而 R^n 是度量空间.上述度量称为**欧几里得度量**(Euclidean metric).

对任一集 X,规定 $\rho^*(x,x)=0$, $\rho^*(x,y)=1$, $x\neq y$,则显然满足度量公理,从而 (X,ρ^*) 是度量空间.

分析学中常用到的度量空间,除数直线 R 和 n 维欧几里得空间 R^n 外,有连续函数空间(习题 4.1),勒贝格平方可和函数空间(习题 4.2)及希尔伯特(Hilbert)空间(见下例)等.

例 4.1.2 考察满足条件 $\sum_{i=1}^{\infty}x_i^2<\infty$ 的所有实数序列 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ 所成的集.在这集上规定($y=(y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots)$):

$$\rho(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}. \tag{1}$$

下面证明 $\rho(x,y)$ 满足度量公理.

首先证明(1)式是有意义的,也就是级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(x_i-y_i)^2$ 总是收敛的.为此,可引用柯西(Cauchy)不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2, \tag{2}$$

这里所有 a_i,b_i 都是实数.由(2)可得

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2+2\sum_{i=1}^{n}a_ib_i+\sum_{i=1}^{n}b_i^2$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$= \left(\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{1/2}\right)^2.$$

上式两端开方后，以 x_i 代 a_i，以 $-y_i$ 代 b_i，则有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{1/2}. \tag{3}$$

(3)式对任意自然数 n 成立. 让 $n \to \infty$，按假设条件，(3)式右端趋有限数为极限，从而当 $n \to \infty$ 时，(3)式左端不减而有界，故也趋有限数为极限. 所以级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2$ 收敛.

显然，$\rho(x, y)$ 满足度量公理中的(M1)，(M2)，下证满足(M3). 为此，在(3)式以 $-y_i$ 代 y_i，让 $n \to \infty$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (x_i + y_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right)^{1/2}. \tag{4}$$

设 a, b, c 是所考察集中的任意三点，这里

$$a = (a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots),$$

$$b = (b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots),$$

$$c = (c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots).$$

在(4)式中以 $a_i - c_i$ 代 x_i，$c_i - b_i$ 代 y_i，$a_i - b_i$ 代 $x_i + y_i$，则得

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - b_i)^2\right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - c_i)^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{\infty} (c_i - b_i)^2\right)^{1/2}.$$

到此证明了 $\rho(x, y)$ 满足($M3$). 所以所考察集规定了上述度量 $\rho(x, y)$ 后形成一度量空间，称为**希尔伯特(Hilbert)空间，或 l_2 空间.**

例 4.1.3 考察所有自然数的序列$(n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots)$所成的集. 对这集的任意两点

$$x = (n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots), y = (m_1, m_2, \cdots, m_k, \cdots)$$

规定

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y, \\ 1/\lambda & x \neq y. \end{cases}$$

这里 λ 是使 $n_\lambda \neq m_\lambda$ 的最小自然数. 下面证明 $\rho(x,y)$ 满足度量公理,从而所考察的集形成度量空间,称为**贝勒零维空间**(Baire's zero-dimensional space).

$\rho(x,y)$ 显然满足度量公理的(M1),(M2),下证满足(M3). 设 x,y,z 是任意三点. 当 $\rho(x,y)=0$ 时,当然满足(M3). 现设 $\rho(x,y)=1/\lambda_0$. 即

$$x = (n_1, n_2, \cdots, n_{\lambda_0-1}, n_{\lambda_0}, \cdots),$$

$$y = (n_1, n_2, \cdots, n_{\lambda_0-1}, m_{\lambda_0}, \cdots),$$

这里 $n_{\lambda_0} \neq m_{\lambda 0}$. 设

$$z = (l_1, l_2, \cdots, l_{\lambda_0-1}, l_{\lambda_0}, \cdots).$$

分两种情况讨论:

(i) z 的前 $\lambda_0 - 1$ 个自然数中有某些自然数与 x 的相应位置的自然数不同,即存在 $\lambda_1 < \lambda_0$,使 $l_{\lambda_1} \neq n_{\lambda_1}$,则 $\rho(x,z) \geqslant \frac{1}{\lambda_1} > 1/\lambda_0$,这时,不论 $\rho(z,y)$ 等于多少,总有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

(ii) z 的前 $\lambda_0 - 1$ 个自然数分别与 x,y 的相应位置的自然数相等,即对 $\lambda < \lambda_0$ 有 $l_\lambda = n_\lambda$. 如果 $\rho(x,z) = \frac{1}{\lambda_0}$,显然有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$,如果 $\rho(x,z) = \frac{1}{\lambda_2}$,$\lambda_2 > \lambda_0$,这说明至少有 $l_{\lambda_0} = n_{\lambda_0}$. 由于 $m_{\lambda_0} \neq n_{\lambda_0}$,所以 $l_{\lambda_0} \neq m_{\lambda_0}$,从而 $\rho(y) = \frac{1}{\lambda_0}$. 所以也有 $\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(z,y)$.

到此证明了 $\rho(x,y)$ 满足(M3).

上述序列的元素取自自然数集. 一般情况可取自任意集 A,这时所得的度量空间称为**广义贝勒零维空间**,记为 $N(A)$.

下面叙述度量空间与拓扑空间的关系.

设 (X,ρ) 是一度量空间,称集 $S_\varepsilon(x_0) = \{x : x \in X, \rho(x,x_0) < \varepsilon\}$,为包含点 x_0 的**开球**(或 ε 开球).

在数直线 R 上,$S_\varepsilon(x_0)=(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$是以 x_0 为中心的开区间;在 R^2 上,$S_\varepsilon(x_0)$是以 x_0 为中心,以 ε 为半径的开圆(不包含圆周上的点).

定理 4.1.4 设(X,ρ)是度量空间,对每一$x\in X$,置 $\mathscr{U}(x)=\{S_\varepsilon(x):\varepsilon>0\}$,则开球族 $\mathscr{U}=\bigcup\{\mathscr{U}(x):x\in X\}=\{S_\varepsilon(x):\varepsilon>0,x\in X\}$以及空集$\varnothing$形成 X 上拓扑的开基.

证明 为此证明满足开基的条件(B1)—(B3)(见定理 1.2.3),其中(B1),(B3)是显然满足的($\varnothing$属于这集族及$\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}\}=X$).下证满足(B2).设开球 $S_r(x)\cap S_s(y)\neq\varnothing$,对任一 $z\in S_r(x)\cap S_s(y)$,取

$$t=\min(r-\rho(x,z),s-\rho(y,z)).$$

得开球 $S_t(z)$.下证 $S_t(z)\subset S_r(x)\cap S_s(y)$.对任一 $w\in S_r(z)$,$\rho(w,z)<t$,由(M3),

$$\begin{aligned}\rho(w,x)&\leqslant\rho(w,z)+\rho(z,x)<t+\rho(z,x)\\&\leqslant r-\rho(x,z)+\rho(z,x)=r.\end{aligned}$$

所以 $S_t(z)\subset S_r(x)$,同理可证 $S_t(z)\subset S_s(y)$,故得 $z\in S_t(z)\subset S_r(x)\cap S_s(y)$.证完.

由以上所证开球族$\{S_\varepsilon(x):\varepsilon>0,x\in X\}$以及$\varnothing$形成 X 上拓扑的开基.这一由度量 ρ 导出的X 上的拓扑称为**度量拓扑**(metric topology).在上述意义下,度量空间是一种特殊类型的拓扑空间.

数直线 R 上的度量$\rho(x,y)=|x-y|$所导出的度量拓扑正好是 R 上的通常拓扑.

例 4.1.5 对实数平面 R^2 的任意两点 $P_1=(x_1,y_1)$,$P_2=(x_2,y_2)$,规定

$$\begin{aligned}\rho(P_1,P_2)&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},\\\rho'(P_1,P_2)&=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|),\\\rho''(P_1,P_2)&=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.\end{aligned}$$

下面证明 ρ,ρ',ρ''都满足度量公理,是平面 R^2 上的三种不同的度量.

首先，直观地验证它们的不同. 可以取 $P_1=O(0,0)$，$P_2=A(1,1)$，则 $\rho(O,A)=\sqrt{2}$，$\rho'(0,A)=1$，$\rho''(0,A)=2$.

按 ρ 是平面 R^2 上的欧几里得度量，已见于前. 只要证明 ρ'，ρ''满足度量公理. 其中(M1)，(M2)，是显然的. 现验证(M3). 设 $P_3=(x_3,y_3)$.

$$
\begin{aligned}
\rho'(P_1P_2) &= \max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)\\
&= \max(|x_1-x_3+x_3-x_2|,|y_1-y_3+y_3-y_2|)\\
&\leqslant \max(|x_1-x_3|,|y_1-y_3|)\\
&\quad+\max(|x_3-x_2|,|y_3-y_2|)\\
&= \rho'(P_1,P_2)+\rho'(P_2,P_3),\\
\rho''(P_1,P_2) &= |x_1-x_2|+|y_1-y_2|\\
&= |x_1-x_3+x_3-x_2|+|y_1-y_3+y_3-y_2|\\
&\leqslant |x_1-x_3|+|y_1-y_3|+|x_3-x_2|+|y_3-y_2|)\\
&= \rho''(P_1,P_3)+\rho''(P_3,P_2).
\end{aligned}
$$

所以，ρ'，ρ''是 R^2 上的度量.

由欧几里得度量 ρ 导出的度量拓扑正好是平面 R^2 上的通常拓扑. 一切开球(其实是平面上的开圆) $S_\varepsilon(P)=\{P':\rho(P,P')<\varepsilon\}$ 及 $\varnothing$ 形成这拓扑的基. 由于对任一开球 $S_\varepsilon(P)$，可以证明存在按度量 ρ''的开球 $S''_\varepsilon(P)$ 使 $S''_\varepsilon(P)\subset S_\varepsilon(P)$，所以一切按 ρ''的开球及 $\varnothing$ 也形成这拓扑的基. 下面证明 $S''_\varepsilon(P)\subset S_\varepsilon(P)$. 设 $P'=(x',y')\in S''_\varepsilon(P)$，则 $|x'-x|+|y'-y|<\varepsilon$，由不等式

$$
\begin{aligned}
\sqrt{a^2+b^2} &= \sqrt{|a|^2+|b|^2}\\
&\leqslant \sqrt{|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2}\\
&= |a|+|b|
\end{aligned}
$$

知 $\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}\leqslant|x'-x|+|y'-y|<\varepsilon$，即 $\rho(P',P)<\varepsilon$. 所以 $P'\in S_\varepsilon(P)$，$S''(P)\subset S_\varepsilon(P)$.

所以由度量 ρ''导出的度量拓扑也就是 R^2 上的通常拓扑. 类

似地，可以证明由度量 ρ' 导出的度量拓扑也就是 R^2 上的通常拓扑. 为此，只要证明对任一开球 $S_\varepsilon(P)$，存在按度量 ρ' 的开球 $S'_{\varepsilon/\sqrt{2}}(P)$，使 $S'_{\varepsilon/\sqrt{2}}(P)\subset S_\varepsilon(P)$. 证明是类似的，留给读者.

由上看到 R^2 上的三种不同的度量，相应的度量拓扑是相同的，都是 R^2 上的通常拓扑.

前面述及的度量空间 (X,ρ^*) $(\rho^*(x,x)=0,\rho(x,y)=1,x\neq y)$，由 ρ^* 导出的度量拓扑是离散拓扑，这是因为相应的 $\mathscr{U}(x)$ 可以仅由单点集 $\{x\}$ 组成(这时开球 $S_\varepsilon(x)=\{x\},\varepsilon<1$)，也就是单点集是开的.

在定理 4.1.4 中，以 $\{S_{1/n}(x):n=1,2,\cdots\}$ 代替 $\{S_\varepsilon(x):\varepsilon>0\}$ 作为 $\mathscr{U}(x)$，由前面的论证可以看到这样的 $\mathscr{U}(x)$ 以及 $\varnothing$ 同样形成 X 上的拓扑的开基. 所以度量空间是一满足第一可数公理的拓扑空间.

由度量公理的 $(M1)$，不同两点的度量总是大于零的，也就是 $\rho(x,y)=r>0,x\neq y$. 可以取 $S_{r/2}(x)$，$S_{r/2}(y)$ 为分别包含 x,y 的不相交邻域. 所以度量空间是一 T_2 空间. 下面还可证明度量空间是正规空间. (定理 4.1.10).

定理 4.1.6 设 (X,ρ) 是度量空间，则在度量拓扑意义下，度量 $\rho(x,y)$ 是由积空间 $X\times X$ 到非负实数空间的连续映射.

证明 由度量公理的 $(M3)$，$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)$，这里 x_0 是 X 中任一点，从而有

$$\rho(x,y)-\rho(x_0,y)\leqslant\rho(x,x_0).$$

交换 x,x_0 的位置得

$$\rho(x_0,y)-\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0).$$

由度量公理的 $(M2)$，合并上两式，得到

$$|\rho(x,y)-\rho(x_0,y)|\leqslant\rho(x,x_0).$$

对 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$，对任何 $x\in S_\varepsilon(x_0)$ 都有 $|\rho(x,y)-\rho(x_0,y)|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}\rho(x,y)=\rho(x_0,y)$. 这说明作为二元函数的 $\rho(x,y)$ 对单变量 x 连续，且可以看到 $\delta(\varepsilon)$ 仅与 ε 有关，与另一变

量 y 无关,也就是对 x 的连续性关于 y 是一致的.类似地,对单变量 y 也是连续的.从而知 $\rho(x,y)$ 在 $X\times X$ 上连续.证完.

定义 4.1.7 设(X,ρ)是度量空间,对集 $A,B\subset X$ 称$D(B,x)=D(x,B)=\inf\limits_{y\in B}\{\rho(x,y)\}$ 为**点 x 到集B 的距离.** $D(A,B)=\inf\limits_{x\in A,y\in B}\{\rho(x,y)\}$ **为集 A 到集B 的距离.**

定理 4.1.8 设 A 是度量空间(X,ρ)的子集,则在度量拓扑意义下,$D(A,x)$是 X 到非负实数空间的连续映射.

证明 由度量公理$(M3)$,$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$,从而得

$$\inf_{z\in A}\{\rho(x,z)\}\leqslant\rho(x,y)+\inf_{z\in A}\{\rho(y,z)\}.$$

这就是 $D(A,x)\leqslant\rho(x,y)+D(A,y)$.从而有

$$D(A,x)-D(A,y)\leqslant\rho(x,y).$$

交换 x,y 的位置,得

$$D(A,y)-D(A,x)\leqslant\rho(x,y).$$

合并以上两式,得

$$|D(A,y)-D(A,x)|\leqslant\rho(x,y).$$

从而对任何 $y\in S_\varepsilon(x)$,都有$|D(A,y)-D(A,x)|<\varepsilon$.所以 $D(A,x)$在 X 上连续.证完.

在下面叙述度量空间的性质时,所涉及的拓扑空间的概念总是指在度量拓扑意义下的,不再特别指出.

定理 4.1.9 设(X,ρ)是度量空间,$A\subset X$.则 $\overline{A}=\{x:D(A,x)=0\}$.

证明 由定理 4.1.8,$D(A,x)$是 X 到非负实数空间的连续映射,单点集$\{0\}$闭于非负实数空间,由连续性知,作为$\{0\}$的原象$\{x:D(A,x)=0\}$闭于 X,此外,显然$\{x:D(A,x)=0\}\supset A$.从而$\{x:D(A,x)=0\}\supset\overline{A}$.

相反地,设 $y\notin\overline{A}$,存在 $S_\varepsilon(y)$使 $S_\varepsilon(y)\cap A=\varnothing$,从而 $D(A,y)\geqslant\varepsilon$,所以 $y\notin\{x:D(x,A)=0\}$.故有$\{x:D(A,x)=0\}\subset\overline{A}$.证完.

定理 4.1.10 度量空间是正规空间.

证明 设 A,B 是度量空间(X,ρ)的不相交的闭集,由定理 4.1.9,$A=\{x:D(A,x)=0\}$,$B=\{x:D(B,x)=0\}$.由定理 4.1.8,$D(A,x)$,$D(B,x)$都是 X 上的连续的实值函数,置

$$D(x)=D(A,x)-D(B,x),$$

则 $D(x)$是 X 上的连续的实值函数.置

$$U=\{x:D(x)<0\},V=\{x:D(x)>0\}.$$

由于 $U=D^{-1}((-\infty,0))$,$V=D^{-1}((0,+\infty))$分别是数直线 R 内不相交的开集$(-\infty,0)$,$(0,+\infty)$关于映射 D 的原象,所以 U,V 是不相交的开集.下面证明 $U\supset A$ 及 $V\supset B$.因为 $A\cap B=\varnothing$,$x\in A\Rightarrow x\notin B$,$x\in A\Rightarrow D(A,x)=0$,$x\notin B\Rightarrow D(B,x)>0$,所以 $D(x)<0$.从而 $A\subset U$.同理可证 $B\subset V$.所以度量空间是正规的.证完.

设(X,ρ)是度量空间,$A\subset X$,在原度量 ρ 下,(A,ρ)仍是度量空间(度量空间具有遗传性,参见定理 2.2.17 后面),且由此而导得的 A 上的度量拓扑正好是X 上的度量拓扑的相对拓扑,由定理 4.1.10,可知度量空间是遗传正规空间(即完全正规空间).

定理 4.1.11 度量空间的闭子集是 G_δ 集.

证明 由定理 4.1.9,度量空间(X,ρ)中的闭集 $F=\{x:D(F,x)=0\}$.对 $n=1,2,\cdots$,置 $G_n=\{x:D(F,x)<1/n\}$,由于 $D(F,x)$是 X 到$[0,+\infty)$的连续映射,$[0,1/n)$开于$[0,+\infty)$,所以 G_n 是开集,显然

$$\{x:D(F,x)=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}(\{x:D(F,x)<1/n\}),$$

是即 $F=\bigcap_{n=1}^{\infty}G_n$,$F$ 是G_δ 集.证完.

定义 4.1.12 拓扑空间称为**完备的**(perfect),如果每一闭集是 G_δ 集,称为**完备正规的**(perfectly nomal),如果这空间是正规的,又是完备的.

推论 4.1.13 度量空间是完备正规空间.

度量空间满足第一可数公理,但未必满足第二可数公理(即未必具有可数基).以前述的度量空间(X,ρ^*)为例,当 X 是不可数

集时，这空间没有可数基.

定理 4.1.14 在度量空间(X,ρ)中，下列论断等价：

(i)具有可数基，

(ii)具有 Lindelöf 性质，

(iii)每一个闭的离散子空间是可数集，

(iv)每一个离散子空间是可数集，

(v)每一个两两不相交的开集族是可数的(即可数链条件，见习题 2.20)，

(vi)空间 X 是可分空间.

证明 (i)⇒(ii)见定理 2.3.4.

(ii)⇒(iii)设 A 是空间 X 的任一闭的离散子空间，对每一 $x\in A$ 存在X 中的开集 U_x 使 $U_x\cap A=\{x\}$. 置 $\mathscr{U}=\{U_x\}_{x\in A}\cup\{X-A\}$. 因 A 是闭集，$\mathscr{U}$ 形成空间 X 的开覆盖. 由(ii)，X 具有 Lindelöf 性质，所以 $\mathscr{U}$ 必须是可数覆盖. 集 A 必须是可数集.

(iii)⇒(iv)设 B 是空间X 的任一离散子空间. 由离散性知集 B 的每一点都不是B 的聚点，集 B 的闭包$\overline{B}$ 中去掉集B 的聚点所成的集(即集 B 的导集 B^d)后得到集 B. 由于度量空间是 T_2 的，从而是 T_1 的，所以导集 B^d 是闭集，当然也是子空间 $\overline{B}$ 中的闭集. 从而 B 是子空间$\overline{B}$ 的开集. 由于度量空间的子空间是度量空间及度量空间的闭集是 G_δ 集(定理 4.1.11)，所以 B 是子空间 $\overline{B}$ 的 F_σ 集，即 $B=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$，每一 A_i 闭于$\overline{B}$，从而闭于 X. A_i 是空间 X 的闭的离散子空间，由(iii)，A_i 是可数集，所以 B 是可数集.

(iv)⇒(v)设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是空间$X$ 的任一两两不相交的开集族，对每一 $\alpha\in A$，取点 $x_\alpha\in U_\alpha$，则 $B=\{x_\alpha:\alpha\in A\}$是一离散子空间，由(iv)，$B$ 是可数集，从而 $\mathscr{U}$是可数集族.

(v)⇒(vi)对每一 $i=1,2,\cdots$，置 $\mathscr{F}_i$ 为使任意两点间的距离大于 $1/i$ 的集所组成的集族. 容易验证集族 $\mathscr{F}_i$ 是有限特征的. 由 Tukey 引理(参见预备知识§3 及第三章§2)，$\mathscr{F}_i$ 中存在极大元A_i $(i=1,2,\cdots)$. 由于任意两点 $x,y\in A_i$，$\rho(x,y)>\dfrac{1}{i}$，对 A_i 的每

一点作开球$S_{1/2i}(x)$，则$\{S_{1/2i}(x): x\in A_i\}$是两两不相交的开集族. 由(v)知这开集族是可数集族，从而A_i是可数集，$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$也是可数集. 下证可数集$A$稠密于$X$，即$\overline{A}=X$.

如不然，存在$x\in X-\overline{A}$，由定理4.1.9，$D(A,x)>0$. 存在自然数i_0使$D(A,x)>\frac{1}{i_0}$，从而$D(A_{i_0},x)\geqslant D(A,x)>\frac{1}{i_0}$. 这说明点$x$到$Ai_0$的每一点的距离大于$\frac{1}{i_0}$，这是不可能的，因为$A_{i_0}$是$\mathscr{F}_{i_0}$的极大元.

(vi)⇒(i)设$A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$是空间$X$的可数稠密子集，对每一$x_n\in A$，每一有理数$r\in Q$($Q$是有理数集)，置开球族

$$\mathscr{U}(x_n)=\{S_r(x_n): r\in Q\},\mathscr{U}=\bigcup\{\mathscr{U}(x_n): n=1,2,\cdots\}.$$

下证$\mathscr{U}$是空间X的可数基. 首先，由于集A是可数的，有理数集Q是可数的. 所以$\mathscr{U}$是可数集族. 对每一$x\in X$及开集$U\ni x$，存在$S_r(x)\subset U$. 因为A在X中稠密，存在$x_i\in A$使$\rho(x_i,x)<\frac{r}{3}$，置$V=S_{\frac{2r}{3}}(x_i)$. 因$\rho(x_i,x)<\frac{r}{3}$，所以$x\in V$，对每一$x'\in V$，$\rho(x_i,x')<\frac{2r}{3}$，故有

$$\rho(x',x)\leqslant\rho(x',x_i)+\rho(x_i,x)<\frac{2r}{3}+\frac{r}{3}=r.$$

所以$V\subset S_r(x)$，故有$x\in V\subset U$，$\mathscr{U}$是空间X的基. 证完.

度量空间未必是紧空间(例如(X,ρ^*)当X是无限集情况). 由下列定理可知度量空间甚至未必是伪紧的.

定理4.1.15 在度量空间(X,ρ)，下列论断等价：

(i)X上的每一实值连续函数有界(伪紧性)，

(ii)X的每一无限子集有聚点，

(iii)X的每一无限子集有ω聚点，

(iv)X中的每一序列有聚点，

(v)X的每一可数开覆盖具有有限子覆盖(可数紧性)，

(vi) X 的每一序列具有收敛子序列(序列紧性),

(vii) X 的每一开覆盖有有限子覆盖(紧性).

证明 在任何拓扑空间,(iii),(iv),(v)是等价的(引理3.5.5、定理3.5.3).在 T_1 空间,(ii),(iii),(iv),(v)是等价的(定理3.5.6).在正规空间,(i),(ii),(iii),(iv),(v)是等价的(定理3.5.10,定理3.5.11),在满足第一可数公理的空间,(iii),(iv),(v),(vi)是等价的(定理3.5.8,定理3.5.9).由于度量空间是正规的(定理4.1.10)且满足第一可数公理,所以在度量空间(i)—(vi)等价.为此只要证明在度量空间,(vii)与(i)—(vi)中某一论断等价就可以.

易知在 Lindelöf 空间,紧性与可数紧性等价(即(vii)与(v)等价).下面证明:在度量空间,(ii)⇒可分性,从而由定理4.1.14,知具有 Lindelöf 性质,以完成证明.

证(ii)⇒可分性,可借用定理4.1.14中(v)⇒(vi)的证法.在引用 Tukey 引理得到 $A_i(i=1,2,\cdots)$后,可知 A_i 无聚点.由(ii),A_i 只能是有限集,$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ 是可数集.以后证法同.证完.

度量空间未必是局部紧的.取度量空间(数直线)R 的所有有理点 r 组成的子空间 Q(或无理点 η 所组成的子空间 I),这度量空间的任一开球 $S_\varepsilon(r)$(或 $S_\varepsilon(\eta)$)或任何包含某一开球的集都不可能是紧的,从而度量空间 Q(或 I)不是局部紧的(定义3.4.1).此外,局部紧的度量空间未必是紧的(仍取(X,ρ^*)当 X 是无限集的情况为例).

定义4.1.16 设 A 是度量空间(X,ρ)的子集,称 $d(A)=\sup\limits_{x,y\in A}\{\rho(x,y)\}$ 为集 A 的**直径**(diameter);当上确界不存在时,称直径为无限大,记为 $d(A)=\infty$.

定理4.1.17 设(X,ρ)是度量空间,置 $\rho'(x,y)=\min(1,\rho(x,y))$,则$(X,\rho')$也是度量空间,且 ρ,ρ'导出相同的度量拓扑.

证明 显然 ρ'满足度量公理的$(M1)$,$(M2)$.下证 ρ'满足$(M3)$,即证

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)$$

$$\geqslant \rho'(x,z) \Rightarrow \rho'(x,y) + \rho'(y,z)$$
$$\geqslant \rho'(x,z). \tag{5}$$

令 $\rho(x,y)=a,\rho(y,z)=b,\rho(x,z)=c$，则(5)式转化为

$$a + b \geqslant c \Rightarrow \min(1,a) + \min(1,b) \geqslant \min(1,c). \tag{6}$$

a,b,c 都是非负实数，当 a,b 中有一个不小于 1 的，$\min(1,a)$，$\min(1,b)$中有一个是 1，(b)式当然成立. 当 a,b 都小于 1 时，$\min(1,a)=a,\min(1,b)=b$，则有 $\min(1,a)+\min(1,b)=a+b\geqslant c \geqslant \min(1,c)$，到此(6)式(也就是(5)式)得证. 所以$(X,\rho')$是度量空间.

下证 X 上的不同度量ρ,ρ'导出相同的度量拓扑. 记

$$S_\varepsilon(x) = \{x' : x' \in X, \rho(x',x) < \varepsilon\},$$
$$S'_\varepsilon(x) = \{x' : x' \in X, \rho'(x',x) < \varepsilon\}.$$

当$0<\varepsilon<1$时，$S_\varepsilon(x)=S'_\varepsilon(x)$，故 ρ,ρ'导出的度量拓扑是相同的. 证完.

从上述定理可以看到每一个度量空间在度量拓扑的意义下同胚于某一直径不大于 1 的度量空间，所以在以下论证中，可以假设每一度量空间的直径不大于 1.

定义 4.1.18 度量空间(X,ρ)到度量空间(X',ρ')上的映射 f 称为**等距映射**(isometry mapping)，如果对 X 中的任意两点 x,y 有$\rho(x,y)=\rho'(f(x),f(y))$.

等距映射必须是单映射($x\neq x' \Rightarrow f(x)\neq f(x')$). 当 f 是满映射时，f 是一一对应的. 从而等距映射的逆映射是等距映射. 此外，等距映射 f 把X 中的开球$S_r(x)$映成 X'中的开球$S'_r(f(x))$. 所以等距映射是开映射，从而当等距映射是满映射时是一同胚映射.

等距映射所保持的性质称为**度量不变量**(metric invariant). 度量不变量未必是**拓扑不变量**(topological invariant，为同胚映射所保持的性质). 例如数直线 R 与R 上的开区间 $I=(0,1)$同胚. 但是 $d(R)=\infty,d(I)=1$. 所以集的直径是度量不变量，不是拓扑不变量.

定理 4.1.19 设$\{(X_n,\rho_n)\}$是度量空间的序列,且每一度量空间(X_n,ρ_n)的直径不大于 1.对积集 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 的任意两点$x=\{x_n\}$,$y=\{y_n\}$,定义

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\rho_n(x_n,y_n).$$

则ρ是X上的度量,且由ρ导得的X上的度量拓扑就是由ρ_n导出的X_n上的度量拓扑的积拓扑.

证明 容易验证ρ满足度量公理,是X上的度量拓扑,下证由ρ导得的度量拓扑(以下简称度量拓扑)就是由ρ_n导出X_n上的度量拓扑的积拓扑(以下简称积拓扑),设度量拓扑为$\mathscr{V}=\{V\}$,积拓扑为$\mathscr{U}=\{U\}$.

设$V=S_r(x)$是度量拓扑$\mathscr{V}$中的任一开球,存在自然数n_0,使$\frac{1}{2^{n_0}}<r$.取积拓扑$\mathscr{U}$的基的元素

$$U=\{y:\rho_n(x_n,y_n)<\frac{1}{2^{n_0+1}},n\leqslant n_0+1\},$$

则对每一$y\in U$,

$$\rho(x,y)\leqslant\frac{1}{2^{n_0+1}}\sum_{n=1}^{n_0+1}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=n_0+2}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

由于

$$\sum_{n+1}^{n_0+1}\frac{1}{2^n}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1,\ \sum_{n=n_0+2}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n_0+1}},$$

所以

$$\rho(x,y)<\frac{1}{2^{n_0+1}}+\frac{1}{2^{n_0+1}}=\frac{1}{2^{n_0}}.$$

从而$U\subset V$.所以度量拓扑$\mathscr{V}$中的每一开集是积拓扑$\mathscr{U}$中的开集.

反之,设$U\in\mathscr{U}$是积拓扑$\mathscr{U}$的次基中的元素,即U具有形式$\{x:x_n\in W\}$,W是X_n中的开集.因(X_n,ρ_n)是度量空间,存在开球$S_r^{(n)}(x_n)$使$S_r^{(n)}(x_n)\subset W$(这里$S_r^{(n)}(x_n)=\{y_n:\rho_n(y_n,x_n)<$

$r\})$,由 ρ 的定义.

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n(x_n,y_n) \geqslant \frac{1}{2^n}\rho_n(x_n,y_n).$$

由上式可知为了使 $\rho_n(x_n,y_n)<r$,只要 $\rho(x,y)<\frac{r}{2^n}$.这说明只要取关于 x 的开球 $S_{r/2^n}(x)\in\mathscr{V}$,即有 $S_{r/2^n}(x)\subset U\in\mathscr{U}$.以上是对 $\mathscr{U}$ 的次基中的元素证明的,从而知对 $\mathscr{U}$ 中的任何元素 U,存在 $\mathscr{V}$ 中的元素 V 使 $V\subset U$.这说明积拓扑 $\mathscr{U}$ 中的每一开集是度量拓扑 $\mathscr{V}$ 中的开集.

综上所述,由 ρ 导出的 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 上的度量拓扑就是由 ρ_n 导出的 $X_n(n=1,2,\cdots)$上的度量拓扑的积拓扑.证完.

超过可数个度量空间的积未必是度量空间,由于度量空间满足第一可数公理,只要证明"超过可数个满足第一可数公理的非平凡空间 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$($A$ 是不可数集)的积不满足第一可数公理".按积空间 $X=\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的基 $\mathscr{B}=\{B\}$ 的元素 B 具有如下形式:B 在坐标空间 X_α 上的投影 $p_\alpha(B)$除有限个 α 外,都有 $p_\alpha(B)=X_\alpha$.由于每一 X_α 不是平凡空间,存在包含某一点 $x_\alpha\in X_\alpha$ 的开的真子集 $V_\alpha(V_\alpha\neq X_\alpha)$.下证点 $x=\{x_\alpha\}(\in\prod_{\alpha\in A}X_\alpha)$不存在可数邻域基.如不然,设 $\{U_n(x)\}$是点 x 的可数邻域基.每一 $U_n(x)$应包含 $\mathscr{B}$ 中的元,从而由 A 的不可数性,必存在 $\alpha_0\in A$ 使对任何 $U_n(x)(n=1,2,\cdots)$,$p_{\alpha_0}(U_n(x))=X_{\alpha_0}$.取包含 x_{α_0} 的开的真子集 $V_{\alpha_0}\subset X_{\alpha_0}$,则包含点 $x=\{x_\alpha\}$ 的开集 $p_{\alpha_0}^{-1}(V_{\alpha_0})$不可能包含着任一 $U_n(x)$.这与 $\{U_n(x)\}$是点 x 的邻域基矛盾.证完.

定理 4.1.20 设 $\{(X_\alpha,\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是一族两两不相交的度量空间,则拓扑和 $X=\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 是度量空间.

证明 由定理 4.1.17,对每一 $\alpha\in A$,可设对任何 $x,y\in X_\alpha$,$\rho_\alpha(x,y)\leqslant 1$.对任何 $x,y\in X$,定义 ρ 如下:

$$\rho(x,y)\begin{cases}\rho_\alpha(x,y), & \text{当 } x,y \text{ 同属某一 } X_\alpha \text{ 时},\\ 1, & \text{在相反情况}.\end{cases}$$

显然 ρ 满足度量公理的$(M1)$,$(M2)$. 下面验证 ρ 满足$(M3)$:

$$\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z).$$

情况(i),x,y 同属于某一X_α,上式左端 $\rho(x,z)=\rho_\alpha(x,z)$. 如果 y 也属于X_α,则上式右端为 $\rho_\alpha(x,y)+\rho_\alpha(y,z)$. 因 ρ_α 是X_α 上的度量,所以上式成立. 如果 $y \notin X_\alpha$,则由 ρ 的定义,上式右端 $\rho(x,y)=\rho(y,z)=1$,$\rho(x,y)+\rho(y,z)=2$,上式也成立.

情况(ii)$x \in X_{\alpha_1}$,$z \in X_{\alpha_2}(\alpha_1 \neq \alpha_2)$,这时上式左端等于 1. 因 $X_{\alpha_1} \cap X_{\alpha_2}=\varnothing$,$y$ 不能同时属于X_{α_1}及 X_{α_2}所以上式右端不小于 1. 上式成立.

到此证明了 ρ 是X 上的度量,(X,ρ)是度量空间,由拓扑和的定义(定义 3.1.21),易知由 ρ 导出的X 上的度量拓扑正好是由 ρ_α 导出的X_α 上的度量拓扑的拓扑和.

上述定理指出任意多个互不相交的开的度量子空间的并是度量空间. 下面给出这样的例,可数个互不相交的闭的度量子空间的并不是度量空间.

例 4.1.21 设集 $E \subset R^2$ 是实数平面的子集,是由 Y 轴上的点及形如$\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n^2}\right)$的点组成,这里 n 取遍自然数,k 取遍整数,在 E 上给以如下拓扑:单点集$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n^2}\right)\right\}$是开的,$Y$ 轴上的点$(0,y_0)$的开邻域规定为$\{U_n(y_0):n=1,2,\cdots\}$,这里

$$U_n(y_0)=\{(x,y):x \leqslant \frac{1}{n},|y-y_0| \leqslant x\}.$$

易知空间 E 的每一单点集是闭的,Y 轴也是E 的闭集. 此外,Y 轴上的每点都开于子空间 Y,所以 Y 是离散闭子空间,从而是闭的度量子空间(对离散拓扑,存在度量 ρ($\rho(x,x)=0$,$\rho(x,y)=1$,$x \neq y$)). 每一单点集$\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{k}{n^2}\right)\right\}$也是度量子空间,所以空间 E 是可数个互不相交的闭的度量子空间的并.

空间 E 不是度量空间,因为 E 不是正规的. 事实上,Y 轴上的有理数所成集Q 及无理数所成集I 是空间E 的不相交的闭集,

但不存在分别包含它们的不相交的开集.这一论断的证明与例2.2.13的相应证明类似.

此外,不难验证空间 E 是完全正则空间.从而可知,即使一个完全正则空间 X 是可数个互不相交的闭的度量子空间的并,X 未必是度量空间.关于这方面的研究,A. H. Stone[1959]得到许多深刻的结果.

度量空间的商空间未必是度量空间,见下面的例.

例 4.1.22 取数直线 R,把 R 内的自然数集 N 算作一类,R 中的其它点,每点算作一类.在这些类所成集上给以商拓扑得到空间 Y.下面将证明作为 Y 中的点 N 的邻域基不可能是可数的,从而 Y 不满足第一可数公理,Y 不是度量空间.

按 Y 中点 N 的开邻域(由商拓扑的定义)应是 R 中包含自然数集 N 的开集 U 去掉集 N 后与 Y 中单点集 $\{N\}$ 的并,即 $(U-N)\cup\{N\}$.姑设点 N 的开邻域基是:$(U_1-N)\cup\{N\}$,$(U_2-N)\cup\{N\}$,…,这里 $U_1,U_2,\cdots$ 都是 R 中包含集 N 的开集.对每一 $i=1,2,\cdots$,取点 $x_i\in U_i-N$,使 $x_i>i$ 且 $x_i-x_{i-1}>1/2$,则集 $\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是闭集.从而集 $U_0=X-\{x_1,x_2,\cdots\}$ 是开集,且包含自然数集 N.所以 $V=(U_0-N)\cup\{N\}$ 应是 Y 中点 N 的开邻域.但是 $(U_1-N)\cup\{N\}$,$(U_2-N)\cup\{N\}$,…中没有一个能包含在 V 中,这一矛盾说明 Y 不满足第一可数公理.

此外,可以看到 R 到 Y 的自然映射还是闭映射,因自然数集 N 闭于 R.

§2. 全有界与完全度量空间

定义 4.2.1 度量空间 (X,ρ) 称为**全有界的**(totally bounded)如果对每一 $\varepsilon>0$,存在有限个 ε 开球覆盖空间 X,也就是存在由 ε 确定的有限集 $F(\varepsilon)$ 使 $X=\bigcup_{x\in F(\varepsilon)}S_\varepsilon(x)$.这时也称有限集 $F(\varepsilon)$ **ε 稠密**(ε-dense)于 X.

具有离散的度量拓扑的度量空间 (X,ρ^*) 不是全有界的,除

非 X 是有限集.数直线 R(通常度量)不是全有界的.容易验证数直线 R 内的闭区间$[a,b]$,开区间(a,b)都是全有界的.按数直线同胚于任一开区间,从而可知全有界性不是拓扑不变量.

取希尔伯特空间 l_2 的子集 $A=\{x_n:n\in N\}$(N 是自然数集),这里 $x_n=(0,0,0,\cdots,\underset{\text{第}n\text{位}}{1},0,\cdots)$,按希尔伯特空间的度量(例4.1.2),子空间 A 是**有界的**(即 A 的直径$d(A)<+\infty$);但是不是全有界的,因为 A 中任意两点的距离是$\sqrt{2}$.对 $\varepsilon\leqslant\sqrt{2}$,不存在有限集 $F(\varepsilon)$. ε 稠密于A(即 $A=\bigcup_{x_n\in F(\varepsilon)}S_\varepsilon(x_n)$.所以有界的度量空间未必是全有界的.

定理 4.2.2 全有界的度量空间的子空间是全有界的.

证明 设(X,ρ)是全有界的度量空间,$M\subset X$.对 $\varepsilon>0$,取 $F(\varepsilon/2)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$ $\varepsilon/2$ 稠密于 X.对每一 $x\in M$,存在 $x_i\in F(\varepsilon/2)$使 $\rho(x,x_i)<\varepsilon/2$.这种 x_i 所成集记为$\{x_{m_1},x_{m_2},\cdots,x_{m_l}\}$,对每一 $j\leqslant l$,任取 $x'_j\in M$ 使$\rho(x'_j,x_{m_j})<\varepsilon/2$.置 $F'=\{x'_1,x'_2,\cdots,x'_l\}$,下证 $F'\varepsilon$ 稠密于M.任取 $x\in M$,因 $M\subset X$,存在 $x_i\in F(\varepsilon/2)$使 $\rho(x,x_i)<\varepsilon/2$,按这 x_i 就是某一个x_{m_j},所以

$$\rho(x,x'_j)\leqslant\rho(x,x_{m_j})+\rho(x_{m_j},x_j)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$证完.

定理 4.2.3 设(X,ρ)是度量空间,$M\subset X$,空间(M,ρ)是全有界的,则空间$(\overline{M},\rho)$是全有界的.

证明 容易验证,任一$\frac{\varepsilon}{2}$稠密于 M 的有限集是ε 稠密于 $\overline{M}$ 的.证完.

定理 4.2.4 设$\{(X_n,\rho_n)\}$是度量空间的序列,且每一度量空间(X_n,ρ_n)的直径不大于 1,对积集 $X=\prod_{n=1}^\infty X_n$ 给以定理4.1.19 中的度量 ρ,则(X,ρ)是全有界的当且仅当每一(X_n,ρ_n)是全有界的.

证明 设(X,ρ)是全有界的,对每一 $m\in N$,子空间 $X_m^*=\prod_{n=1}^\infty A_n$(其中 $A_m=X_m$,$A_n=\{x_n^*\}$是 X_n 的单点集,$n\neq m$)是全有界的(由定理 4.2.2).按 ρ 的定义(见定理 4.1.19),$x^*,y^*\in$

$X_m^* \subset X$, $\rho(x^*, y^*) = \frac{1}{2^m}\rho_m(x, y)$，这里 $x = p_m(x^*)$, $y = p_m(y^*)$. 所以，如果有限集 $F_{\varepsilon/2^m}$ 稠密于 (X_m^*, ρ)，则 $p_m(F)\varepsilon$ 稠密于 (X_m, ρ_m). 所以空间 (X_m, ρ_m) 是全有界的.

设每一 (X_n, ρ_n) 是全有界的，对 $\varepsilon > 0$，取自然数 k 使 $1/2^k < \varepsilon/2$，对每一 $n \leqslant k$，有限集 $\{x_1^n, x_2^n, \cdots, x_{m(n)}^n\}$ $\varepsilon/2$ 稠密于 X_n；对每一 $n > k$，任取点 $x_0^n \in X_n$，置

$$F = \{y = (x_{j_1}^1, x_{j_2}^2, \cdots, x_{j_k}^k, x_0^{k+1}, x_0^{k+2}, \cdots):$$
$$1 \leqslant j_n \leqslant m(n), n \leqslant k\},$$

F 是有限集. 下证 $F\varepsilon$ 稠密于 (X, ρ)

设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ 是 X 中的任一点，对每一 $n \leqslant k$，存在 $j_n \leqslant m(n)$ 使 $\rho_n(x_n, x_{j_n}^n) < \varepsilon/2$，从而可取 F 中的点 y，得到

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n}\rho_n(x_n, x_{j_n}^n) + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n(x_n, x_0^n)$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

所以集 $F\,\varepsilon$ 稠密于 X. 证完.

上述定理是拓扑积情况. 在拓扑和的情况，只能限制在两两不相交的度量空间是有限个的情况. 设 $\{(X_\alpha, \rho_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ 是一族两两不相交的度量空间，且每一 (X_α, ρ_α) 的直径不大于 1，对 $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ 给以定理 4.1.20 中的度量 ρ，则容易验证 $\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ 是全有界的当且仅当每一 (X_α, ρ_α) 是全有界的，且指标集 A 是有限集.

定理 4.2.5 设度量空间 (X, ρ) 的每一无限子集具有 ω 聚点，则 (X, ρ) 是全有界的.

证明 这里要证对任一 $\varepsilon > 0$ 存在有限集 $F(\varepsilon)$ 使 $X = \bigcup_{x \in F(\varepsilon)} S_\varepsilon(x)$. 用反证法，设对某一 $\varepsilon_0 > 0$，定理不真，即不存在有限集 $F(\varepsilon_0)$，使 $X = \bigcup_{x \in F(\varepsilon_0)} S_{\varepsilon_0}(x)$，任取 $x_1 \in X$, $X \neq S_{\varepsilon_0}(x_1)$，取 $x_2 \in X - S_{\varepsilon_0}(x_1)$，由于 $X \neq \bigcup_{i=1}^2 S_{\varepsilon_0}(x_i)$，继续下去，可得无限集 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. 由上述取法，知 $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon_0$, $i \neq$

j.由假设这无限集有 ω 聚点 $x_0 \in X$,则开球 $S_{\varepsilon_0/2}(x_0)$ 应包含 $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ 中无限个点. 设 $x_n, x_m \in S_{\varepsilon_0/2}(x_0)$,则

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant \rho(x_n, x_0) + \rho(x_0, x_m) < \varepsilon_0/2 + \varepsilon_0/2 = \varepsilon_0.$$

这是矛盾的. 这一矛盾证明了(X, ρ)是全有界的. 证完.

推论 4.2.6 紧的度量空间是全有界的.

定义 4.2.7 度量空间(X, ρ)中的序列$\{x_n\}$称为**柯西序列**(Cauchy sequence),如果对任一 $\varepsilon > 0$,存在自然数 k,使当 $m, n \geqslant k$ 时,$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

显然,度量空间(X, ρ)中的收敛序列是这空间的柯西序列.

柯西序列依赖于空间中的度量. 对同一集 X 上的不同的度量 ρ, ρ',纵然由 ρ, ρ'导出相同的度量拓扑,同一序列可以对度量 ρ 是柯西序列,对另一度量 ρ'不是柯西序列(见下例). 所以柯西序列不是拓扑不变量.

例 4.2.8 考察数直线 R 中的自然数序列$\{n\}$,在 R 的通常度量$\rho(x, y) = |x - y|$下,$\{n\}$显然不是柯西序列. 在 R 上定义另一度量

$$\rho'(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

容易验证 $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$是 R 到$(-1, 1)$的同胚映射,所以由 ρ, ρ'导出的度量拓扑都是R 上的通常拓扑. 由于

$$\begin{aligned} \rho'(n + l, n) &= \left| \frac{n + l}{1 + n + l} - \frac{n}{1 + n} \right| \\ &= \frac{l}{(1 + n + l)(1 + n)} < \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

所以对任一 $\varepsilon > 0$,只要 $n > \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] = k$ 时,($\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$表示不超过$\dfrac{1}{\varepsilon}$ 的整数),对 $l = 1, 2, \cdots$,都有 $\rho'(n + l, n) < \varepsilon$. 所以序列$\{n\}$ 在度量 ρ' 下是柯西序列.

定理 4.2.9 如果度量空间(X, ρ)中的柯西序列有聚点 x_0,则这序列收敛于 x_0.

证明 设柯西序列$\{x_n\}$具有聚点 x_0，用 T_k 表示序列$\{x_k, x_{k+1},\cdots\}$中不同的点所成集. 用 $d(T_k)$表示 T_k 的直径. 给定点 x_0 的 ε 开球 $S_\varepsilon(x_0)$. 由于$\{x_n\}$是柯西序列，可以取 k 充分大使 $d(T_k)<\varepsilon/2$. 因 x_0 是$\{x_n\}$的聚点，x_0 的任何邻域与 T_k 相交，特别 $S_{\varepsilon/2}(x_0)\cap T_k\neq\varnothing$，从而得 $T_k\subset S_\varepsilon(x_0)$，是即$\{x_n\}$收敛于 x_0. 证完.

由上述定理 4.2.9 及定理 4.1.12 得下述推论.

推论 4.2.10 度量空间的柯西序列或者收敛，或者没有收敛子序列.

定义 4.2.11 度量空间(X,ρ)称为**完全度量空间**(complete metric space)，如果这空间中的每一柯西序列是收敛的.

分析学中的 R, R^n，连续函数空间、希尔伯特空间、勒贝格平方可和函数空间等都是完全度量空间.

在 R 的通常度量下，序列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是 R 中，也是$(-1,1)$中的柯西序列. 这序列在 R 中收敛，在$(-1,1)$中不收敛，而 R 是同胚于$(-1,1)$的，所以度量空间的完全性不是拓扑不变量. 这里也说明了完全度量空间的子空间未必是完全度量空间.

例 4.2.12 考察连续函数空间 $C_{[0,1]}$，对定义在$[0,1]$上的任意两个实值连续函数 $x(t), y(t)\in C_{[0,1]}$，$(0\leqslant t\leqslant 1)$，规定度量 $\rho(x(t),y(t)) = \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$ 后，$C_{[0,1]}$ 形成度量空间(习题 4.1)，设$\{x_n(t)\}$ 是空间 $C_{[0,1]}$ 中的任一柯西序列，按上述度量，$\{x_n(t)\}$ 是柯西序列等价于连续函数序列$\{x_n(t)\}$ 在$[0,1]$上一致收敛，由分析学中定理："一致收敛的连续函数序列的极限函数是连续的"，可设$\{x_n(t)\}$ 一致收敛于连续函数 $x_0(t)$，$x_0(t)\in C_{[0,1]}$. 也就是$\{x_n(t)\}$ 在上述度量意义下收敛于 $x_0(t)$，所以连续函数空间 $C_{[0,1]}$ 是完全度量空间.

例 4.2.13 在例 4.1.2 中已知希尔伯特空间 l_2 是度量空间，下面证明它的完全性.

设$\{x^{(n)}\}$是空间 l_2 中的任一柯西序列，这里

$$x^{(n)} = (x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \cdots, x_k^{(n)}, \cdots).$$

对任意 $\varepsilon>0$,存在自然数 N,使当 $m, n>n$ 时,

$$(\rho(x^m, x^{(n)}))^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon. \qquad (1)$$

从而对任一 k, $(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon$,这说明对每一 k,实数序列 $\{x_k^{(n)}\}$是 R 中的柯西序列. 因 R 是完全度量空间,所以$\{x_k^{(n)}\}$收敛于某实数 x_k. 置 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots)$,需要证明:

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$(即 $x \in l_2$),

(ii) $\lim_{n\to\infty}\rho(x^{(n)}, x) = 0$. 为此把(1)式改写为如下形式:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 \\ = &\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 + \sum_{k=M+1}^{\infty}(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon,\end{aligned}$$

其中 M 是任意的. 由于这两个和数都不是负数,其中每一个和数小于 ε,故有

$$\sum_{k=1}^{M}(x_k^{(m)} - x_k^{(n)})^2 < \varepsilon.$$

在上式中,固定 n,让 $m\to\infty$,则有 $\sum_{k=1}^{M}(x_k - x_k^{(n)})^2 \leqslant \varepsilon$.

由于这不等式对任意 M 成立,让 $M\to\infty$,则有

$$\sum_{k=1}^{\infty}(x_k - x_k^{(n)})^2 \leqslant \varepsilon. \qquad (2)$$

由于(利用不等式$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2)$).

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k_0} x_k^2 = &\sum_{k=1}^{k_0}(x_k - x_k^{(n)} + x_k^{(n)})^2 \\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^{k_0}(x_k - x_k^{(n)})^2 + 2\sum_{k=1}^{k_0}(x_k^{(n)})^2,\end{aligned}$$

其中 k_0 是任意的,在 $k_0\to\infty$时,由(2)式及 $\sum_{k=1}^{\infty}(x_k^{(n)})^2$ 是收敛的

(因为 $x^{(n)}=(x_1^{(n)},x_2^{(n)},\cdots,x_k^{(n)},\cdots)\in l_2$)，可以推知 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}x_k^2$ 是收敛的，这就是说 $x\in l_2$. 到此证明了(i). 其次，由于(2)式中的 ε 可以任意小，所以

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x,x^{(n)})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}(x_k-x_k^{(n)})^2}=0.$$

这就是说在 l_2 空间的度量 ρ 下，$x^{(n)}\to x$，到此证明了(ii).

综上，证明了 l_2 中的柯西序列 $\{x^{(n)}\}$ 收敛，l_2 是完全度量空间.

定理 4.2.14 度量空间 (X,ρ) 是紧的当且仅当 (X,ρ) 是完全的且是全有界的.

证明 必要性，设 (X,ρ) 是紧的度量空间，由推论 4.2.6，(X,ρ) 是全有界的. 由定理 4.2.9，空间 (X,ρ) 中的柯西序列如有收敛子序列，则这柯西序列收敛. 由于紧度量空间是序列紧的(任何序列有收敛子序列)，所以这空间每一柯西序列收敛，从而 (X,ρ) 是完全的.

充分性. 设度量空间 (X,ρ) 是完全的，且全有界的. 下面证明空间 (X,ρ) 是序列紧的，从而也是紧的(定理 4.1.15).

设 $\{x_n\}$ 是度量空间 (X,ρ) 中的任一序列. 下面将利用全有界性，由 $\{x_n\}$ 出发构造 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_k}\}$，使 $\{x_{n_k}\}$ 是柯西序列，从而由空间 (X,ρ) 的完全性知这子序列 $\{x_{n_k}\}$ 是收敛的.

由空间 (X,ρ) 的全有界性知，存在有限个半径为 1 的开球覆盖 X. 这有限个开球中至少有一个开球 S_1 包含序列 $\{x_n\}$ 中无限个 x_n，设被包含在 S_1 中的 x_n 的下标 n 所成集为 N_1，N_1 是无限集；$n\in N_1$ 时，$x_n\in S_1$，再用有限个半径为 1/2 的开球覆盖 X. 在这有限个开球中至少有一个开球 S_2 及必有 N_1 的无限子集 N_2 $(N_2\subset N_1)$ 存在(因 N_1 是无限集)，使 $n\in N_2$ 时，$x_n\in S_2$. 一般说，取定了自然数集的无限子集 N_k，可以选取半径为 $\dfrac{1}{k+1}$ 的开球 S_{k+1} 及无限集 $N_{k+1}\subset N_k$，使 $n\in N_{k+1}$ 时，$x_n\in S_{k+1}$.

取 $n_1 \in N_1, n_2 \in N_2$,使 $n_2 > n_1$,一般说,n_k 已取定,取 $n_{k+1} \in N_{k+1}$,使 $n_{k+1} > n_k$. 由于每一 N_k 是无限集,所以上述取法可以完成. 对 $i, j \geq k$, n_i, n_j 都属于N_k(因 $N_1 \supset N_2 \supset \cdots \supset N_k \supset \cdots$),从而 x_{n_i}, x_{n_j} 都属于半径为 $1/k$ 的开球. 从而知$\{x_{n_k}\}$是一柯西序列. 证完.

定理 4.2.15(Cantor)　度量空间是完全的,当且仅当对这空间的任何满足条件:(i)$F_{n+1} \subset F_n (n \in N)$,(ii)$\lim\limits_{n \to \infty} d(F_n) = 0$ 的非空闭集序列$\{F_n\}$,$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ 是一单点集.

证明　必要性,设(X, ρ)是完全度量空间,$\{F_n\}$是满足条件(i),(ii)的闭集序列. 对每一 $n \in N$,取 $x_n \in F_n$,下证序列$\{x_n\}$是柯西序列. 由(ii),对 $\varepsilon > 0$,可选取自然数 N_ε,使 $n > n_\varepsilon$ 时 $d(F_n) < \varepsilon$;由(i),当 $n \geq m > n_\varepsilon$ 时,有 $x_n \in F_n \subset F_m$,又因 $x_m \in F_m$,所以

$$\rho(x_n, x_m) \leqslant d(F_m) < \varepsilon.$$

所以$\{x_n\}$是柯西序列. 因(X, ρ)是完全的,$\{x_n\}$收敛于某一点 $x_0 \in X$,从而可知点 x_0 的任何邻域与 $F_n (n = 1, 2, \cdots)$相交. F_n 是闭集,所以 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

现证只有一点 x_0 属于$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,也就是$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \{x_0\}$. 如有 $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$,由(ii)对 $\varepsilon > 0$,取 n_ε 使 $n > n_\varepsilon$ 时,有 $d(F_n) < \varepsilon$,从而

$$x_0, y \in F_n, \rho(x_0, y) \leqslant d(F_n) < \varepsilon.$$

由 ε 的任意性,$\rho(x_0, y) = 0$,从而 $y = x_0$.

充分性. 设$\{x_n\}$是(X, ρ)中的柯西序列. 对每一自然数 k,存在自然数 n_k,当 $n \geq n_k$ 时有 $\rho(x_{n_k}, x_n) < 1/2^k$,我们可以设这 n_k 是具有上述性质的最小自然数. 从而有 $n_k \leqslant n_{k+1} (k = 1, 2, \cdots)$. 构造如下的闭集序列$\{F_k\}$,置

$$F_k = \overline{S_{1/2^{k-1}}(x_{n_k})}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

这里 $S_{1/2^{k-1}}(x_{n_k}) = \{y : \rho(y, x_{n_k}) < \frac{1}{2^{k-1}}\}$. 从而 $d(F_k) \leqslant \frac{1}{2^{k-2}}$, k

$=1,2,\cdots$. 所以$\lim\limits_{k\to\infty}d(F_k)=0$(满足条件(i)).

设 $y\in F_{k+1}$,则由 n_k 的选取法有

$$\rho(y,x_{n_{k+1}})\leqslant 1/2^k,\qquad \rho(x_{n_k},x_{n_{k+1}})\leqslant 1/2^k,$$

$$\rho(y,x_{n_k})\leqslant\rho(y,x_{n_{k+1}})+\rho(x_{n_{k+1}},x_{n_k})$$
$$\leqslant 1/2^k+1/2^k=1/2^{k-1},$$

是即 $y\in F_k$, $F_{k+1}\subset F_k(k=1,2,\cdots)$(满足条件(ii)).

由假设,应有$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=\{x_0\}$是一单点集. 下证柯西序列$\{x_n\}$收敛于 x_0. 对任意 $\varepsilon>0$,选取自然数 k 使 $1/2^{k-2}<\varepsilon$,则在 $n>n_k$ 时,$\rho(x_{n_k},x_n)<1/2^k$. 此外,有 $x_0\in F_k$, $\rho(x_0,x_{n_k})\leqslant 1/2^{k-1}$,从而

$$\rho(x_0,x_n)\leqslant\rho(x_0,x_{n_k})+\rho(x_{n_k},x_n)$$
$$<\frac{1}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}<\frac{1}{2^{k-2}}<\varepsilon.$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$, (X,ρ)是完全度量空间. 证完.

定理 4.2.16 设(X,ρ)是度量空间,$M\subset X$ 且子空间(M,ρ)是完全的,则 M 闭于X.

证明 设 $x\in\overline{M}$,置 $F_k=M\cap\overline{S_{1/k}(x)}$, $k=1,2,\cdots$,则$\{F_k\}$是子空间 M 的闭集序列. 容易验证满足 Cantor 定理中的条件(i),(ii). 因子空间(M,ρ)是完全的,由 Cantor 定理,$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k$ 是一单点集. 显然,$\bigcap_{k=1}^{\infty}F_k=\{x\}$,从而 $x\in M$. 所以 $\overline{M}=M$. 证完.

定理 4.2.17 完全度量空间(X,ρ)的子空间(M,ρ)是完全的当且仅当 M 闭于X.

证明 必要性由定理 4.2.16 得证. 下证充分性,设 M 是闭集,度量空间(M,ρ)的每一柯西序列也是完全度量空间(X,ρ)中的柯西序列. 故收敛于某一点 $x\in X$. 因 M 闭于 X,故 $x\in M$. 证完.

定理 4.2.18 设$\{X_n,\rho_n\}$是度量空间的序列,且每一度量空间(X_n,ρ_n)的直径不大于 1,对积集 $X=\prod_{n=1}^{\infty}X_n$ 给以定理 4.1.19 中的度量 ρ,则(X,ρ)是完全的当且仅当每一(X_n,ρ_n)是

完全的.

证明 设(X,ρ)是完全的,对每一 $m\in N$,子空间 $X_m^*=\prod_{n=1}^{\infty}A_n$(其中 $A_m=X_m,A_n=\{x_n^*\}$是 X_n 的单点集,$n\neq m$)是完全的(由定理 4.2.17),容易验证 $p_m^*=p_m|_{X_m^*}:X_m^*\to X_m$ 是同胚映射,且对(X_m,ρ_m)中的每一柯西序列$\{x_n\}$,$\{p_m^{*-1}(x_n)\}$是 X_m^* 中的柯西序列.这序列$\{p_m^{*-1}(x_n)\}$的极限的象是序列$\{x_n\}$的极限.所以(X_m,ρ_m)是完全的.

设每一(X_n,ρ_n)是完全的.设$\{(x_1^1,x_2^1,\cdots,x_n^1,\cdots),(x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2,\cdots),\cdots,(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n,\cdots),\cdots\}$是$(X,\rho)$中的柯西序列,则对 $n=1,2,\cdots$,$\{x_n^1,x_n^2,\cdots,x_n^n,\cdots\}$是$(X_n,\rho_n)$中的柯西序列,从而收敛于点 $x_n^0\in X_n$.由定理 2.1.8 的相应于网的论述(见习题 2.31),序列$\{(x_1^1,x_2^1,\cdots,x_n^1,\cdots),(x_1^2,x_2^2,\cdots,x_n^2,\cdots),\cdots,(x_1^n,x_2^n,\cdots,x_n^n,\cdots),\cdots\}$收敛于点 $x^0=(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0,\cdots)\in X$.所以$(X,\rho)$是完全的.证完.

上述情况是拓扑积情况,关于拓扑和,读者容易验证有下述结果.

定理 4.2.19 设$\{(X_\alpha,\rho_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是一族两两不相交的度量空间,且每一$(X_\alpha,\rho_\alpha)$的直径不大于 1.对$\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 给以定理 4.1.20 中的度量 ρ,则$\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 是完全的当且仅当每一(X_α,ρ_α)是完全的.

下面定理给出完全度量空间的一种有趣性质.

定理 4.2.20(Baire) 完全度量空间中的可数个开的稠密子集的交是稠密子集.

证明 设 $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$,每一 A_n 是完全度量空间(X,ρ)中的开稠密子集,要证 A 是 X 中的稠密子集,也就是要证:设 U 是 X 中的任一不空开集,则 $A\cap U\neq\varnothing$.为此,在下面构造满足 Cantor 定理(定理 4.2.15)中的条件(i),(ii)的闭集序列$\{F_n\}$,使 $F_n\subset A_n\cap U$,$n\in N$,由 Cantor 定理得$\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n\neq\varnothing$,从而

$$A\cap U=(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n)\cap U=\bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n\cap U)$$

$$\supset \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \neq \varnothing .$$

即得 A 稠密于 X.

下面构造上述闭集序列$\{F_n\}$.因 A_1 稠密于 X, U 是开集,所以 $U \cap A_1 \neq \varnothing$.取 $x_1 \in A_1 \cap U$,因 $A_1 \cap U$ 是开集,存在 ε_1 满足 $0 < \varepsilon_1 < \frac{1}{2}$,使$\overline{S_{\varepsilon_1(x)}} \subset A_1 \cap U$.因 A_2 稠密于 X, $S_{\varepsilon_1}(x_1)$是开集,所以 $A_2 \cap S_{\varepsilon_1}(x_1) \neq \varnothing$.取 $x_2 \in A_2 \cap S_{\varepsilon_1}(x_1)$,因 $A_2 \cap S_{\varepsilon_1}(x_1)$是开集,存在 ε_2 满足 $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_{1/2}$使$\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset A_2 \cap S_{\varepsilon_1}(x_1)$.显然,$\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset \overline{S_{\varepsilon_1}(x_1)}$且$\overline{S_{\varepsilon_2}(x_2)} \subset A_2 \cap U$.这样继续下去,可得闭集序列$\{F_n\} = \{\overline{S_{\varepsilon_n}(x_n)}\}$满足 $F_{n+1} \subset F_n$ 及$d(F_n) \leqslant 1/2^n (n = 1, 2, \cdots)$,是即满足 Cantor 定理的条件(i)及(ii).此外,显然有 $F_n \subset A_n \cap U (n = 1, 2, \cdots)$,所以$\{F_n\}$是所要构造的闭集序列.从而定理得证.证完.

上述 Baire 定理中的性质不仅为完全度量空间所具有,例如 T_2 局部紧空间也有这性质.读者可以自己证明这一论断(习题 4.17)证法是类似的.此外,可以用这性质定义一类空间:拓扑空间 X 称为 **Baire 空间**,如果空间 X 的可数个稠密开子集的交是稠密的.

推论 4.2.21 完全度量空间是第二纲集.

证明 只要证明完全度量空间(X, ρ)不是第一纲集.设 $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是任一第一纲集,这里每一 A_n 是无处稠密子集.由于

$$X - A = X - (\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \supset X - (\bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A}_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{A}_n),$$

这里 $X - \overline{A}_n$ 是稠密的开子集(习题 4.10),由 Baire 定理,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (X - \overline{A}_n) \neq \varnothing .$$

所以 $X - A \neq \varnothing$.证完.

§3. 度量化定理

度量空间(X, ρ)的度量 ρ 导出 X 上的度量拓扑$\mathscr{T}$,从而得到

拓扑空间$(X,\mathscr{T})$. 在上述意义下,度量空间是特殊类型的拓扑空间. 这类空间应用很大,且可以用开球表示它的基,在论证中带来很大的直观性. 因此,自然会提出如下问题:怎样的拓扑空间存在相应的度量,使由这度量导出的度量拓扑正好是原来的拓扑. 这就是拓扑空间的可度量化问题.

在这一节内,先叙述具有可数基的拓扑空间的可度量化定理,然后叙述一般的拓扑空间的可度量化定理.

定义 4.3.1 拓扑空间 X 称为**可度量化的**(metrizable)如果在 X 上存在度量ρ,使由 ρ 导出的度量拓扑就是X 上的拓扑.

定理 4.3.2(Urysohn 度量化定理[1924]) 具有可数基的正则空间同胚于 Hilbert 立方体 I^{ω}(见例 2.1.4))的子集,从而可度量化.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是正则空间 X 的可数基,取 $\mathscr{U}$ 中的元素对(U, V),使$\overline{U}\subset V$. 所有这种元素对(U, V)所成的集显然是可数的,因此可以记为$\{(U_1, V_1), (U_2, V_2), \cdots, (U_n, V_n), \cdots\}$. 因 X 是正规的(定理 2.3.4,定理 2.3.7),由 Urysohn 引理(定理 2.4.1),对每一 $n\in N$,可以定义连续函数 $f_n: X\to[0,1]$使

$$f_n(x) = 0, x \in \overline{U}_n; f_n(x) = 1, x \in X - V_n.$$

定义映射 $f: X\to I^{\omega}$ 使

$$f(x) = (f_1(x), \frac{1}{2}f_2(x), \cdots, \frac{1}{n}f_n(x), \cdots).$$

显然 f 是连续的.

下证 f 是单映射(即 $x\neq x'\Rightarrow f(x)\neq f(x')$). 因 X 是 T_1 的,存在 x 的开邻域$W(x)$,使不包含 x'. 由正则性,可找到基 $\mathscr{U}$ 中的元素对(U_n, V_n)使 $x\in U_n\subset\overline{U}_n\subset V_n\subset W(x)$,从而

$$f_n(x) = 0; \quad f_n(x') = 1.$$

由 Hilbert 空间的度量 ρ(见例 4.1.2)知

$$\rho(f(x), f(x')) \geqslant \frac{1}{n}.$$

所以 $f(x)\neq f(x')$.

下证 f^{-1}是连续的.设 $W(x)$是空间 X 的任一点 x 的任一开邻域.由上述证明可知,对任一点 x'',如果 $\rho(f(x),f(x''))<\frac{1}{n}$,则 $x''\in W(x)$.这说明

$$f^{-1}(S_{1/n}(f(x)))\subset W(x),$$

这里开球 $S_{1/n}(f(x))=\{f(x''):\rho(f(x),f(x''))<1/n\}$,所以 f^{-1}是连续的.

到此证明了 f 是 X 到 I^{ω} 的子集上的同胚映射.由于 I^{ω} 是度量空间,所以空间 X 可度量化.证完.

定理 4.3.3 在拓扑空间 X,下列论断等价:

(i) X 是正则空间且具有可数基,

(ii) X 同胚于希尔伯特立方体 I^{ω} 的某一子集,

(iii) X 可度量化且是可分的.

证明 (i)⇒(ii)即定理 4.3.2;(ii)⇒(iii),I^{ω} 是度量空间,每一闭区间$[0,1/n]$具有可数基,而可数个具有可数基的空间的积具有可数基(习题 2.16).所以 I^{ω} 具有可数基.从而是可分的(定理 2.3.3);(iii)⇒(i),度量空间是正则的(定理 4.1.10).可分的度量空间具有可数基(定理 4.1.14).证完.

上面叙述的是经典的乌利松度量定理.它的条件较简单,应用方便.虽然条件稍强些,所得的结果也较强的,不仅是度量空间而且是可分的.这些意义下,可说乌利松定理部分地解决了拓扑空间的可度量化问题.下面的 Nagata-Smirnoŭ 定理,Bing 定理比较完善地解决了这问题.在这些定理中分别地用 σ 局部有限、σ 离散基代替乌利松定理中的可数基.

在第三章§5 定义仿紧空间(定义 3.5.15)前,曾引入局部有限覆盖概念.一般说,集族 $\mathscr{U}=\{U_{\alpha}\}_{\alpha\in A}$ 称为离散的(局部有限的),如果对每一 $x\in X$ 存在 x 的邻域 $U(x)$使 $U(x)\cap U_{\alpha}\neq\varnothing$ 至多对一个 $\alpha\in A$(仅对有限个 $\alpha\in A$)成立.显然离散集族是局部有限的.如果集族是可数个离散(局部有限)集族的并,也就是 $\mathscr{U}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{U}_n$,每一 $\mathscr{U}_n$ 是离散的(局部有限的),则称 $\mathscr{U}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{U}_n$ 是

σ 离散的(局部有限的). 显然可数集族是 σ 离散的.

在叙述这两个著名的度量化定理之前,先引入度量空间理论中最重要的定理之一——Stone 定理. A. H. Stone 在[1948]中证明了一个非常重要的结果,由此结果可以推得度量空间是仿紧的. 下面定理 4.3.4 的证明是用开球体现 Stone 的证法. Stone 这一证法是非常精美的.

定理 4.3.4(A. H. Stone[1948]) 度量空间的每一开覆盖具有开的加细覆盖,它同时是 σ 离散的及局部有限的.

证明 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是度量空间 (X,ρ) 的开覆盖,对每一 $\alpha\in A$,置

$$U_{\alpha,n} = \{x : D(x, X - U_\alpha) \geqslant 1/2^n\}, n \in N. \tag{1}$$

则 $U_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_{\alpha,n}$. 当 $x\in U_{\alpha,n}, y\notin U_{\alpha,n+1}$ 时,由(1)

$$D(x, X - U_\alpha) - D(y, X - U_\alpha) > \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

从而(利用不等式 $|D(x,A) - D(y,A)| \leqslant \rho(x,y)$)得

$$x \in U_{\alpha,n}, y \notin U_{\alpha,n+1} \Rightarrow \rho(x,y) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{2}$$

把指标集 A 良序化,置

$$U^*_{\alpha,n} = U_{\alpha,n} - \bigcup\{U_{\beta,n+1} : \beta < \alpha, \beta \in A\}, \alpha \in A. \tag{3}$$

对任意两个 $\alpha, \alpha' \in A$,按 $\alpha < \alpha'$ 或 $\alpha' < \alpha$,由(3)可得

$$U^*_{\alpha',n} \subset X - U_{\alpha,n+1} \quad \text{或} \quad U^*_{\alpha,n} \subset X - U_{\alpha',n+1}. \tag{4}$$

如果 $x\in U^*_{\alpha,n}, y\in U^*_{\alpha',n}$,则当 $\alpha<\alpha'$ 时,由(3),$x\in U^*_{\alpha,n}\Rightarrow x\in U_{\alpha,n}$. 由(4)的前式,$y\in U^*_{\alpha',n}\Rightarrow y\notin U_{\alpha,n+1}$;当 $\alpha'<\alpha$ 时,类似地(由(3)及(4)的后式)可得 $y\in U_{\alpha',n}, x\notin U_{\alpha',n+1}$. 不论 $\alpha<\alpha'$ 或 $\alpha'<\alpha$,由(2)得 $\rho(x,y)\geqslant\frac{1}{2^{n+1}}$,故有

$$D(U^*_{\alpha,n}, U^*_{\alpha',n}) \geqslant \frac{1}{2^{n+1}}. \tag{5}$$

此外,易证

$$\bigcup\{U^*_{\alpha,n} : n \in N, \alpha \in A\} = X. \tag{6}$$

置 $$U^{\circ}_{\alpha,n}=\{x:D(x,U^{*}_{\alpha,n})<\frac{1}{2^{n+4}}\},$$

$$U^{\sim}_{\alpha,n}=\{x:D(x,U^{*}_{\alpha,n})<\frac{1}{2^{n+3}}\}. \tag{7}$$

显然

$$U^{*}_{\alpha,n}\subset U^{\circ}_{\alpha,n}\subset U^{\circ -}_{\alpha,n}\subset U^{\sim}_{\alpha,n}. \tag{8}$$

由(5),(7)及三角形不等式,易证对任意 $\alpha,\alpha'\in A$,

$$D(U^{\sim}_{\alpha,n},U^{\sim}_{\alpha',n})\geqslant\frac{1}{2^{n+2}}. \tag{9}$$

到此,由(9)及(6)可知 $\bigcup_{n\in N}(\{U^{\sim}_{\alpha,n}:\alpha\in A\})$ 已是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散加细开覆盖.为了得到同时又是局部有限的 σ 离散加细开覆盖,可置

$$F_n=\bigcup_{\alpha\in A}U^{\circ -}_{\alpha,n},n\in N. \tag{10}$$

由于对每一 $n\in N$,$\{U^{\sim}_{\alpha,n}:\alpha\in A\}$ 是离散的及(8)知 F_n 是闭集,置

$$W_{\alpha,1}=U^{\sim}_{\alpha,1},W_{\alpha,n}=U^{\sim}_{\alpha,n}-\bigcup_{i=1}^{n-1}F_i. \tag{11}$$

$W_{\alpha,1},W_{\alpha,n}(n=2,3,\cdots)$ 是开集.下证 $\bigcup\{W_{\alpha,n}:n\in N,\alpha\in A\}=X$.

由(6)及(8),$\bigcup\{U^{\circ -}_{\alpha,n}:n\in N,\alpha\in A\}=X$.对每一 $x\in X$,设 m 是使 $x\in U^{\circ -}_{\alpha,m}$ 的最小的自然数.由(8),$x\in U^{\sim}_{\alpha,m}$,由(10),$x\notin F_n(n=1,2,\cdots,m-1)$,由(11),$x\in W_{\alpha,m}$.

现证 $\{W_{\alpha,n}:n\in N,\alpha\in A\}$ 是局部有限且 σ 离散的.对每一 $x\in X$,由(6),$x\in$ 某 $U^{*}_{\alpha_0,n_0}$,由(7)

$$S_{\frac{1}{2^{n_0+4}}}(x)\subset U^{\circ}_{\alpha_0,n_0}\subset U^{\circ -}_{\alpha_0,n_0}\subset F_{n_0}.$$

所以对 $n>n_0$,$S_{\frac{1}{2^{n_0+4}}}(x)\cap W_{\alpha,n}=\varnothing(x\in A)$,对 $n\leqslant n_0$,由(9),$S_{\frac{1}{2^{n+3}}}(x)$ 至多与一个 $U^{\sim}_{\alpha,n}$ 相交,而

$$S_{\frac{1}{2^{n_0+4}}}(x)\subset S_{\frac{1}{2^{n+3}}}(x),W_{\alpha,n}\subset U^{\sim}_{\alpha,n}.$$

故 $S_{\frac{1}{2^{n_0+4}}}(x)$ 至多与一个 $W_{\alpha,n}$ 相交对 $n\leqslant n_0$ 都成立.所以开覆盖

$\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\{W_{\alpha,n}:\alpha\in A\}$是 σ 离散的. 由于 $S_{\frac{1}{2^{n_0+4}}}(x)$仅与 $\mathscr{W}$ 中至多 n_0 个元素相交,故 $\mathscr{W}$ 是局部有限的. 显然, $W_{\alpha,n}\subset U_\alpha$, $\mathscr{W}$ 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

注记 Stone 定理对拟度量空间也成立.

由上述 Stone 定理及仿紧空间的定义(定义 3.5.15),得下述重要定理.

定理 4.3.5 度量空间是仿紧空间.

由于紧空间是仿紧空间,结合定理 4.3.5,仿紧空间类包含着两大类重要的拓扑空间——紧空间类与度量空间类. 这奠定了仿紧空间在一般拓扑学中及其它有关学科中的重要地位. 在第五章中,将对仿紧空间作较多的介绍.

在度量空间(X,ρ)中,对每一 $n\in N$,开球族 $\mathscr{U}_n=\{S_{1/n}(x):x\in X\}$覆盖 X. 由定理 4.3.4, $\mathscr{U}_n$ 具有 σ 离散开加细覆盖 $\mathscr{V}_n$,可以证明 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$ 是 X 的 σ 离散基(定理 4.3.7). 但当验证 $\mathscr{V}$ 是基时,对每一 $x\in X$ 及每一包含点 x 的开集 U,存在 $S_{1/n}(x)\subset U$,至于是否存在 $\mathscr{V}_n$ 中包含点 x 的元素 V,使 $V\subset S_{1/n}(x)$,由 $\mathscr{V}_n$ 加细 $\mathscr{U}_n$ 的定义不能保证上述包含关系. 为此引入如下概念.

设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的覆盖(集族),对 $x\in X$,记 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U})=\bigcup\{U:U\in\mathscr{U},x\in U\}$;对 $A\subset X$,记 $\mathrm{st}(A,\mathscr{U})=\bigcup\{U:U\in\mathscr{U},U\cap A\neq\varnothing\}$.

定义 4.3.6 设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖. 开覆盖 $\mathscr{V}$ 称为**点星加细**(point-star refines) $\mathscr{U}$,如果 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{V}):x\in X\}$ 加细 $\mathscr{U}$;称为**星加细**(star refines) $\mathscr{U}$,如果 $\{\mathrm{st}(V,\mathscr{V}):V\in\mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$.

定理 4.3.7 度量空间具有 σ 离散基.

证明 设(X,ρ)是度量空间,对每一 $n\in N$, $\mathscr{U}_n=\{S_{1/n}(x):x\in X\}$覆盖 X,置 $\mathscr{U}_n'=\{S_{1/2^n}(x):x\in X\}$. 显然,对每一 $x\in X$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n')\subset S_{1/n}(x)$($\mathscr{U}_n'$ 点星加细 $\mathscr{U}_n$). 由定理 4.3.4, $\mathscr{U}_n'$ 具有 σ 离散开加细覆盖 $\mathscr{V}_n$. 由于 $\mathscr{V}_n$ 加细 $\mathscr{U}'_n$,对每一 $x\in X$, $\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}'_n)$($\mathscr{V}_n$ 点星加细 $\mathscr{U}_n$). 置 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$,对每一 $x\in X$ 及每

一包含 x 的开集 U, $x\in S_{1/n}(x)\subset U$, 取 $\mathscr{V}_n$ 中任一包含点 x 的开集 V, 则 $V\subset \mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U}'_n)\subset S_{1/n}(x)$. 所以 $x\in V\subset U$. 因此 $\mathscr{V}$ 是 X 的 σ 离散基. 证完.

在乌利松度量化定理(定理 4.3.2)证明中, 首先由 Tychonoff 定理(定理 2.3.7)得到正规性, 为了证明下述 Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 4.3.10), 这里类似地仿照 Tychonoff 定理的证法建立下述引理 4.3.8.

引理 4.3.8 具有 σ 局部有限基的正则空间是正规空间.

证明 设 X 是正则空间, $\mathscr{B}$ 是 X 的 σ 局部有限基. 设 A, B 是不相交的闭集. 由正则性, 对每一 $x\in A$, 存在 $\mathscr{B}$ 中开集 U_x 使 $x\in U_x$, 且 $\overline{U_x}\cap B=\varnothing$, 置 $\mathscr{U}=\{U_x: x\in A\}$, $\mathscr{U}$ 覆盖 A. 类似地可得 $\mathscr{V}=\{V_y: y\in B\}$ 覆盖 B, 这里 $y\in V_y$, $V_y\in\mathscr{B}$, 且 $\overline{V}\cap A=\varnothing$. 由于 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 中的元都取自 σ 局部有限基 $\mathscr{B}$, 可写成 $\mathscr{U}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{U}_n$, $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$, 这里 $\mathscr{U}_n,\mathscr{V}_n$ 都是局部有限的, 置

$$U_n=\bigcup\{U: U\in\mathscr{U}_n\},\ V_n=\bigcup\{V: V\in\mathscr{V}_n\}.$$

由局部有限性(定理 3.5.17),

$$\overline{U}_n=\bigcup\{\overline{U}: U\in\mathscr{U}_n\},\ \overline{V}_n=\bigcup\{\overline{V}: V\in\mathscr{V}_n\}.$$

所以 $\overline{U}_n$ 与 B 不交, $\overline{V}_n$ 与 A 不交 $(n\in N)$, (以下证法同定理 2.1.7), 置

$$U'_n=U_n-\bigcup\{\overline{V}_k: k\leqslant n\},\ V'_n=V_n-\bigcup\{\overline{U}_k: k\leqslant n\}.$$

则 $U=\bigcup_{n\in N}U'_n$, $V=\bigcup_{n\in N}V'_n$ 是分别包含 A, B 两不相交的开集. 证完.

下面要引用本章开始时引入拟度量.

引理 4.3.9 设 $(X,\mathscr{T})$ 是 T_0 空间, $\{\rho_n\}_{n\in N}$ 是 X 上的可数个拟度量. 每一 $\rho_n(x,y)\leqslant 1\ (x,y\in X)$ 且满足如下条件:

(i) 每一 $\rho_n: X\times X\to R$ 是连续函数(关于 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$),

(ii) 对每一 $x\in X$, 每一不空的闭集 $A\subset X$ 使 $x\notin A$, 存在 $n\in N$ 使 $D_n(x,A)=\inf\limits_{a\in A}\rho_n(x,a)>0$. 则空间 X 可度量化且 X 上的度量

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\rho_n(x,y),$$

导出的度量拓扑重合于 $\mathscr{T}$.

证明 先证 $\rho(x,y)$是集 X 上的度量. 显然满足度量公理(M2),(M3)且 $\rho(x,x)=0(x\in X)$. 因 X 是 T_0 空间,对不同的点 $x,y\in X$,或者 $x\notin\overline{\{y\}}$,或者 $y\notin\overline{\{x\}}$(定理 2.2.2). 如 $x\notin\overline{\{y\}}$,由(ii)存在 $n\in N$,使 $D_n(x,\overline{\{y\}})=\inf\limits_{a\in\overline{\{y\}}}\rho_n(x,a)>0$. 从而 $\rho_n(x,y)>0,\rho(x,y)>0$. 所以 ρ 是集X 上的度量.

现证 ρ 导出的度量拓扑就是 $\mathscr{T}$. 由定理 4.1.9 只要证明

$$D(x,A)=0 \quad 当且仅当 \quad x\in\overline{A}^{*)}.$$

设 $x\notin\overline{A}$,则由(ii)存在 $n\in N$ 使$D_n(x,\overline{A})=r>0$,从而

$$D(x,A)\geqslant D(x,\overline{A})\geqslant r/2^n>0.$$

相反地,由(i)每一拟度量 $\rho_n:X\times X\to R$(关于$(X,\mathscr{T})$)连续,从而 ρ 也连续(由一致收敛性). 从而由定理 4.1.8 的证明知$f(x)=D(x,A)$在$(X,\mathscr{T})$上连续. 所以,设 $x\in\overline{A}$,则 $f(x)\in f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}=\{0\}$(按 $x\in A\Rightarrow D(x,A)=0$,所以 $f(A)=\{0\}$). 这就是 $D(x,A)=0$. 证完.

定理 4.3.10(Nagata[1950]-Smirnov[1951]) 拓扑空间 X 可度量化,当且仅当 X 是正则的且具有σ 局部有限基.

证明 必要性的证明可由定理 4.1.10 及定理 4.3.7 得到,因为离散集族是局部有限的. 下证充分性.

设正则空间 X 具有基 $\mathscr{B}=\bigcup\limits_{n\in N}\mathscr{B}_n$,$\mathscr{B}_n=\{B_{\alpha_n}\}_{\alpha_n\in A_n}$是局部有限的. 对每一对自然数 n,m 及每一$\alpha_n\in A_n$,置

$$V_{\alpha_n,m}=\bigcup\{B_{\alpha m}:B_{\alpha m}\in\mathscr{B}_m,\overline{B}_{\alpha m}\subset B_{\alpha n}\}. \qquad (1)$$

由局部有限性,$\overline{V_{\alpha_n,m}}\subset B_{\alpha n}$. 由引理 4.3.8,$X$ 是正规的. 由乌利松引理,存在连续函数 $f_{\alpha_n,m}:X\to[0,1]$使 $f_{\alpha_n,m}(X-B_{\alpha_n})=\{0\}$,

---

*)按定理 4.1.9,$\overline{A}=\{x:D(x,A)=0\}$中的$\overline{A}$是关于集 X 上的度量ρ 所导出的度量拓扑的闭包,而这里的$\overline{A}$是关于空间$(X,\mathscr{T})$上的拓扑 $\mathscr{T}$ 的闭包.

$f_{\alpha_n,m}(\overline{V}_{\alpha_n,m})=\{1\}$. 由 $\mathscr{B}_n$ 的局部有限性，对每一点 $x\in X$ 存在开邻域 $U(x)$ 及有限集 $A_n(x)\subset A_n$ 使 $U(x)\cap B_{\alpha n}=\varnothing$, $\alpha_n\in A_n-A_n(x)$. 考虑积空间 $X\times X$ 的开覆盖 $\{U(x)\times U(y)\}_{x,y\in X}$，对每一个 $U(x)\times U(y)$ 定义连续函数 $g_{\alpha_n,m}:U(x)\times U(y)\to R$ 使

$$g_{\alpha_n,m}(x_1,x_2)=\sum_{\alpha_n\in A_n(x_1)\cup A_n(x_2)}|f_{\alpha_n,m}(x_1)-f_{\alpha_n,m}(x_2)|,$$

$$(x_1,x_2)\in U(x)\times U(y).$$

由于当 $\alpha_n\notin A_n(x_1)\cup A_n(x_2)$ 时，$f_{\alpha_n,m}$ 在 $U(x)$ 及 $U(y)$ 上为零，上述等式可改写为

$$g_{n,m}(x_1,x_2)=\sum_{\alpha_n\in A_n}\left|f_{\alpha_n,m}(x_1)-f_{\alpha_n,m}(x_2)\right|$$

$$=g_{\alpha_n,m}(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in U_{(x)}\times U_{(y)}.$$

定义函数 $\rho_{n,m}:X\times X\to R$ 使 $\rho_{n,m}(x_1,x_2)=g_{n,m}(x_1,x_2)$. 当 $(x_1,x_2)\in U(x)\times U(y)$*)，易证 $\rho_{n,m}$ 是连续的. 置 $\rho'_{n,m}(x_1,x_2)=\min(1,\rho_{n,m}(x_1,x_2))$，则 $\rho'_{n,m}$ 是集 X 上的拟度量且 $\rho'_{n,m}(x_1,x_2)\leqslant 1$ $(x_1,x_2\in X)$.

到此得到了集 X 上的可数个拟度量 $\{\rho'_{n,m}\}_{n,m\in N}$. 由以上构造过程，这些拟度量满足引理 4.3.9 的条件(i). 下证满足条件(ii). 对每一 $x\in X$ 及不空闭集 $A\subset X$，使 $x\notin A$，存在开集 $B,B'\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B'\subset\overline{B'}\subset B$, $A\subset X-B'$. 显然，可以作为 $B=B_{\alpha_n}\in\mathscr{B}_n$, $B'=B_{\alpha_m}\in\mathscr{B}_m$，这里 $\alpha_n\in A_n$, $\alpha_m\in A_m$，由(1)，$B_{\alpha_m}\subset V_{\alpha_n,m}$，故存在 $f_{\alpha_n,m}$ 使

$$f_{\alpha_n,m}(x)=1;\qquad f_{\alpha_n,m}(a)=0, a\in A.$$

从而 $g_{n,m}(x,a)\geqslant 1$, $\rho_{n,m}(x,a)\geqslant 1$ 及 $\rho'_{n,m}(x,a)=1$, $a\in A$. 所以 $\inf\limits_{a\in A}\rho_{n,m}(x,a)=1$. 到此证明了这可数个拟度量满足引理 4.3.9

---

*) 如 $(x_1,x_2)\in(U(x)\times U(y))\cap(U(x')\times U(y'))$，易知 $g_{n,m}(x_1,x_2)=g'_{n,m}(x_1,x_2)$. 这里 $g'_{n,m}:U(x')\times U(y')\to R$.

的条件(ii).

由引理 4.3.9 知 X 可度量化. 证完.

由定理 4.3.7 及定理 4.3.10,得下述 Bing 定理.

定理 4.3.11(Bing[1951]) 拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是正则的且具有 σ 离散基.

§4. 可度量化空间在某些映射下的象

这一节主要叙述有关可度量化空间在闭映射或开映射下的象的一些结果.

熟知度量空间满足第一可数公理,而前面的例 4.1.22 指出度量空间在连续闭映射下的象未必满足第一可数公理,从而未必是可度量化的. 因此,要使度量空间在闭映射下的象保持可度量化,必须对映射或象空间附加一些条件.

下面的例说明度量空间在连续开映射下的象也未必是可度量化的.

例 4.4.1 考察通常平面的子空间

$$X=\{(0,0)\}\cup\left(\bigcup_{i\in N}\bigcup_{j=i}^{\infty}\left\{\left(0,\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right)\right)\right\}\right.$$

$$\left.\cup\left(\bigcup_{i\in N}\left\{\left(1,\frac{1}{i}\right)\right\}\right)\cup\left(\bigcup_{i\in N}\bigcup_{j=i}^{\infty}\left\{\left(1,\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right)\right)\right\}\right)\right).$$

把第二坐标相同的两点合为一点,即把上式中

$$\bigcup_{i\in N}\bigcup_{j=i}^{\infty}\left\{\left(0,\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right)\right)\right\}$$

中的点与

$$\bigcup_{i\in N}\bigcup_{j=i}^{\infty}\left\{\left(1,\left(\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right)\right)\right\}$$

中的相应点重合,其他的点仍旧,在所得集上给以商拓扑,所得空间记作 Y. 下证商映射 q 是开映射.

设 $A\subset X$ 是开集. $q^{-1}(q(A))$是由添增一些孤立点于 A 而形成的,故 $q^{-1}(q(A))$仍是开集,从而(商映射的定义)$q(A)$是开

集.

易知 Y 是 T_2 空间. 下证 Y 不是正则空间. 取空间 Y 的闭子集 $F=\bigcup_{i\in N}\left\{\left(1,\frac{1}{i}\right)\right\}$,空间 Y 中的点 $(0,0)\notin F$. 设 U,V 是空间 Y 任意一对开子集满足 $(0,0)\in U, F\subset V$, 下证 $U\cap V\neq\varnothing$. 因 $(0,0)\in U$, 存在 $i_0\in N$ 使当 $j\geqslant i\geqslant i_0$ 时, $\left(0,\frac{1}{i}+\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{j}\right)\in q^{-1}(U)$. 因 $F\subset V$, 存在 $j_0\geqslant i_0$ 使当 $j\geqslant j_0$ 时, $\left(1,\frac{1}{i_0}+\frac{1}{i_0}\cdot\frac{1}{j}\right)\in q^{-1}(V)$. 置 $y=\frac{1}{i_0}+\frac{1}{i_0}\cdot\frac{1}{j_0}$, 则有 $(0,y)\in q^{-1}(U)$ 及 $(1,y)\in q^{-1}(V)$. 从而 $q(0,y)=q(1,y)\in U\cap V$.

注意在上例中的商映射 q, 对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是单点集或两点集, 这例说明有限对一的连续开映射未必能保持可度量化性.

引理 4.4.2(Michael[1953]) 设拓扑空间 X 的每一开覆盖具有局部有限的加细闭覆盖, 则空间 X 的每一开覆盖具有局部有限的加细开覆盖, 也就是 X 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖, 取局部有限闭覆盖 $\mathscr{A}=\{A_s\}_{s\in S}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $x\in X$ 选取开邻域 V_x 仅与 $\mathscr{A}$ 中有限个元相交, 设 $\mathscr{F}$ 是一局部有限闭覆盖加细开覆盖 $\{V_x\}_{x\in X}$. 对每一 $s\in S$, 置

$$W_s = X - \bigcup\{F: F\in\mathscr{F}, F\cap A_s=\varnothing\}.$$

显然, W_s 是包含 A_s 的开集(由 $\mathscr{F}$ 的局部有限性). 此外, 对每一 $s\in S$, 每一 $F\in\mathscr{F}$,

$$W_s\cap F\neq\varnothing \quad \text{当且仅当 } A_s\cap F\neq\varnothing. \tag{1}$$

对每一 $s\in S$, 取 $U(s)\in\mathscr{U}$ 使 $A_s\subset U(s)$ 且设 $V_s=W_s\cap U(s)$, $\{V_s\}_{s\in S}$ 是一开覆加细 $\mathscr{U}$. 由于每一 $x\in X$ 具有邻域仅与 $\mathscr{F}$ 的有限个元相交, 而 $\mathscr{F}$ 的每一个元素(包含在某 V_x 内)仅与 $\mathscr{A}$ 的有限个元素相交, 由(1)仅与有限个 W_s 相交, 从而仅与有限个 V_s 相交. 故知覆盖 $\{V_s\}_{s\in S}$ 是局部有限的. 证完.

集族 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 称为**点有限的**(point-finite), 如果对每一 x

$\in X$，$x\in U_\alpha$ 仅对有限个 $\alpha\in A$ 成立．显然，局部有限集族是点有限的．

引理 4.4.3 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正规空间 X 的点有限开覆盖，则存在开覆盖 $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使 $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha(\alpha\in A)$．

证明 考察所有满足如下条件的开覆盖 $\mathscr{R}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$．存在 $H_{\mathscr{R}}\subset A$ 使 $\alpha\in H_{\mathscr{R}}$，$\overline{X}_\alpha\subset U_\alpha$；$\alpha\notin H_{\mathscr{R}}$，$X_\alpha=U_\alpha\neq\overline{U}_\alpha$．设这些覆盖 $\mathscr{R}$ 所成集为 Φ．Φ 不是空的，因可把 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 记作 $\mathscr{R}_0=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，这里的 $H_{\mathscr{R}_0}$ 是 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 中一些既开且闭的 U_α 的下标 α 所成集（如这种 U_α 不存在，则 $H_{\mathscr{R}_0}=\varnothing$）．在集 Φ 上定义序"$<$"：设 $\mathscr{R}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$，$\mathscr{R}'=\{X'\}_{\alpha\in A}$，规定 $\mathscr{R}<\mathscr{R}'$，如果 $H_{\mathscr{R}}\subset H_{\mathscr{R}'}$ 且对 $\alpha\in H_{\mathscr{R}}$，$X'_\alpha=X_\alpha$．易知 Φ 形成半序集．任取 Φ 中的全序子集 Ψ．下证 Ψ 有上界．

置 $K=U_{\mathscr{R}\in\Psi}H_{\mathscr{R}}$，构造 $\mathscr{C}=\{Z_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使对 $\alpha\in K$，Z_α 是某 $\mathscr{R}\in\Psi$ 中具有相同下标的开集；对 $\alpha\notin k$，取 $Z_\alpha=U_\alpha$，下标 $\mathscr{C}$ 是 X 的开覆盖，对每一 $x\in X$，由 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的点有限性，x 属于有限个 U_α．如这有限个下标中有一个 α 不属 k，这时 $Z_\alpha=U_\alpha$；如这有限个下标都属于 k，必存在某 $H_{\mathscr{R}}$ 使这有限个 α 都属于 $H_{\mathscr{R}}$，由于 $\mathscr{R}=\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是覆盖，x 属于 $\mathscr{R}$ 中的某一元 $X_\alpha=Z_\alpha$，故 $\mathscr{C}$ 是覆盖，是即 Ψ 有上界．

由 Zorn 引理，Φ 中有极大元 $\mathscr{M}=\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$．下证 $H_{\mathscr{M}}=A$，从而引理 4.4.3 得证．设不然，存在 $\alpha\notin H_{\mathscr{M}}$，则有 $M_\alpha=U_\alpha$，置 $U=\bigcup_{\beta\neq\alpha}M_\beta$，$U$ 是开集，而 $X-M_\alpha$ 是闭集且 $U\supset X-M_\alpha$，由正规性，存在开集 V 使 $X-M_\alpha\subset V\subset\overline{V}\subset U$，令 $M'_\alpha=X-\overline{V}$，显然，$M'_\alpha\cup U=X$ 且 $\overline{M}'_\alpha\subset M_\alpha$．这与 $\mathscr{M}$ 是极大元矛盾．证完．

引理 4.4.4 完备映射保持局部有限集族．

证明 设 f 是拓扑空间 X 到拓扑空间 Y 上的完备映射，$\mathscr{U}$ 是 X 中的局部有限集族．下证 $\mathscr{V}=\{f(U):U\in\mathscr{U}\}$ 是 Y 中的局部有限集族．

对每一 $y\in Y$，每一 $x\in f^{-1}(y)$，存在开邻域 $U(x)$ 与有限个

$U\in\mathscr{U}$相交,因 $f^{-1}(y)$是紧的,有限个 $U(x)$覆盖了 $f^{-1}(y)$,设这有限个 $U(x)$的并为 V_y, $V_y\supset f^{-1}(y)$. 因 f 是闭映射,存在开集 W_y 使 $V_y\supset W_y\supset f^{-1}(y)$,且 $f(W_y)$是 Y 中的开集及 $W_y=f^{-1}(f(W_y))$, W_y 与有限个U 相交. $f(W_y)$与某 $f(U)$相交当且仅当 W_y 与这一U 相交,故点 y 的邻域$f(W_y)$仅与有限个 $f(U)$相交. 证完.

注记 如果上述引理中的 f 是闭映射,且 $f^{-1}(y)$具有 Lindelöf 性质. 由完全类似的证法可以得到这样的映射保持局部可数集族 $\mathscr{U}$(即对每一 $x\in X$ 存在邻域仅与可数个 $U\in\mathscr{U}$相交).

引理 4.4.5 完备映射保持正规仿紧性.

证明 设 f 是正规仿紧空间X 到拓扑空间 Y 上的完备映射,显然 Y 是正规空间(习题 2.11). 设 $\mathscr{V}$是 Y 的开覆盖, $f^{-1}(\mathscr{V})=\{f^{-1}(V)\}_{V\in\mathscr{V}}$是 X 的开覆盖. 由仿紧性,存在局部有限开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_s\}_{s\in S}$加细$f^{-1}(\mathscr{V})$. 由正规性及引理 4.4.3,存在闭覆盖 $\mathscr{F}=\{F_s\}_{s\in S}$ 使 $F_s\subset U_s$, $s\in S$. $\mathscr{F}$ 是局部有限的. 由引理 4.4.4, $\{f(F_s)\}_{s\in S}$是空间 Y 的局部有限闭覆盖加细 $\mathscr{V}$,由引理 4.4.2,知 Y 是仿紧空间. 证完.

引理 4.4.6 设 K 是度量空间(X,ρ)的紧子集. 开集 $U\supset K$,则存在 $r>0$ 使开球 $S_r(K)\subset U$(这里 $S_r(K)=\bigcup\{(S_r(x):x\in K\})$.

证明 置 $f(x)=D(x,X-U)$. 由定理 4.1.8, $f:X\to[0,\infty)$是连续映射. 由定理 4.1.9 知在 K 上$f(x)>0$,熟知紧集 K 上的连续函数达到上、下确界,故存在 $r>0$ 使 $f(x)\geqslant r$, $x\in K$. 从而 $S_r(K)\subset U$. 证完.

定义 4.4.7 拓扑空间 X 的开覆盖序列$\{\mathscr{W}_i\}_{i\in N}$称为空间$X$ 的一个**展开**(development),如果对每一 $x\in X$,每一包含 x 的开集U,存在 $i\in N$,使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{W}_i)\subset U$. 具有展开的空间称为**可展**(development)空间.

易知度量空间是可展空间. 对每一 $i\in N$, 置 $\mathscr{W}_i=\{S_{1/2^i}(x)\}$,则$\{\mathscr{W}_i\}$是一个展开.

引理 4.4.8 设可展空间 X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限加细开覆盖，则 X 具有 σ 局部有限基.

证明 设 $\{\mathscr{W}_i\}_{i\in N}$ 是 X 的一个展开. 对每一 $i\in N$，存在 σ 局部有限开覆盖 $\mathscr{B}_i=\bigcup_{j\in N}\mathscr{B}_{i,j}$ 加细 $\mathscr{W}_i$，每一 $\mathscr{B}_{i,j}$ 是局部有限开集族. 置 $\mathscr{B}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{B}_i$，$\mathscr{B}$ 是 σ 局部有限开集族. 下证 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基. 对每一 $x\in X$，每一包含 x 的开集 U(由定义 4.4.7)，存在 $i\in N$，使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{W}_i)\subset U$. 因 $\mathscr{B}_i$ 加细 $\mathscr{W}_i$，$\mathrm{st}(x,\mathscr{B}_i)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{W}_i)\subset U$. 故存在 $B\in\mathscr{B}_i$ 使 $x\in B\subset U$. 证完.

定理 4.4.9 完备映射保持可度量化性.

证明 设 f 是度量空间 (X,ρ) 到拓扑空间 Y 上的完备映射. 对每一 $y\in Y$，$i\in N$，置

$$\begin{aligned}U_i(y)&=S_{1/i}(f^{-1}(y))=\bigcup_{x\in f^{-1}(y)}S_{1/i}(x)\\&=\{x':\text{存在 } x\in f^{-1}(y)\text{ 使 }\rho(x,x')<1/i\},\end{aligned}\tag{1}$$

$$W_i(y)=Y-f(X-U_i(y)),\tag{2}$$

$$V_i(y)=f^{-1}(W_i(y))\subset U_i(y).\tag{3}$$

因 f 是闭映射，$W_i(y)$ 是 Y 中包含点 y 的开集，$V_i(y)$ 是 X 中包含 $f^{-1}(y)$ 的开集. 且由(2),(3)可知 $V_i(y)$ 是包含在 $U_i(y)$ 内的最大的饱和集*). 由(1),(2),(3)，显然对每一 $y\in Y$，$j\geqslant i$，有

$$U_j(y)\subset U_i(y),\ W_j(y)\subset W_i(y),\ V_j(y)\subset V_i(y).\tag{4}$$

对每一 $i\in N$，$\mathscr{W}_i=\{W_i(y)\}_{y\in Y}$ 是 Y 的开覆盖. 下证开覆盖序列 $\{\mathscr{W}_i\}_{i\in N}$ 是空间 Y 的一个展开，为此，先证对每一 $y\in Y$，集族

$$\{W_i(y)\}_{i\in N}\text{ 是 }y\text{ 的邻域基}.\tag{5}$$

设 V 是 y 的开邻域，$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V)$. 因 $f^{-1}(y)$ 紧，由引理 4.4.6 存在

$$S_{1/i}(f^{-1}(y))=U_i(y)\subset f^{-1}(V).$$

由(3)，$V_i(y)\subset f^{-1}(V)$，从而 $W_i(y)=f(V_i(y))\subset V$. 下证

$$\forall y\in Y,\forall i\in N,\exists j\in N\text{ 使 }\mathrm{st}(y,\mathscr{W}_j)\subset W_i(y).\tag{6}$$

---

*) 称集 A 是关于映射 f 的**饱和集**(Saturated set)，如果 $A=f^{-1}(f(A))$.

由(2),(3),$f^{-1}(y)\subset V_{2i}(y)$. 因 $f^{-1}(y)$紧,由引理 4.4.6,存在 $j\geqslant 2i$ 使

$$U_j(y) \subset V_{2i}(y). \tag{7}$$

设 y 属于 $\mathscr{W}_j$ 中的某一元 $W_j(z)$,要证 $W_j(z)\subset W_i(y)$,从而(6)式得证. 由(3),

$$f^{-1}(y) \subset f^{-1}(W_j(z)) = V_j(z) \subset U_j(z).$$

显然 $f^{-1}(z)\subset f^{-1}(W_j(z))\subset U_j(z)$. 对每一 $x\in f^{-1}(y)\subset U_j(z)$,由(1),存在 $x'\in f^{-1}(z)$,使 $\rho(x,x')<\frac{1}{j}$. 从而 $f^{-1}(z)\cap U_j(y)\neq\varnothing$. 由(7)及 $V_{2i}(y)$是饱和集,得

$$f^{-1}(z) \subset V_{2i}(y). \tag{8}$$

任取 $t\in W_j(z)$,因 $f(V_j(z))=W_j(z)$,$f^{-1}(t)\cap V_j(z)\neq\varnothing$. 因 $V_j(z)$是饱和集,$f^{-1}(t)\subset V_j(z)\subset U_j(z)$. 而由(1),$f^{-1}(z)\subset U_j(z)$,故有

$$\forall x \in f^{-1}(t), \exists x' \in f^{-1}(z) \Rightarrow \rho(x,x') < \frac{1}{j} < \frac{1}{2i}. \tag{9}$$

由(8)及(2),$f^{-1}(z)\subset V_{2i}(y)\subset U_{2i}(y)$,而由(1),$f^{-1}(y)\subset U_{2i}(y)$. 故对每一 $x'\in f^{-1}(z)$,存在 $x''\in f^{-1}(y)$使 $\rho(x',x'')<\frac{1}{2i}$. 结合(9)式得 $\rho(x,x'')<\frac{1}{i}$. 从而 $f^{-1}(t)\subset U_i(y)$. 由于 $V_i(y)$是包含在 $U_i(y)$内最大的饱和集,所以 $f^{-1}(t)\subset V_i(y)$. 从而 $t\in W_i(y)$,由 t 的任意性,$W_j(z)\subset W_i(y)$. (6)式得证.

由(5),(6)知$\{\mathscr{W}_i\}_{i\in N}$是空间 Y 的一个展开. 由于度量空间是仿紧的(定理 4.3.5),由引理 4.4.5, Y 是仿紧的. 由引理 4.4.8 及定理 4.3.10, Y 是可度量化空间. 证完.

引理 4.4.10(E. Michael[1964]) 设 f 是 T_1 空间 X 到满足第一可数公理的空间 Y 上的连续闭映射,则 X 上的任一实值连续函数在每一$\partial f^{-1}(y)(y\in Y)$上有界($\partial f^{-1}(y)$表示 $f^{-1}(y)$的边缘).

证明 首先给出满足第一可数公理的一个等价刻画:"对每一

$x\in X$,存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}$,任取 $x_n\in U_n(x)$,序列 $\{x_n\}$ 以 x 为聚点."读者容易自己证明.

用反证法.如不然,存在实值连续函数 $h:X\to R$ 及 $y\in Y$,使 h 在 $\partial f^{-1}(y)$ 上无界,则可取序列 $\{x_n\}\subset\partial f^{-1}(y)$ 使

$$|h(x_{n+1})|>|h(x_n)|+1,n\in N.$$

置

$$V_n=\left\{x:x\in X,|h(x)-h(x_n)|<\frac{1}{2}\right\}.$$

则 $\{V_n\}_{n\in N}$ 是离散开集族,且 $x_n\in V_n$.设 $\{U_n(y)\}$ 是点 y 的开邻域序列.下面取 $z_n\in V_n\cap f^{-1}(U_n(y))$ 使所有的 $f(z_n)$ 是不同的,取 $z_1=x_1$,设 $k\leqslant n-1$,已取得 $z_2,z_3,\cdots,z_{n-1}$ 满足上述条件,置

$$W_n=(V_n\cap f^{-1}(U_n(y))-\bigcup_{k=2}^{n-1}f^{-1}(f(z_k)).$$

因 f 是闭映射,Y 是 T_1 的,$f^{-1}(f(z_k))$ 是闭集,W_n 是 x_n 的开邻域.由于 x_n 是 $f^{-1}(y)$ 的边缘点,所以 $W_n-f^{-1}(y)$ 不空.取 $z_n\in W_n-f^{-1}(y)$.这 z_n 显然满足条件.置 $Z=\{z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots\}$,$Z$ 的任何子集是闭集.因 f 是闭映射,$f(Z)=\{f(z_n)\}$ 的任何子集都闭于 Y,是即序列 $\{f(z_n)\}$ 无聚点.但是 $f(z_n)\in U_n(y)(n\in N)$.这与 Y 满足第一可数公理矛盾.证完.

注记:上述引理中的"满足第一可数公理"可以代以"可数紧",结论也成立(由定理 3.5.3 得矛盾).

引理 4.4.11 设 f 是 T_1 空间 X 到拓扑空间 Y 上的边缘紧的(即对每一 $y\in Y$,$\partial f^{-1}(y)$ 是紧的)闭映射,则存在闭集 $F\subset X$ 使 $f|_F$ 是 F 到 Y 上的完备映射.

证明 因 f 是闭映射,Y 是 T_1 的,$f^{-1}(y)$ 闭于 X,$\partial f^{-1}(y)\subset f^{-1}(y)$.当 y 是 Y 的孤立点时,$\{y\}$ 同时是开集,$f^{-1}(y)$ 既开且闭,$\partial f^{-1}(y)=\varnothing$.这时任取 $p_y\in f^{-1}(y)$.设 Y 中孤立点所成集为 E,置

$$F=\bigcup\{\{p_y\}:y\in E\}\cup(\bigcup\{\partial f^{-1}(y):y\in Y-E\}).$$

下证 F 是闭集.设 $x\notin F$,x 必属于某一 $f^{-1}(y)$.这时,如 y

$\in E$,则 $f^{-1}(y)$是开集,$f^{-1}(y)-\{p_y\}$是包含点 x 的开集(因单点集$\{p_y\}$是闭集)与 F 不交;如 $y\in Y-E$,则 $f^{-1}(y)-\partial f^{-1}(y)$ 是包含点 x 的开集(因为 $A-\partial A=A^{\circ}$)与 F 不交.故 F 是空间X的闭集.

易证 f 在闭集F 上的限制$f|_F$ 是F 到 Y 上的闭映射,由于每一 $y\in Y$ 关于 $f|F$ 的原象或者是紧集$\partial f^{-1}(y)$或者是单点集$\{p_y\}$,所以 $f|F$ 是完备映射.证完.

定理 4.4.12 (Morita-Honai[1956],A. H. Stone[1956]) 设 f 是度量空间(X,ρ)到拓扑空间 Y 上的闭映射.则下列论断等价:

(i) 空间 Y 可度量化,

(ii) 空间 Y 满足第一可数公理,

(iii) f 是边缘紧的(即对每一 $y\in Y$,$\partial f^{-1}(y)$是紧的).

证明 (i)⇒(ii)显然;(ii)⇒(iii)由引理 4.4.10 及定理 3.5.13 的证法知$\partial f^{-1}(y)$是可数紧的.然后由定理 4.1.15 知$\partial f^{-1}(y)$是紧的.(iii)⇒(i)由引理 4.4.11 及定理 4.4.9 得证.证完.

引理 4.4.13 连续开映射保持第一可数性.

证明 设 f 是满足第一可数公理的空间X 到空间Y 上的连续开映射.对每一 $y\in Y$,任取 $x\in f^{-1}(y)$,设$\{U_n(x)\}$是点 x 的可数邻域基.因 f 是连续开映射,易证$\{f(U_n(x))\}$是点 y 的可数邻域基.证完.

注记 由以上证明可知连续开映射保持邻域基的势.注意证明中曾"任取点 $x\in f^{-1}(y)$",A. Архангеаbский[1962]曾定义一种弱于开映射的映射,称为**几乎开**(almost open)**映射**:如果对每一$y\in Y$,存在 $x\in f^{-1}(y)$,对 x 的每一邻域$U(x)$,$f(U(x))$是 y 的邻域.显然连续的几乎开映射保持邻域基的势,特别保持第一可数性.

定理 4.4.14 (V. K. Balochandran[1955])既开且闭的连续映射保持可度量化性.

证明 由定理 4.4.12 及引理 4.4.13 得证. 证完.

定理 4.4.15 (понмарев[1960] – Hanai[1961])每一个满足第一可数公理的 T_1 空间是某一度量空间在连续开映射下的象.

证明 设 X 是满足第一可数公理的 T_1 空间. 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的所有的开集构成的集族. 利用指标集 A 构造广义贝勒零维空间 $N(A)$, 这是一度量空间, 度量 ρ 的定义见例 4.1.3. 取空间 $N(A)$ 的子集

$$S=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots):\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots\}\text{ 形成某一点 } x\in X \text{ 的邻域基}\}.$$

定义映射 $f:S\to X$, 使 $f(\alpha)=x$, 这里 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 而 $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots\}$ 形成点 x 的邻域基(由于 X 是 T_1 的, f 是一映射), 下证 f 是连续的.

设 U 是点 $f(\alpha)=x$ 的任一开邻域, 这里 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$ 由 f 的定义, $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots\}$ 是 x 的邻域基. 存在 U_{α_i} 使 $x\in U_{\alpha_i}\subset U$, 对任一满足 $\rho(\alpha,\alpha')<\frac{1}{i}$ 的 $\alpha'=(\alpha'_1,\alpha'_2,\cdots)\in S$, 由 ρ 的定义知 $\alpha'_1=\alpha_1,\alpha'_2=\alpha_2,\cdots,\alpha'_i=\alpha_i$. 由 S 的定义, $f(\alpha')$ 的邻域基应是 $\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots,U_{\alpha_i},U_{\alpha_{i+1}},\cdots\}$ 所以

$$f(\alpha')\in\bigcap_{k=1}^{i}U_{\alpha_k}\subset U_{\alpha_i}\subset U.$$

到此证明了 f 的连续性. 下证 f 是开映射.

由于 $\{S_{1/k}(\alpha):k\in N,\alpha\in S\}$ 是子空间 S 的基, 只要证明对任一 $\alpha\in S$, 任一 $k\in N$, $f(S_{1/k}(\alpha))$ 是开集. 设 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$. 下面将证明

$$f(S_{1/k}(d))=\bigcap_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}.$$

从而证明了 f 是开映射. 由 ρ 的定义, 显然 $f(S_{1/k}(\alpha))\subset\bigcap_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$, 下证相反包含关系. 设 $x\in\bigcap_{i=1}^{k}U_{\alpha_i}$, 选取开集序列 $U_{\beta_{k+1}},U_{\beta_{k+2}},\cdots$, 使 $\{U_{\beta_j}:j=k+1,k+2,\cdots\}$ 是点 x 的邻域基. 则 $\alpha'=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k,\beta_{k+1},\cdots)$ 是 S 中的一点且 $f(\alpha')=x$. 由 ρ 的定义,

$\rho(\alpha, \alpha')<\dfrac{1}{k}$,所以 $x\in f(S_{1/k}(\alpha))$.从而相反包含关系得证.

综上,证明了 f 是 $N(A)$的子空间到空间 X 的连续开映射.证完.

由定理 4.4.13 及定理 4.4.15 可知:满足第一可数公理的 T_1 空间可以刻划为度量空间在连续开映射的象.

§5. 一 致 空 间

一致空间可以作为介于拓扑空间与度量空间之间的一类空间.自从 A. Weil[1938]引进以来,关于它的理论可以独立于拓扑空间理论以外,但与拓扑空间有密切联系. N. Bourbaki 的书[1951]曾以大量篇幅阐述其理论.这里仅作简单介绍.为了适应近代一般拓扑学的需要,这里基本上采用 J. W. Tukey[1940]的理论.最后论证两种理论间的关系.

前面曾对拓扑空间 X 的覆盖引进点星加细,星加细覆盖等概念(定义 4.3.6).下面将对集 X 引用这些概念.

设 $\mathscr{U}$ 是集 X 的覆盖.对 $x\in X$,记 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U})=\bigcup\{U: U\in\mathscr{U}, x\in U\}$;对 $A\subset X$,记 $\mathrm{st}(A,\mathscr{U})=\bigcup\{U\in\mathscr{U}: U\cap A\neq\varnothing\}$.

设 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 是集 X 的覆盖,如果对 $\mathscr{V}$ 的每一元 V 存在 $U\in\mathscr{U}$ 使 $V\subset U$,则称覆盖 $\mathscr{V}$ 加细覆盖 $\mathscr{U}$,记作 $\mathscr{V}<\mathscr{U}$;如果覆盖 $\{\mathrm{st}(V,\mathscr{V}): V\in\mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$,则称 $\mathscr{V}$ 星加细 $\mathscr{U}$,记作 $\mathscr{V}\overset{*}{<}\mathscr{U}$.

设 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 是集 X 的覆盖,称 $\mathscr{U}\wedge\mathscr{V}=\{U\cap V: U\in\mathscr{U}, V\in\mathscr{V}\}$ 为覆盖 $\mathscr{U},\mathscr{V}$ 的交.这规定也适用于有限个覆盖的情况.

定义 4.5.1 设 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是集 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 所成的族,如果满足下列条件:

(U_1)对 X 的覆盖 $\mathscr{U}$,如存在 $\alpha\in A$,使 $\mathscr{U}_\alpha<\mathscr{U}$,则 $\mathscr{U}\in\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$,

(U_2)对任意 $\alpha,\beta\in A$,存在 $\gamma\in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\alpha$, $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\beta$,

(U_3) 对每一 $\alpha\in A$,存在 $\beta\in A$,使 $\mathscr{U}_\beta\overset{*}{<}\mathscr{U}_\alpha$,

(U_4) 对任意 $x,y\in X(x\neq y)$,存在 $\alpha\in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha$ 中没有一个元同时包含点 x 与 y.

则称 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是集 X 上的一个**一致结构**(uniformity),集 X 连同它的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 称为**一致空间**(uniform space).可以记为 $(X,\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\})$.为简便起见仍记为 X.一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 的子族 $\{\mathscr{U}_\beta:\beta\in B\}(B\subset A)$ 称为**一致结构的基**(basis of uniformity),如果对每一 $\alpha\in A$,存在 $\beta\in B$ 使 $\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}_\alpha$.

定理 4.5.2 集 X 的覆盖所行成的族 $\{\mathscr{U}_\beta:\beta\in B\}$ 是集 X 上的某一个一致结构的基当且仅当满足定义 4.5.1 的(U_2)—(U_4).

证明 设 $\Phi'=\{\mathscr{U}_\beta:\beta\in B\}$ 是 X 上的一致结构 $\Phi=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 的基.对 $\beta,\beta'\in B$,因 $\Phi'\subset\Phi$,$\beta,\beta'\in A$,由于 Φ 满足(U_2),存在 $\gamma\in A$,使 $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\beta,\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\beta'$.因 Φ' 是 Φ 的基,存在 $\gamma'\in B$ 使 $\mathscr{U}_{\gamma'}<\mathscr{U}_\gamma$,从而 $\mathscr{U}_{\gamma'}<\mathscr{U}_\beta,\mathscr{U}_{\gamma'}<\mathscr{U}_{\beta'}$.所以 Φ' 满足(U_2).类似地可证 Φ' 满足(U_3),(U_4).

相反地,设 $\Phi'=\{\mathscr{U}_\beta:\beta\in B\}$ 满足(U_2)—(U_4).置 $\Phi=\{\mathscr{U}:\exists\beta\in B$ 使 $\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}\}$,这里 $\mathscr{U}$ 是 X 的覆盖.对任意 $\mathscr{U}_\alpha,\mathscr{U}_{\alpha'}\in\Phi$,由 Φ 的定义,存在 $\beta,\beta'\in B$,使 $\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}_\alpha,\mathscr{U}_{\beta'}<\mathscr{U}_{\alpha'}$.因 Φ' 满足(U_2),存在 $\gamma\in B$ 使 $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\beta,\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_{\beta'}$.从而存在 $\mathscr{U}_\gamma\in\Phi$ 使 $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\alpha,\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_{\alpha'}$.所以 Φ 满足(U_2).类似地可证 Φ 满足(U_3),(U_4).显然,Φ 满足(U_1),故 Φ 是 X 上的一致结构.证完.

下面的例指出度量空间是一致空间.

例 4.5.3 设 (X,ρ) 是度量空间,取由开球组成的覆盖

$$\mathscr{U}_n=\{S_{1/3^n}(x):x\in X\},n\in N.$$

显然有 $\mathscr{U}_{n+1}\overset{*}{<}\mathscr{U}_n(n\in N)$.从而易知 $\Phi'=\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$ 满足(U_2),(U_3).因 X 是 T_1 的,对 $x,y\in X$,$x\neq y$,存在 $S_\varepsilon(x)$ 使 $y\notin S_\varepsilon(x)$.取 $n\in N$ 使 $1/3^n<\varepsilon$,则 $y\notin S_{1/3^n}(x)$,由于 $\mathrm{st}(S_{1/3^{n+1}}(x),\mathscr{U}_{n+1})\subset S_{1/3^n}(x)$,所以 $\mathscr{U}_{n+1}$ 中没有一个元同时包含点 x 与 y,所以 Φ' 满足(U_4).由定理 4.5.2,Φ' 是一致结构的基,从而 $\Phi=\{\mathscr{U}$:存在 $\mathscr{U}_n\in\Phi'$ 使 $\mathscr{U}_n<\mathscr{U}\}$ 是 X 上的一致结构.所以 (X,ρ) 是一致空

间.

下面的例指出拓扑群也是一致空间.

例 4.5.4 群 G 是一集,对任意 $x,y\in G$,有 $xy\in G$ 与之对应(xy 称为 x,y 的乘积)且满足如下条件:

(G1) $(xy)z=x(yz),x,y,z\in G$,

(G2) 存在 $e\in G$ 使 $xe=ex=x$ 对每一 $x\in G$ 成立,

(G3) 对每一 $x\in G$,存在 $x^{-1}\in G$ 使 $xx^{-1}=x^{-1}x=e$. 元素 e 称为群 G 的单位元,x^{-1} 称为元素 x 的逆元. 易知单位元、逆元是唯一的.

拓扑群 G 是一个群同时又是 T_1 拓扑空间且满足如下条件:

(TG1) $f(x,y)=xy$ 是 $G\times G\to G$ 的连续映射,

(TG2) $f(x)=x^{-1}$ 是 $G\to G$ 的连续映射.

设 $A,B\subset G$,记 $A^{-1}=\{x^{-1}:x\in A\}$,$AB=\{xy:x\in A,y\in B\}$,当 A 或 B 是单点集 $\{x\}$ 或 $\{y\}$ 时,则后一情况记为 xB 或 Ay.

设 $\mathscr{B}$ 是单位元 e 的邻域基,则对每一 $B\in\mathscr{B}$,$\mathscr{U}_B=\{xB:x\in G\}$ 是 G 的覆盖. 置 $\Phi=\{\mathscr{U}_B:B\in\mathscr{B}\}$. 为了证明拓扑群 G 是一致空间,只要证明 Φ 是 G 上的一致结构的基.

由邻域基的条件(NB3)(见定理 1.2.5),知满足(U2),为了证明 Φ 满足(U3),只要证明

对每一 $B\in\mathscr{B}$,存在 $B_1\in\mathscr{B}$ 使 $\mathrm{st}(xB_1,\mathscr{U}_{B_1})\subset xB$. (1)

置 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2^{-1}x_3$. 由(TG1),(TG2)易知 $f:G\times G\times G\to G$ 是连续映射,而 $f(e,e,e)=e$,由于 f 在点 (e,e,e) 的连续性,对 e 的任何邻域 $B\in\mathscr{B}$,存在 e 的邻域 $B_1\in\mathscr{B}$ 使 $f(B_1\times B_1\times B_1)=B_1B_1^{-1}B_1\subset B$. 设 xB_1 与某 $x_1B_1\in\mathscr{U}_{B_1}$ 相交,下证 $x_1B_1\subset xB$. 从而 $\mathrm{st}(xB_1,\mathscr{U}_{B_1})\subset xB$,(1)式得证. 因 $xB_1\cap x_1B_1\neq\varnothing$,存在 $b_0,b_1\in B_1$ 使 $xb_0=x_1b_1$,$x_1=xb_0b^{-1}$ 对 x_1B_1 的任一元 x_1b (b 是 B_1 的任一元),有

$$x_1b = xb_0b_1^{-1}b \in xB_1B_1^{-1}B_1 \subset xB.$$

所以 $x_1B_1\subset xB$,(1)式得证. Φ 满足(U3).

对 G 的不同元素 $x,y,x^{-1}y\neq e$. 因 G 是 T_1 的,存在 e 的邻域 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x^{-1}y\notin B$. 由(TG1),(TG2),$f(x_1,x_2)=x^{-1}x_2$ 是 $G\times G\to G$ 的连续映射,而 $f(e,e)=e$. 由于在点 (e,e) 的连续性,对 e 的邻域 B,存在 e 的邻域 $B_1\in\mathscr{B}$ 使 $f(B_1\times B_1)=B_1^{-1}B_1\subset B$. 下证 $\mathscr{U}_{B_1}$ 满足(U4)的要求. 设不然 x,y 同属于 $\mathscr{U}_{B_1}$ 的某一元 x_0B_1,即存在 $b_1,b_2\in B_1$ 使 $x=x_0b_1,y=x_0b_2$,则

$$x^{-1}y=(x_0b_1)^{-1}(x_0b_2)=b_1^{-1}x_0^{-1}x_0b_2$$
$$=b_1^{-1}b_2\in B_1^{-1}B_1\subset B.$$

这是矛盾的. 到此证明了 Φ 满足($U4$). 证完.

由定理 4.5.2,Φ 是 G 上的一致结构的基,从而拓扑群 G 是一致空间.

下面叙述一致空间与拓扑空间的关系.

定理 4.5.5 设 X 是一致空间,$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是一致结构(或一致结构的基). 置

$$\mathscr{T}=\{U:U\subset X,\forall x\in U,\exists\alpha\in A\text{ 使 }\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)\subset U\}. \tag{2}$$

则 $\mathscr{T}$ 是 X 上的拓扑.

证明 显然,$\varnothing\in\mathscr{T},X\in\mathscr{T}$,且 $\mathscr{T}$ 关于任意并封闭的(即满足(O1),(O3)). 下证满足(O2). 设 $U_1,U_2\in\mathscr{T},U_1\cap U_2\neq\varnothing$. 对每一 $x\in U_1\cap U_2$,因 $U_1\in\mathscr{T}$,存在 $\alpha_1\in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_1})\subset U_1$;因 $U_2\in\mathscr{T}$,存在 $\alpha_2\in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_2})\subset U_2$. 由($U_2$),存在 $\gamma\in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_{\alpha_1},\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_{\alpha_2}$. 故有 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\gamma)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_1}>\cap\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_2})\subset U_1\cap U_2$. 证完.

定义 4.5.6 由定理 4.5.5 中(2)式定义的拓扑 $\mathscr{T}$ 称为由 X 上的**一致结构导出的拓扑**(topology induced by a uniformity).

在上述意义下,一致空间是拓扑空间,$\mathscr{T}$ 的元素是这拓扑空间的开集.

定理 4.5.7 设 $\mathscr{T}$ 是集 X 上的一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 导出的拓扑,则

(i) $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha):\alpha\in A\}$形成拓扑空间$(X,\mathscr{T})$中点 x 的邻域基,

(ii) 存在仅由开覆盖组成的这一致结构的基.

证明 (i)对每一开集 U 及任意点$x\in U$,由(2)存在 $\alpha\in A$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)\subset U$,所以只要证明 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$包含着一个包含点 x 的开集.置

$$V=\{x':\exists\beta\in A\quad 使\ \mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\beta)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)\}. \qquad (3)$$

显然,$x\in V\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$,下证 V 是开集.由(2)只要证

对 V 的每一点x',存在 $\gamma\in A$ 使 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\gamma)\subset V$. (4)

对 V 的每一点x',由(3),存在 $\beta\in A$ 使 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\beta)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$.由(U3),存在 $\gamma\in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma\overset{*}{<}\mathscr{U}_\beta$,对任何 $x''\in\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\gamma)$,存在 $U_\gamma\in\mathscr{U}_\gamma$,使 $x',x''\in U_\gamma$.因 $\mathscr{U}_\gamma\overset{*}{<}\mathscr{U}_\beta$,及 $x''\in U_\gamma$,$\mathrm{st}(x'',\mathscr{U}_\gamma)\subset\mathrm{st}(U_\gamma,\mathscr{U}_\gamma)\subset$某 $U_\beta\in\mathscr{U}_\beta$.因 $x'\in\mathscr{U}_\gamma\subset U_\beta$,故有 $\mathrm{st}(x'',\mathscr{U}_\gamma)\subset\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\beta)$.从而 $\mathrm{st}(x'',\mathscr{U}_\gamma)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha)$.由(3),$x''\in V$,由 x''的任意性,$\mathrm{st}(x',\mathscr{U}_\gamma)\subset V$,(4)式得证.

(ii) 对一致结构中的每一 $\mathscr{U}_\alpha(\alpha\in A)$,置

$$\mathscr{U}^\circ_\alpha=\{U^\circ:U\in\mathscr{U}_\alpha\}.$$

要证$\{\mathscr{U}^\circ_\alpha:\alpha\in A\}$是$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$的基.为此只要证明每一个 $\mathscr{U}^0_\alpha\in\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$.

由$(U3)$,取 $\beta\in A$ 使 $\mathscr{U}_\beta\overset{*}{<}\mathscr{U}_\alpha$,下证 $\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}^\circ_\alpha$,从而由$(U1)$得证.因 $\mathscr{U}_\beta\overset{*}{<}\mathscr{U}_\alpha$,对每一 $V\in\mathscr{U}_\beta$,存在 $U\in\mathscr{U}_\alpha$ 使 $\mathrm{st}(V,\mathscr{U}_\beta)\subset U$,从而对每一点 $x\in V$,$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\beta)\subset U$.由(i),$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\beta)$是点 x 的邻域(包含着包含点 x 的一个开集),所以 x 是U 的内点,即 $x\in U^\circ$.从而 $V\subset U^\circ$,故有 $\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}^\circ_\alpha$.证完.

定理4.5.8 设$\mathscr{T}$是集 X 上的一致结构$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$导出的拓扑,则拓扑空间$(X,\mathscr{T})$是完全正则空间.

证明 由定理4.5.7的(i),$\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_\alpha):\alpha\in A\}$是点 $x\in X$ 的邻域基,由$(U4)$知对 $x,y\in X,x\neq y$,存在 $\alpha\in A$ 使 $y\notin\mathrm{st}(x,$

$\mathscr{U}_\alpha$). 所以$(X,\mathscr{T})$是 T_1 空间. 设 $x\in X$, F 是 X 的闭子集, 且 $x\notin F$. 由定理 4.5.7 的(ii), 可以在一致结构 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 中选取开覆盖序列: $\mathscr{U}_0,\mathscr{U}_1,\mathscr{U}_2,\cdots$使

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_0)\subset X-F,\mathscr{U}_n\overset{*}{<}\mathscr{U}_{n-1}(n\in N).$$

定义开集 $U(k/2^n),k=1,\cdots,2^n-1;n\in N$ 如下:

$$U(1/2)=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_1),$$

$$U(1/2^2)=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_2),U(3/2^2)=\mathrm{st}(U(1/2),\mathscr{U}_2),$$

$$\cdots\cdots,\qquad \cdots\cdots.$$

一般说, 当 $U(k/2^n)=1,\cdots,2^n-1$ 已定义, 则可定义 $U(k'/2^{n+1})$如下:

$$U(k'/2^{n+1})=\begin{cases}U(k/2^n), & k'=2k,\\ \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1}), & k'=1,\\ \mathrm{st}(U(k/2^n),\mathscr{U}_{n+1}, & k'=2k+1,k>0.\end{cases}$$

可以证明*):

$$x\in U(k/2^n)\subset\overline{U(k/2^n)}\subset U\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$$

$$\subset\overline{U\left(\frac{k+1}{2^n}\right)}\subset X-F.$$

此外, 置 $U(1)=X$, 并令 $f(x)=\inf\{r:x\in U(\gamma)\}$. 利用类似于 Urysohn 引理(定理 2.4.1)中的证法, 可证明 f 是 X 到$[0,1]$的连续函数且 $f(x)=0,f(F)=\{1\}$, 所以 X 是完全正则空间. 证完.

定理 4.5.9 设$(X,\mathscr{T})$是完全正则空间, 则 X 上存在一致结构的基导出的拓扑 $\mathscr{T}$.

证明 对每一点 $x\in X$ 及每一开邻域 U 包含点 x 可以构造连续函数$f:X\to[0,1]$使 $f(x)=0,f(X-U)=\{1\}$, 对每一 $n\in$

---

*)易证 $\mathscr{U}_{n+1}\overset{*}{<}\mathscr{U}_n\Rightarrow\mathrm{st}(\mathrm{st}(A,\mathscr{U}_{n+1}),\mathscr{U}_{n+1})\subset\mathrm{st}(A,\mathscr{U}_n)$, 而当 $\mathscr{U}_n(n\in N)$是开覆盖时有 $\mathrm{st}\overline{(A,\mathscr{U}_{n+1})}\subset\mathrm{st}(\mathrm{st}(A;\mathscr{U}_{n+1}),\mathscr{U}_{n+1})$.

N,置

$$\mathscr{U}(n,x,U)=\{f^{-1}(S'_n(r):r\in[0,1])\},$$

这里

$$S'_n(\gamma)=\{y:y\in[0,1]\cap(r-1/3^n,r+1/3^n)\}.$$

由例 4.5.3 及 f 的连续性,易知 $\mathscr{U}(n,x,U)$ 是 X 的开覆盖且满足

$$\mathscr{U}(n+1,x,U)\overset{*}{<}\mathscr{U}(n,x,U),n\in N. \tag{5}$$

此外,可证

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}(1,x,U))\subset U. \tag{6}$$

因 $\mathscr{U}(1,x,U)=\{f^{-1}(s'_1(r)):r\in[0,1]\}$,而 $S'_1(r)=[0,1]\cap\left(r-\frac{1}{3},r+\frac{1}{3}\right)$. 由于 $r\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow 0\in\left(r-\frac{1}{3},r+\frac{1}{3}\right)\Leftrightarrow x\in f^{-1}(S'_1(\gamma))$,所以

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}(1,x,U))=\bigcup\left\{f^{-1}(S'_1)(r):r\in\left[0,\frac{1}{3}\right)\right\}.$$

上式右端按 f 的象包含于$[0,1)$,从而上式右端包含于 U.(6)式得证.置

$$\Phi=\{\mathscr{U}(n,x,U):x\in X,U\text{ 是}x\text{ 的开邻域},n\in N\},$$

$$\Psi=\{\mathscr{U}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{U}_k:\mathscr{U}_i\in\Phi,i=1,2,\cdots,k;k\in N\}.$$

由(5)易知 Ψ 满足(U2),(U3)*). 因 X 是 T_1 的,由(6),(5)易知 Ψ 满足(U4),所以 Ψ 是X 上的一致结构的基. 由(2)式(见定理 4.5.5)及(6)知 Ψ 导出的拓扑就是 $\mathscr{T}$(设 Ψ 导出的拓扑为 $\mathscr{T}'$,对每一 $U\in\mathscr{T}$,每一 $x\in U$,由(6)及(2)知 $U\in\mathscr{T}'$,反之,对每一 $U'\in\mathscr{T}'$,每一 $x'\in U'$,由(2)及每一 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U})\in\mathscr{T}$(因 $\mathscr{U}\in\Psi$ 是开于 $\mathscr{T}$ 的覆盖),故 $U'\in\mathscr{T}$). 证完.

类似于拓扑空间的可度量化,引入如下概念.

定义 4.5.10 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$称为**可一致化**(uniformizable),

---

*)一般说,如 $\mathscr{V}_i\overset{*}{<}\mathscr{U}_i(i=1,\cdots,k)$则 $\mathscr{V}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{V}_k\overset{*}{<}\mathscr{U}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{U}_k$.

如果存在X上的一致结构,这一致结构导出拓扑 $\mathscr{T}$.

由定理4.5.8,4.5.9得下述定理,比拓扑空间度量化定理简单.

定理 4.5.11 拓扑空间$(X,\mathscr{T})$可一致化当且仅当这空间是完全正则的.

对任意集 X,称积集 $X\times X$ 的子集$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$为 $X\times X$ 的**对角线**;称 $X\times X$ 的子集D 之包含Δ 且满足条件"对 $x,y\in X,(x,y)\in D\Rightarrow(y,x)\in D$"者为对角线 Δ 的**对称域**(Symmetric entourage).设 D 是Δ 的对称域,记 $D\circ D=\{(x,y):$存在 $z\in X$,使$(x,z),(z,y)\in D\}$.

定理 4.5.12 设$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$是集 X 的一致结构(或某一致结构的基),对每一覆盖 $\mathscr{U}_\alpha(\alpha\in A)$,置

$$D_\alpha=\bigcup\{U\times U:U\in\mathscr{U}_\alpha\},\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in A\}.$$

则每一 D_α 是$\triangle$的对称域且 $\mathscr{D}$ 满足如下条件:

(i)如 $D_\alpha,D_\beta\in\mathscr{D}$,则存在 $D_\gamma\in\mathscr{D}$ 使 $D_\gamma\subset D_\alpha\cap D_\beta$,

(ii)对每一 $D_\alpha\in\mathscr{D}$,存在 $D_\beta\in\mathscr{D}$,使 $D_\beta\circ D_\beta\subset D_\alpha$,

(iii) $\bigcap_{\alpha\in A}D_\alpha=\Delta$.

证明 每一 D_α 是Δ 的对称域是明显的.下证 $\mathscr{D}$ 满足上述条件,为此先给出下列二式:

$$\mathscr{U}_\beta<\mathscr{U}_\alpha\Rightarrow D_\beta\subset D_\alpha, \tag{7}$$

$$\mathscr{U}_\beta\overset{*}{<}\mathscr{U}_\alpha\Rightarrow D_\beta\circ D_\beta\subset D_\alpha. \tag{8}$$

(7)式显然成立.下证(8)式,设$(x,y)\in D_\beta\circ D_\beta$,则存在 $z\in X$,使$(x,z),(z,y)\in D_\beta$,从而存在 $U_\beta\in\mathscr{U}_\beta$ 使$(x,z)\in U_\beta\times U_\beta$,得 $x,z\in U_\beta$.同理,存在 $U_{\beta'}\in\mathscr{U}_\beta$ 使 $z,y\in U_{\beta'},U_\beta\cap U_{\beta'}=\varnothing$.因 $\mathscr{U}_\beta\overset{*}{<}\mathscr{U}_\alpha,U_\beta\cup U_{\beta'}\subset$某 $U_\alpha\in\mathscr{U}_\alpha$.所以 $x,y\in U_\alpha,(x,y)\in U_\alpha\times U_\alpha\subset D_\alpha$.(8)式得证.

设 $D_\alpha,D_\beta\in\mathscr{D}$,由(U2),对 $\alpha,\beta\in A$,存在 $\gamma\in A$ 使 $\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\alpha,\mathscr{U}_\gamma<\mathscr{U}_\beta$.由(7),$D_\gamma\subset D_\alpha,D_\gamma\subset D_\beta$,从而 $D_\alpha\cap D_\beta\supset D_\gamma$.$\mathscr{D}$ 满足(i).由($U3$)及(8)式知 $\mathscr{D}$ 满足(ii).下证 $\mathscr{D}$ 满足(iii).如不然,对 $x\neq y$

而有$(x,y)\in\bigcap_{\alpha\in A}D_\alpha$，则$(x,y)$属于每一个$D_\alpha$，也就是每一个$\mathscr{U}_\alpha(\alpha\in A)$中有元$U_\alpha$使$x,y\in U_\alpha$，这与(U4)矛盾.证完.

定理 4.5.13 设$D_0,D_1,\cdots,D_i,\cdots$是积集$X\times X$的对角线$\triangle$的对称域且满足

$$D_0=X\times X,\quad D_{i+1}\circ D_{i+1}\circ D_{i+1}\subset D_i,i\in N,\tag{9}$$

则集X上存在拟度量ρ使

$$D_i\subset\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant 1/2^i\}\subset D_{i-1},i\in N.$$

证明 定义映射$f:X\times X\to[0,1]$使

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & (x,y)\in\bigcap_{i=0}^{\infty}D_i,\\ 1/2^i, & (x,y)\in D_i-D_{i+1}.\end{cases}$$

则有

$$f(x,x)=0,\quad f(x,y)=f(y,x).\tag{10}$$

对任意$x,y\in X$，定义$\rho(x,y)$为所有数$\sum_{i=1}^{k}f(x_{i-1},x_i)$的最大下界，这里$x_0,x_1,\cdots,x_k$是$X$的任意有限个点且$x_0=x,x_k=y$.由(10)，$\rho(x,x)=0$及$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，且由$\rho$的定义知满足三角形不等式.所以$\rho$是$X$上的拟度量(注意，如果$\{D_i\}_{i=0}^{\infty}$更满足$\bigcap_{i=0}^{\infty}D_i=\Delta$，则由$f(x,y)$的定义可知，从而得到的$\rho$是$X$上的度量).

为了证明余下的部分，可先证明下式：

$$\frac{1}{2}f(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant f(x,y).\tag{11}$$

(11)式的右半部分(第二个"$\leqslant$")可由ρ定义中的"下界"得到.为了证明(11)式的左半部分(第一个"$\leqslant$")可先证明下式

$$\frac{1}{2}f(x,y)\leqslant\sum_{i=1}^{k}f(x_{i-1},x_i).\tag{12}$$

对X的任意有限点组$x_0,x_1,\cdots,x_k$(这里$x_0=x,x_k=y$)成立.这时，(11)式的左半部分可由(12)及ρ的定义("最大"下界)而得到.下证(12)式成立.用归纳法，对$k=1$，(12)式显然成立.设$k<m$时，(12)式成立，现证$k=m$情况.考察数组$x_0,x_1,\cdots,x_m$，

这里 $x_0 = x, x_m = y$,并设 $a = \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)$,当 $a \geqslant 1/2$,由于 $f(x, y) \leqslant 1$,(12) 式对 $k = m$ 成立.故下设 $a < 1/2$.

(i)$a > 0$,显然,或者 $f(x_0, x) \leqslant \frac{1}{2}a$,或者 $f(x_{m-1}, x_m) \leqslant \frac{1}{2}a$.由于关于 x, y 的对称性,不妨假设 $f(x_0, x_1) \leqslant \frac{a}{2}$,设 j 是最大自然数使

$$\sum_{i=1}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2}.$$

所以

$$\sum_{i=1}^{j+1} f(x_{i-1}, x_i) > \frac{a}{2}, \text{从而} \sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2}.$$

由归纳法的假设,(12)式对 $k<m$ 成立,故有

$$\frac{1}{2} f(x_0, x_j) \leqslant \sum_{i=0}^{j} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2}, \quad f(x_0, x_j) \leqslant a,$$

$$\frac{1}{2} f(x_{j+1}, x_m) \leqslant \sum_{i=j+2}^{m} f(x_{i-1}, x_i) \leqslant \frac{a}{2}, \quad f(x_{j+1}, x_m) \leqslant a.$$

此外,由于 $a = \sum_{i=1}^{m} f(x_{i-1}, x_i)$,所以 $f(x_j, x_{j+1}) \leqslant a$.设 l 是使 $1/2^l \leqslant a$ 的最小自然数,$a < 1/2, l \geqslant 2$.由 f 的定义,$f(x_0, x_j)$ 等的值应是 $1/2^i$ 型的数及 l 的最小值,上述三式可分别改写为 $f(x_0, x_j) \leqslant 1/2^l, f(x_j, x_{j+1}) \leqslant 1/2^l, f(x_{j+1}, x_m) \leqslant 1/2^l$.从而有 $(x_0, x_j) \in D_l, (x_j, x_{j+1}) \in D_l, (x_{j+1}, x_m) \in D_l$(一般说,易验证 $f(x, y) \leqslant 1/2^i \Leftrightarrow (x, y) \in D_i$).从而由(9),$(x_0, x_m) = (x, y) \in D_{l-1}$.从而 $f(x, y) \leqslant 1/2^{l-1} \leqslant 2a$,即 $\frac{1}{2} f(x, y) \leqslant a$.所以(12)式在 $a > 0$ 时对 $k = m$ 成立.

(ii) $a = 0$.这时对 $i = 1, 2, \cdots, m, f(x_{i-1}, x_i) = 0$.从而由 f 的定义,$(x_{i-1}, x_i) \in D_j (j = 0, 1, 2, \cdots)$.故有 $(x, y) \in D_j \circ D_j \circ \cdots \circ D_j$($m$ 个 D_j)对 $j = 0, 1, 2, \cdots$ 成立.由(9),$(x, y) \in \bigcap_{i=0}^{\infty} D_i$.所以 $f(x, y) = 0$.(12)式在 $a = 0$ 时对 $k = m$ 成立.到此(12)式得证.

从而(11)得证.

现在证明本定理的余下部分. 置 $E=\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant 1/2^i\}$, $(x,y)\in E$, $\rho(x,y)\leqslant 1/2^i$. 由(11)左半, $\frac{1}{2}f(x,y)\leqslant 1/2^i$, 即 $f(x,y)\leqslant\frac{1}{2^{i-1}}$, $(x,y)\in D_{i-1}$. 所以 $E\subset D_{i-1}$. 另一方面, $(x,y)\in D_i$, $f(x,y)\leqslant\frac{1}{2^i}$. 由(11)右半, $\rho(x,y)\leqslant f(x,y)$, $\rho(x,y)\leqslant 1/2^i$, $(x,y)\in E$, 所以 $D_i\subset E$. 证完.

定义 4.5.14 一致空间 X 称为可度量化, 如果 X 上存在度量 ρ 使由开球组成的覆盖 $\mathscr{U}_n=\{S_{1/n}(x):x\in X\}$ 的可数族 $\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$ 形成这一致结构的基.

定理 4.5.15 一致空间可度量化当且仅当具有由可数个覆盖形成的一致结构的基.

证明 必要性是显然的(见例 4.5.3). 下证充分性.

设 $\{\mathscr{U}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 上的一致结构, $\{\mathscr{U}_i:i\in N\}$ 是这一致结构的可数基. 置 $D_\alpha=\bigcup\{U\times U:U\in\mathscr{U}_\alpha\}$, 由于 $\mathscr{U}_\beta\overset{*}{<}\mathscr{U}_\alpha\Rightarrow D_\beta\circ D_\beta\subset D_\alpha$ (定理 4.5.12 的(8)式), 可以选取 $\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 中的元 $\mathscr{U}_{\alpha_i}(i\in N)$ 使 $\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}\overset{*}{<}\mathscr{U}_{\alpha_i}$ 及 $D_i=\bigcup\{U\times U:U\in\mathscr{U}_{\alpha_i}\}$ 满足 $D_{i+1}\circ D_{i+1}\circ D_{i+1}\subset D_i$ 且 $\mathscr{U}_{\alpha_i}<\mathscr{U}_i$. 由定理 4.5.13, 存在 X 上的度量 ρ (因 $\{\mathscr{U}_i:i\in N\}$ 是一致结构的基, 由定理 4.5.12 的(iii)及 $\mathscr{U}_{\alpha_i}<\mathscr{U}_i$ 知 $\bigcap_{i\in N}D_i=\triangle$), 且满足

$$\{(x,y):\rho(x,y)\leqslant\frac{1}{2^{i+1}}\}\subset D_i,\ i\in N. \tag{13}$$

下证

$$\{S_{1/2^{i+2}}(x):x\in X\}<\mathscr{U}_i,\ i\in N. \tag{14}$$

对每一 $y\in S_{1/2^{i+2}}(x)$, $\rho(x,y)<1/2^{i+2}$, 由(13), $(x,y)\in D_{i+1}$. 从而 $x,y\in$ 某 $U\in\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}$. 所以 $S_{1/2^{i+2}}(x)\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}})$. 由于 $\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}\overset{*}{<}\mathscr{U}_{\alpha_i}$ (由 D_i 的定义及 D_i 满足(9)的假设), $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{\alpha_{i+1}})\subset$ 某

$U' \in \mathscr{U}_{\alpha_i}$. 所以$\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_{i+1}}): x \in X\} < \mathscr{U}_{\alpha_i} < \mathscr{U}_i$. 从而(14)得证. 从而易知,$\{\{S_{1/n}(x): x \in X\}\}_{n \in N}$形成$\{\mathscr{U}_\alpha: \alpha \in A\}$的基. 由定义 4.5.14 得证. 证完.

由定理 4.5.15,容易得到下述经典的 Alexandroff-Urysohn 度量化定理.

定理 4.5.16(Alexandroff-Urysohn[1923]) 拓扑空间 X 可度量化,当且仅当 X 是 T_1 的且存在开覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n \in N}$满足:

(i) $\mathscr{U}_{n+1} \overset{*}{<} \mathscr{U}_n (n \in N)$,

(ii) $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n \in N}$形成点$x \in X$ 的邻域基.

证明 必要性是明显的. 下证充分性. 设$(X, \mathscr{T})$是拓扑空间,由(i),开覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n \in N}$满足(U2),(U3). 由于 X 是 T_1 的及(ii),$\{\mathscr{U}_n\}_{n \in N}$满足(U4),所以$\{\mathscr{U}_n\}_{n \in N}$组成$X$ 上的一致结构的基(定理 4.5.2). 由定理 4.5.5 的(2)式,可知这一致结构导出 X 上的拓扑 $\mathscr{T}$,$(X, \mathscr{T})$是可一致化空间(定义 4.5.10). 由定理 4.5.15 得证. 证完.

一致空间是拓扑空间,可以考察子空间、积空间与相应的一致结构关系.

定理 4.5.17 可一致化空间的子空间是可一致化空间.

证明 设一致空间$(X, \mathscr{T})$的一致结构$\{\mathscr{U}_\alpha: \alpha \in A\}$导出拓扑 $\mathscr{T}$, $X' \subset X$. 置 $\mathscr{U}'_\alpha = \{U \cap X': U \in \mathscr{U}_\alpha\}$,显然$\{\mathscr{U}'_\alpha: \alpha \in A\}$是 X'上的一致结构的基. 且这基导出子空间 X'上的相对拓扑. 证完.

定理 4.5.18 可一致化空间的任意积空间是可一致化空间.

证明 对每一 $\gamma \in \Gamma$,设$(X_\gamma, \mathscr{T}_\gamma)$是可一致化空间,具有一致结构$\{\mathscr{U}_\alpha^\gamma: \alpha \in A_\gamma\}$导出拓扑 $\mathscr{T}_\gamma$. 置

$$\Phi = \{\mathscr{U}_{\alpha_1}^{\gamma_1} \times \cdots \times \mathscr{U}_{\alpha_k}^{\gamma_k} \times \prod\{X_\gamma: \gamma \neq \gamma_i, i = 1, \cdots, k\}:$$
$$\alpha_i \in A_\gamma, \gamma_i \in \Gamma, i = 1, \cdots, k; k \in N\},$$

这里

$$\{\mathscr{U}_{\alpha_1}^{\gamma_1} \times \cdots \times \mathscr{U}_{\alpha_k}^{\gamma_k}\} = \{U_{\alpha_1}^{\gamma_1} \times \cdots \times U_{\alpha_k}^{\gamma_k}: U_{\alpha_i}^{\gamma_i} \in \mathscr{U}_{\alpha_i}^{\gamma_i}, i = 1, \cdots, k\}.$$

容易验证 Φ 是积空间$\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 上的一致结构的基且导出这积拓

扑.证完.

定义 4.5.19 拓扑空间的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**正规覆盖**(normal covering),如果存在开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 使 $\mathscr{U}_{n+1}\overset{*}{<}\mathscr{U}_n(n\in N)$ 及 $\mathscr{U}_1<\mathscr{U}$.

设 $(X,\mathscr{T})$ 是拓扑空间,$\Phi=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 X 上的一致结构导出拓扑 $\mathscr{T}$. 由(U3)及定理 4.5.7 的(ii),每一 $\mathscr{U}_\alpha(\alpha\in A)$ 是正规覆盖.设 Φ' 是空间 $(X,\mathscr{T})$ 的所有正规覆盖的全体.由正规覆盖的定义,Φ 满足(U1),(U3).因 $\Phi'\supset\Phi$(Φ 满足($U4$)),Φ' 满足(U4).由定理 4.5.9 证明中的方法),Φ' 中元(正规覆盖)的有限交仍是正规覆盖,即 Φ' 关于有限交是封闭的,故 Φ' 满足(U2),所以 Φ' 也是 X 上的一致结构.由于 $(X,\mathscr{T})$ 是可一致化空间,从而是完全正则的,由定理 4.5.9 的证明知 Φ' 导出拓扑 $\mathscr{T}$*). 由于 $\Phi\subset\Phi'$,可以称 Φ' 是导出拓扑 $\mathscr{T}$ 的最精的一致拓扑结构.

由上述分析可知一致化的拓扑空间的一致结构不是唯一的.

定理 4.5.20 设可一致化的拓扑空间是紧的.则一致结构是唯一的.

证明 只要证明:"设 $\Phi=\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 是 $(X,\mathscr{T})$ 上导出拓扑 $\mathscr{T}$ 的任一一致结构,则 X 上的所有开覆盖全体 Ψ 形成这一致结构的基."为此,只要证明"对任一开覆盖 $\mathscr{U}$,存在 $\alpha\in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha<\mathscr{U}$".这样,由($U1$),$\Psi\subset\Phi$,然后,由定理 4.5.7 的(ii),$\Psi$ 形成 Φ 的基.用反证法.设不然,对任何 $\alpha\in A$,存在 $\mathscr{U}_\alpha$ 中的元素 U_α 不能包含在 $\mathscr{U}$ 的任一元素中.任取点 $x_\alpha\in U_\alpha$,则 $\mathrm{st}(x_\alpha,\mathscr{U}_\alpha)$ 不能包含在 $\mathscr{U}$ 的任一元素中.对 $\alpha,\beta\in A$,规定 $\alpha>\beta$ 当且仅当 $\mathscr{U}_\alpha<\mathscr{U}_\beta$,则 A 成为定向集.置 $\varphi(\alpha)=x_\alpha(\alpha\in A)$,$\varphi(A;>)$ 形成网,$\varphi(\alpha)=x_\alpha(\alpha\in A)$ 是网的元素.因 $(X,\mathscr{T})$ 紧,这网有聚点 x.因 $\mathscr{U}$ 是覆盖,$x\in$ 某

---

*)按定理 4.5.9 的证明中的 Ψ 的元应是正规覆盖,故 $\Psi\subset\Phi'$.设 Φ 导出的拓扑为 $\mathscr{T}'$.证明全同这定理证明的最后部分,唯这里的 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U})$ 未必属于 $\mathscr{T}$,但因 $\mathscr{U}$ 是正规覆盖,存在开覆盖 $\mathscr{U}_1<\mathscr{U}$,故 $\mathrm{st}(x',\mathscr{U})$ 是 x 的关于 $\mathscr{T}$ 的邻域,相应的结论仍成立.

$U \in \mathscr{U}$. 由于 $\Phi = \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$ 导出拓扑 $\mathscr{T}$, 存在 $x_0 \in A$ 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_0}) \subset U \in \mathscr{U}$(定理 4.5.7 的(i)). 取 $\alpha \in A$ 使 $\mathscr{U}_\alpha \overset{*}{<} \mathscr{U}_{\alpha_0}$, 易知 $\mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_\alpha), \mathscr{U}_\alpha) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_0})$. 因 x 是网 $\varphi(A;>)$ 的聚点, $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_\alpha)$ 是 x 的邻域, 由定义 1.4.10, 存在 $\beta > \alpha$ 使 $x_\beta = \varphi(\beta) \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_\alpha)$. 因 $\mathscr{U}_\beta < \mathscr{U}_\alpha (\beta > \alpha)$. $\mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_\beta) \subset \mathrm{st}(x_\beta, \mathscr{U}_\alpha) \subset \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_\alpha), \mathscr{U}_\alpha) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{\alpha_0}) \subset U$. 这与 x_β 的定义矛盾. 证完.

定义 4.5.21 一致空间 X 到一致空间 Y 内的映射 f 称为**一致连续的**(uniformly continuous), 如果对 Y 上的一致结构中的每一个元素(覆盖) $\mathscr{V}$, $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是 X 上的一致结构中的元素(覆盖).

易知一致连续映射的复合映射是一致连续的, 如果一致空间 X 到一致空间 Y 的一致连续映射 f 是一一对应的, 且逆映射 f^{-1} 也是一致连续的, 则称 f 为**一致同构映象**(uniform isomorphism). 这时 X, Y 称为**一致同构的**.

定理 4.5.22 一致空间 X 到一致空间 Y 内的一致连续映射是连续映射.

证明 设 X, Y 上的一致结构分别是 $\{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$, $\{\mathscr{V}_\beta : \beta \in B\}$. 设 V 是 Y 中的开集, 要证 $U = f^{-1}(V)$ 是 X 中的开集. 对任一 $x \in U$, $f(x) \in V$, 由定理 4.5.5 的(2)式, 存在 $\beta \in B$, 使 $\mathrm{st}(f(x), \mathscr{V}_\beta) \subset V$. 由一致连续性, $f^{-1}(\mathscr{V}_\beta) \in \{\mathscr{U}_\alpha : \alpha \in A\}$. 由于一般地有 $\mathrm{st}(y, \mathscr{V}) \subset V \Leftrightarrow \mathrm{st}(f^{-1}(y), f^{-1}(\mathscr{V})) \subset f^{-1}(V)$, $\mathrm{st}(x, f^{-1}(\mathscr{V}_\beta)) \subset \mathrm{st}(f^{-1}(f(x)), f^{-1}(\mathscr{V}_\beta)) \subset f^{-1}(V) = U$. 由上述(2)式, 知 U 是 X 中开集. 证完.

定理 4.5.23 设 f 是一致空间 X 到一致空间 Y 内的连续映射, 且 X 的一致结构是由所有正规覆盖全体组成, 则 f 是一致连续的.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是 Y 上的一致结构中的元, $\mathscr{V}$ 应是一正规覆盖, 即存在 Y 的开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n \in N}$ 使 $\mathscr{V}_{n+1} \overset{*}{<} \mathscr{V}_n (n \in N)$ 及 $\mathscr{V}_1 < \mathscr{V}$, 从而易知 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是 X 的覆盖, $f^{-1}(\mathscr{V}_n)(n \in N)$ 是 X 的开覆盖且 f^{-1}

$(\mathscr{V}_{n+1})\overset{*}{<}f^{-1}(\mathscr{V}_n)(n\in N)$及$f^{-1}(\mathscr{V}_1)<f^{-1}(\mathscr{V})$. 所以$f^{-1}(\mathscr{V})$是正规覆盖. 由假设, $f^{-1}(\mathscr{V})$是X的一致结构中的元素. 所以f是一致连续的. 证完.

推论 4.5.24 紧的一致空间X到一致空间Y内的连续映射是一致连续的.

证明 上述定理 4.5.23 的证明的实质在于X上的一致结构是最精的, 而定理 4.5.20 说明紧空间X上的一致结构是唯一的, 从而是最精的. 证完.

前面所述基本上是 Tukey 的理论. 在定理 4.5.12 中微露 Weil 理论的端倪, 下面再引入与之有关的定理.

定理 4.5.25 设$\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in A\}$是$X\times X$的对角线$\triangle$的对称域$D$所成的族, 且满足定理 4.5.12 中的条件(i)—(iii). 置$\mathscr{U}(D_\alpha)=\{D_\alpha[x]:x\in X\}$, 这里$D_\alpha[x]=\{y:(x,y)\in D_\alpha\}$. 则$\Phi=\{\mathscr{U}(D_\alpha):\alpha\in A\}$满足条件$(U2)$—$(U4)$, 从而$\Phi$形成$X$上的一致结构的基.

证明 对$\alpha,\beta\in A$, $D_\alpha, D_\beta\in\mathscr{D}$, 由(i)存在$\gamma\in A$使$D_\gamma\subset D_\alpha\cap D_\beta$, 对每一$x\in X$, 由于$D_\gamma[x]\subset(D_\alpha\cap D_\beta)[x]=D_\alpha[x]\cap D_\beta[x]$, $\mathscr{U}(D_\gamma)<\mathscr{U}(D_\alpha)$及$\mathscr{U}(D_\gamma)<\mathscr{U}(D_\beta)$. 所以$\Phi$满足$(U2)$. 对每一$\alpha\in A$, 由(ii)存在$\beta\in A$使$D_\beta\circ D_\beta\circ D_\beta\circ D_\beta\subset D_\alpha$. 任取$\mathscr{U}(D_\beta)=\{D_\beta[x]:x\in X\}$的元$D_\beta[x]$. 设$D_\beta[x]\cap D_\beta[y]\neq\varnothing$, 设$z'\in D_\beta[x]\cap D_\beta[y]$; 则$(x,z')\in D_\beta$, $(z',y)\in D_\beta$. 故有$(x,y)\in D_\beta\circ D_\beta$, 对任意的$z\in D_\beta[y]$, 即$(y,z)\in D_\beta$, 故有$(x,z)\in(D_\beta\circ D_\beta)\circ D_\beta\subset D_\beta\circ D_\beta\circ D_\beta\circ D_\beta\subset D_\alpha$, 是即$z\in D_\alpha[x]$. 所以$\mathscr{U}(D_\beta)\overset{*}{<}\mathscr{U}(D_\alpha)$, Φ满足$(U3)$. 设$x,y\in X$, $x\neq y$, 由(iii), $(x,y)\notin\bigcap_{\alpha\in A}D_\alpha$. 存在$\alpha\in A$使$(x,y)\notin D_\alpha$. 由(ii)存在$\beta\in A$使$D_\beta\circ D_\beta\circ\subset D_\alpha$. 所以$(x,y)\notin D_\beta\circ D_\beta$. 从而对每一$z\in X$, $x\in D_\beta[z]$, $y\in D_\beta[z]$不能同时成立. 所以$\mathscr{U}(D_\beta)$中没有一个元素同时包含x与y, 所以Φ满足$(U4)$, 从而Φ形成X上的一致结构的基. 证完.

下面是 Weil 关于一致结构的定义:

“设 $\mathscr{D}$ 是 $X\times X$ 的对角线Δ 的对称域D 所成族,如果满足下列条件:

(i)对 Δ 的对称域D,如果存在 $D_\alpha\in\mathscr{D}$ 使 $D_\alpha\subset D$,则 $D\in\mathscr{D}$,

(ii) 如果 $D_\alpha,D_\beta\in\mathscr{D}$,则 $D_\alpha\cap_\beta\in\mathscr{D}$,

(iii) 对每一 $D_\alpha\in\mathscr{D}$,存在 $D_\beta\in\mathscr{D}$,使 $D_\beta\circ D_\beta\subset D_\alpha$,

(iv) $\bigcap\mathscr{D}=\Delta$.

则称 $\mathscr{D}$ 是集 X 上的一个一致结构.集 X 连同它的一致结构 $\mathscr{D}$ 称为一致空间,记作$(X,\mathscr{D})$.一致结构 $\mathscr{D}$ 的子族 $\mathscr{D}'$ 称为 $\mathscr{D}$ 的基(一致结构的基),如果对每一 $D\in\mathscr{D}$,存在 $D'\in\mathscr{D}'$使$D'\subset D$”.

从而易知 $X\times X$ 的对角线△的对称域 D 所成族 $\mathscr{D}'$是X 上的某一个一致结构的基当且仅当 $\mathscr{D}'$ 满足上述 Weil 定义中的条件(iii),(iv)及下述条件.

(ii′)如果 $D_\alpha,D_\beta\in\mathscr{D}'$,则存在 $D_\gamma\in\mathscr{D}'$使$D_\gamma\subset D_\alpha\cap D_\beta$.

注意这里的条件:(ii′),(iii),(iv)就是定理 4.5.12 中的条件:(i),(ii),(iii).所以,由定理 4.5.12 可知:

如果$\{\mathscr{U}_\alpha:\alpha\in A\}$是 Tukey 意义下的一致结构(定义 4.5.1).置 $D_\alpha=\bigcup\{U\times U:U\in\mathscr{U}_\alpha\}$,则 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in A\}$是 Weil 意义下的一致结构的基.

此外,定理 4.5.24 指出:

如果 $\mathscr{D}=\{D_\alpha:\alpha\in A\}$是 Weil 意义下的一致结构,置 $D_\alpha[x]=\{y:(x,y)\in D_\alpha\}$,$\mathscr{U}(D_\alpha)=\{D_\alpha[x]:x\in X\}$.则$\{\mathscr{U}(D_\alpha):\alpha\in A\}$是 Tukey 意义下的一致结构的基.

以上说明关于一致空间的两种理论间的关系.

按 Weil 的定义,一致连续映射可以定义为(可与定义 4.5.21 比较):

“一致空间 X 到一致空间 Y 内的映射f 称为一致连续的,如果对 Y 上的一致结构中的每一个元素(对角线 Δ 的对称域)D,$f_2^{-1}(D)$是 X 上的一致结构中的元素(对角线 Δ 的对称域).”这里 $f_2(x,y)=(f(x),f(y))$.

在度量空间(X,ρ),Weil 意义下的一致结构的基可由

$$\left\{\left\{(x,y):\rho(x,y)<\frac{1}{n}\right\}\right\}_{n\in N}$$

表示. 从而有

"度量空间(X,ρ)到度量空间(X',ρ')内的映射 f 称为一致连续的，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\rho(x,y)<\delta$ 时，有 $\rho'(f(x),f(y))<\varepsilon$."

习 题 四

4.1 考察定义$[a,b]$上的实值连续函数所成集 C. 对任意两个函数 $f, g\in C$，定义 $\rho(f,g)=\max\limits_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|$，试证 ρ 是C 上的度量(这一度量空间称为连续函数空间，记作 $C[a,b]$，或简记为 C).

4.2 考察在$[a,b]$上勒贝格平方可和的函数所成集 L_2，对任意两个函数 $f,g\in L_2$，定义 $\rho(f,g)=\sqrt{\int_a^b(f(x)-g(x))^2dx}$. 试证 ρ 是L_2 上的度量(这一度量空间称为勒贝格可和函数空间，记作 $L_2[a,b]$，或简记为 L_2).

4.3 设 A 是度量空间(X,ρ)的子集. $d(A)$是 A 的直径，证明：

(i)$d(A)=d(\overline{A})$，

(ii)如 A 是紧集，则存在 $x,y\in A$，使 $d(A)=\rho(x,y)$.

4.4 度量空间(X,ρ)的点列$\{x_n\}_{n\in N}$称为收敛于点$x\in X$，如果数列$\{\rho(x,x_n)\}_{n\in N}$收敛于零，试证点 $x\in\overline{A}$当且仅当存在A 中的点列收敛于 x.

4.5 证明度量空间(X,ρ)中的网$\{\varphi(\delta):\delta\in\Delta\}$收敛于点 x 当且仅当网$\{\rho(\varphi(\delta),x):\delta\in\Delta\}$收敛于零.

4.6 设(X,ρ)，(Y,σ)是度量空间. 在度量拓扑下，X 到 Y 内的映射 f 是连续的当且仅当对每一$x\in X$，每一 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，$\rho(x,x')<\delta\Rightarrow\sigma(f(x),f(x'))<\varepsilon$.

4.7 试证对每一度量空间 (X,ρ)，$\rho_1(x,y)=\dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ 是 X 上的度量，且 ρ_1 与 ρ **等价**(equivalent，即 ρ_1,ρ 导出相同的拓扑).

4.8 试证 X 上的度量ρ_1,ρ_2 是等价的，当且仅当对每一 $x\in X$，每一点列$\{x_n\}_{n\in N}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\rho_1(x,x_n)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\rho_2(x,x_n)=0$.

4.9 设 f 是定义在非负实数集上的连续实值函数且满足：(i)f 是不减

的，(ii) $f(x)=0$ 当且仅当 $x=0$，(iii) $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$. 设 (X,ρ) 是度量空间，定义 $\rho'(x,y)=f(\rho(x,y))$. 试证 (X,ρ') 是度量空间且 ρ,ρ' 是等价的.

4.10 试证 A 是空间 X 的无处稠密子集当且仅当 $X-\overline{A}$ 稠密于 X.

4.11 试证度量空间 (X,ρ) 是全有界的当且仅当对 $\varepsilon>0$，存在由直径小于 ε 的子集组成的有限覆盖.

4.12 试证在完全度量空间，可数个不包含内点的闭集的并不包含内点.

4.13 试证空间 X 满足第一可数公理当且仅当对每一 $x\in X$，存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}$ 使任取 $x_n\in U_n(x)$，$\{x_n\}$ 以 x 为聚点.

4.14 试证具有 σ 局部有限基的正则空间是完备空间(即每一闭集是 G_δ 集).

4.15 设 $(X_1,\rho_1),(X_2,\rho_2),\cdots,(X_k,\rho_k)$ 是度量空间，对积集 $X_1\times\cdots\times X_k$ 的两点 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_k)$，$y=(y_1,\cdots,y_k)$ 定义

$$\rho(x,y)=\rho_1(x_1,y_1)+\rho_2(x_2,y_2)+\cdots+\rho_k(x_k,y_k).$$

试证 ρ 是积集上的度量且导出积拓扑.

4.16 试证 T_2 紧空间可度量化当且仅当具有可数基.

4.17 试证 T_2 局部紧空间的可数个开的稠密子集的交是稠密子集(即 T_2 局部紧空间是 Baire 空间).

4.18 试证连续的**几乎开**(almost open)映射保持邻域基的势(从而几乎开的连续闭映射保持可度量化性).

4.19 空间 X 到空间 Y 的映射 f 是几乎开的，当且仅当满足下述条件之一：

(i)对每一 $y\in Y$，存在 $x\in f^{-1}(y)$，x 具有开邻域基 $\mathscr{U}=\{U\}$，使 $f(U)$ $(U\in\mathscr{U})$ 是 Y 中的开集，

(ii)设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，则 $\{f\circ(U):U\in\mathscr{U}\}$ 是 Y 的开覆盖.

4.20 试证完备映射是双商闭映射.

4.21 试证开映射是双商映射.

4.22 试证 T_1 空间 X 到空间 Y 上的**准完备映射**(quasi-perfectmapping)，对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是可数紧的闭映射)保持局部有限集族(Okuyama[1967]).

4.23 正规空间 X 称为 **totally 正规的**(totally normal, Dowker[1953]),

如果 X 的每一开集 G 是开的 F_σ 子族 $\{G_\alpha\}$ 的并,且 $\{G_\alpha\}$ 在 G 中是局部有限的(即对每一 $x\in G$,存在 x 的邻域 $U(x)$ 仅与 $\{G_\alpha\}$ 中有限个元素相交). 试证明:

(i) 完备正规(perfect normal)空间是 totally 正规的,

(ii) T_2 遗传性仿紧空间(即每一子空间是仿紧的)是 totally 正规的(Dowker[1953]),

(iii) totally 正规空间的子空间是 totally 正规的(从而 totally 正规空间是遗传性正规空间(又称完全正规空间)).

4.24 空间 X 到空间 Y 的映射称为**拟开的**(quasi-open). 如果 X 的不空开集 U 的象 $f(U)$ 的内核不空(即 $f^\circ(U)\neq\varnothing$). 试证:设 E 是 Y 中的稠密子集,则 $f^{-1}(E)$ 是 X 中的稠密子集.

4.25 试证拟开的连续映射保持 Baire 空间.

4.26 集 X 上的两个度量 ρ_1,ρ_2 称为**一致等价的**(uniformly equivalent),如果对每一 $\varepsilon>0$ 存在 $\delta_1>0$ 及 $\delta_2>0$ 使对任意 $x,x'\in X$ 有 $\rho_1(x,x')<\delta_1\Rightarrow\rho_2(x,x')<\varepsilon$ 及 $\rho_2(x,x')<\delta_2\Rightarrow\rho_1(x,x')<\varepsilon$. 显然一致等价的度量是等价的. 试给出数直线上的两个度量,它们是等价的,但不是一致等价的.

4.27 试验证定理 4.1.17 中的度量 ρ' 一致等价于度量 ρ,习题 4.7 中的度量 ρ_1 一般说不一致等价于 ρ.

4.28 设 ρ_i,σ_i 是集 X_i 上的一致等价的度量($i=1,2,\cdots$)且都界于 1(即对任何 $x,x'\in X_i,\rho_i(x,x')\leqslant1,\sigma_i(x,x')\leqslant1$). 置

$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\rho_i(x_i,y_i),\sigma(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\sigma_i(x_i,y_i)$. 试验证 ρ,σ 是 $\prod_{i=1}^{\infty}X_i$ 上的一致等价度量.

4.29 设 f 是度量空间 (X,ρ) 到度量空间 (Y,σ) 的一致连续映射. 设 (X,ρ) 是全有界的,则 (Y,σ) 是全有界的.

4.30 设度量空间 (X,ρ) 是全有界的,而度量 ρ 一致等价于 X 上的另一度量 σ. 则度量空间 (X,σ) 是全有界的.

4.31 一致空间 X 称为**全有界的一致空间**(totally bounded uniform space),如果它的一致结构 $\{\mathcal{U}_\alpha:\alpha\in A\}$ 中的每一个覆盖 $\mathcal{U}_\alpha$ 具有有限子覆盖. 一致空间 X 上的滤子 $\mathscr{F}$ 称为 **Cauchy 滤子**,如果对每一 $\mathcal{U}_\alpha$ 存在 $F\in\mathscr{F}$ 及 $U\in\mathcal{U}_\alpha$ 使 $F\subset U$. 一致空间 X 上的网 $\varphi(\Delta;>)$ 称为 **Cauchy 网**,如果对每一 $\mathcal{U}_\alpha$,存在 $U\in\mathcal{U}_\alpha$ 使这网终留于 U. 一致空间 X 称为**完全一致空间**(complete uni-

form space),如果 X 上的每一 Cauchy 滤子收敛,试证:

(i) 完全一致空间 X 的子空间 E 是完全一致空间当且仅当 E 闭于 X,

(ii) 一致空间 X 是紧的当且仅当 X 是全有界的且完全的一致空间,

(iii) 一致空间 X 是完全一致空间当且仅当 X 上的每一 Cauchy 网收敛,

(iv) 一致空间是全有界的一致空间当且仅当它的一致结构具有由有限覆盖组成的基.

第五章 仿紧空间

在第三章§5曾引入仿紧空间(定义3.5.15),它是紧空间与度量空间的共同推广.在§5里证明了仿紧空间的一些性质(3.15.16—3.5.22).在第四章§3的Nagata-Smirnov,Bing的度量化定理(定理4.3.10,4.3.11)及§4的Morita-Hanai-Stone的度量空间的闭象定理(定理4.4.12)都与仿紧性概念有联系,足以说明仿紧空间的重要性.在这一章里较系统地叙述仿紧空间的性质.在下一章(第六章)叙述除仿紧空间外的其它覆盖性质.

§1. 仿紧空间的刻画

定理5.1.1(Michael[1953]) 设X是正则空间,则下列论断等价:

(i) X是仿紧空间,

(ii) X的每一开覆盖具有σ局部有限开加细覆盖,

(iii) X的每一开覆盖具有局部有限加细覆盖,

(iv) X的每一开覆盖具有局部有限闭加细覆盖.

上述定理可由下列两引理及引理4.4.2得证.

引理5.1.2 每一σ局部有限开覆盖具有局部有限加细覆盖.

证明 设$\mathscr{U}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{U}_n$是某空间的$\sigma$局部有限开覆盖,每一$\mathscr{U}_n(n\in N)$是局部有限开集族.置$\mathscr{V}_1=\mathscr{U}_1,\mathscr{V}_n=\{U-\bigcup_{k<n}\mathscr{U}_k^*:U\in\mathscr{U}_k\},n\geqslant 2$.这里$\mathscr{U}_k^*=\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}_k\}$.容易验证$\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$是$\mathscr{U}$的局部有限加细覆盖.证完.

引理5.1.3 设X是正则空间,每一开覆盖具有局部有限加细覆盖.则也具有局部有限闭加细覆盖.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$X$的任一开覆盖. 对每一 $x\in X$, $x\in$某 U_α. 由正则性存在 x 的开邻域 V_x 使 $x\in V_x\subset\overline{V}_x\subset U_\alpha$. 置 $\mathscr{V}=\{V_x\}_{x\in X}$, 则 $\mathscr{V}$是 $\mathscr{U}$的开加细覆盖. 由假设, 存在局部有限覆盖 $\mathscr{W}=\{W_\beta\}_{\beta\in B}$加细 $\mathscr{V}$. 则$\{\overline{W}_\beta\}_{\beta\in B}$是 $\mathscr{U}$的局部有限闭加细覆盖. 证完.

定理 5.1.1 的**证明**: (i)⇒(ii)显然, (ii)⇒(iii), 由引理 5.1.2, (iii)⇒(iv), 由引理 5.1.3, (iv)⇒(i), 由引理 4.4.2 得证. 证完.

推论 5.1.4 正则 Lindelöf 空间是仿紧空间.

回忆前面定义 4.3.6 的点星加细及星加细概念.

定理 5.1.5(Stone[1948], Michael[1953]) 设 X 是正则空间, 则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间,

(ii) X 的每一开覆盖具有点星开加细覆盖,

(iii) X 的每一开覆盖具有星开加细覆盖,

(iv) X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖.

上述定理可由下列三引理得证.

引理 5.1.6 如果 X 的每一开覆盖具有局部有限闭加细覆盖, 则也具有点星开加细覆盖.

证明 设$\{F_t\}_{t\in T}$是X的开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$的局部有限闭加细覆盖. 对每一 $t\in T$, 存在 $\alpha(t)\in A$ 使 $F_t\subset U_{\alpha(t)}$. 置

$$T(x)=\{t:t\in T, x\in F_x\}, x\in X.$$

$$V(x)=\bigcap_{t\in T(x)}U_{\alpha(t)}\cap(X-\bigcup_{t\notin T(x)}F_t). \tag{1}$$

由$\{F_t\}_{t\in T}$的局部有限性, 知 $T(x)$是 T 的有限子集, $V(x)$是包含 x 的开集, $\mathscr{V}=\{V(x)\}_{x\in X}$是$X$的开覆盖. 下证 $\mathscr{V}$满足引理的要求星加细 $\mathscr{U}$.

对 $x_0\in X$ 及 $t_0\in T(x_0)$, 由(1)知: 如 $x_0\in V(x)$, 则 $t_0\in T(x)$, 从而 $V(x)\subset U_{\alpha(t_0)}$, 所以 $\mathrm{st}(x_0,\mathscr{V})=\bigcup\{V(x):V(x)\in\mathscr{V}, x_0\in V(x)\}\subset U_{\alpha(t_0)}$. 证完.

引理 5.1.7 设覆盖 $\mathscr{U}=\{A_s\}_{s\in S}$是覆盖 $\mathscr{V}=\{B_t\}_{t\in T}$的点星

加细覆盖,而 $\mathscr{V}$ 是覆盖 $\mathscr{W}=\{C_w\}_{w\in W}$ 的点星加细覆盖,则 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{W}$ 的星加细覆盖.

证明 考察某固定的 $s_0\in S$. 对每一 $x\in A_{s_0}(A_{s_0}\in\mathscr{U})$. 取 $t(x)\in T$ 使

$$A_{s_0}\subset \mathrm{st}(x,\mathscr{U})\subset B_{t(x)} \tag{2}$$

从而

$$\mathrm{st}(A_{s_0},\mathscr{U})\subset\bigcup_{x\in A_{s_0}}\mathrm{st}(x,\mathscr{U})\subset\bigcup_{x\in A_{s_0}}B_{t(x)} \tag{3}$$

取某固定的 $x_0\in A_{s_0}$, 由(2), $x_0\in B_{t(x)}$, $(x\in A_{s_0})$. 所以

$$\bigcup_{x\in A_{s_0}}B_{t(x)}\subset \mathrm{st}(x_0,\mathscr{V}). \tag{4}$$

由(3)及(4),有

$$\mathrm{st}(A_{s_0},\mathscr{U})\subset\mathrm{st}(x_0,\mathscr{V})\subset \text{某 } C_w\in\mathscr{W}.$$

证完.

引理 5.1.8 如果 X 的每一开覆盖具有星开加细覆盖,则 X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_s\}_{s\in S}$ 是空间 X 的开覆盖. 置 $\mathscr{U}_0=\mathscr{U}$, 设 $\mathscr{U}_1$, $\mathscr{U}_2,\cdots$ 是 X 的开覆盖序列满足下列条件:

$$\mathscr{U}_{n+1} \text{ 星加细 } \mathscr{U}_n (n=0,1,2,\cdots). \tag{5}$$

对每一 $s\in S$ 及每一 $n=1,2,\cdots$, 置

$$U_{s,n}=\{x:\text{存在 } x \text{ 的邻域 } V \text{ 使 } \mathrm{st}(V,\mathscr{U}_n)\subset U_s\}. \tag{6}$$

对每一 $n=1,2,\cdots$, 显然 $\{U_{s,n}\}_{s\in S}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细覆盖. 下面证明

$$x\in U_{s,n} \text{ 及 } y\notin U_{s,n+1}\Rightarrow \text{不存在 } U\in\mathscr{U}_{n+1} \text{ 使 } x,y\in U. \tag{7}$$

由(5), 对每一 $U\in\mathscr{U}_{n+1}$, 存在 $W\in\mathscr{U}_n$ 使 $\mathrm{st}(U,\mathscr{U}_{n+1})\subset W$. 如果 $x\in U\cap U_{s,n}$, 则 $W\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U_s$, 所以 $\mathrm{st}(U,\mathscr{U}_{n+1})\subset U_s$. 由(6), $U\subset U_{s,n+1}$. $y\notin U_{s,n+1}\Rightarrow y\notin U$.

把集 S 良序化,置

$$V_{s_0,n}=U_{s_0,n}-\bigcup_{s<s_0}U_{s,n+1}. \tag{8}$$

对任意不同的 $s_1,s_2\in S$, 按 $s_1<s_2$ 或 $s_2<s_1$, 由(8)分别得

$$V_{s_2,n} \subset X - U_{s_1,n+1} \text{ 或 } V_{s_1,n} \subset X - U_{s_2,n+1}.$$

对不同的 s_1, s_2,如果 $x \in V_{s_1,n}, y \in V_{s_2,n}$,则由(7),不存在 $U \in \mathscr{U}_{n+1}$使 $x, y \in U$,所以对每一 $n = 1,2,\cdots$,开集族$\{V_{s,n}\}_{s\in S}$是离散的.

下证$\{V_{s,n}\}_{s\in S}, n = 1,2,\cdots$是空间 X 的开覆盖.对任一 $y \in X$,对每一 n,$\{U_{s,n}\}_{s\in S}$是覆盖.设 s_n 是S 中的最前元素之使$y \in U_{s,n}$者.把$\{S_n\}_{n\in N}$中的最前元素记作$s(y)$.取 n 是对应于$s(y)$的某一 自然数.从而 $y \in U_{s(y),n}, y \notin U_{s,n+2}(s < s(y))$.对任何 $x \in U_{s,n+1}(s < s(y))$由(7)不存在 $U \in \mathscr{U}_{n+2}$使 $x, y \in U$.所以

$$\mathrm{st}(y, \mathscr{U}_{n+2}) \cap (\bigcup_{s<s(y)} U_{s,n+1}) = \varnothing.$$

由(8),$y \in V_{S(y),n}$.证完.

定理 5.1.5 的**证明**:(i)⇒(ii),由定理 5.1.1 的(iv)及引理 5.1.6;(ii)⇒(iii),(iii)⇒(iv),分别由引理 5.1.7,5.1.8;(iv)⇒(i),由定理 5.1.1 的(ii)得证.证完.

定理 5.1.9(Tukey[1940]) T_1 空间 X 称为**满正规**(fully normal)**空间**,如果 X 的每一开覆盖具有星加细开覆盖.

定理 5.1.10(Stone[1948]) 空间 X 是满正规空间当且仅当 X 是 T_2 仿紧空间.

证明 必要性.由引理 5.1.8 知 X 的每一开覆盖具有σ 离散开加细覆盖,从而更是 σ 局部有限的.易证满正规空间是正规的(习题 5.3),从而是正则的.由定理 5.1.1 知 X 是T_2 仿紧的.

充分性.T_2 仿紧空间是正则的,由定理 5.1.5 的(iii)知 X 是满正规的.证完.

1940 年 Tukey 引入满正规空间并证明度量空间是满正规的.1948 年 Stone 证明满正规性等价于 T_2 仿紧性(定理 5.1.10),从而得到度量空间是仿紧空间(定理 4.3.5),解决了 Dieudonné1944 年引入仿紧性时提出的问题,奠定了仿紧性在拓扑学分析学中的重要地位.不仅如此,Stone 在证明定理 5.1.10 时所用的方法技巧性很强.在覆盖性质理论的论证中,历来学者如 Michael, Burke,

Worrell, Junnila 等都继承、发展、深化了 Stone 的技巧. 本书第一次介绍 Stone 的技巧是在定理 4.3.4,那里是用开球体现其证法,较有直观性,使便于理解. 目的是在于早一些得到度量空间是仿紧空间这一重要结论,使本书的前四章自成体系. 这里是第二次介绍 Stone 的证法(引理 5.1.8). 读者可与定理 4.3.4 对看,更好地深入理解,逐步掌握其技巧. 引理 5.1.8 的证明较定理 4.3.4 的证明简短些. 这是因这里只要证具有 σ 离散开加细覆盖而由定理 5.1.1 得证. 而在定理 4.4.3 必须构造既是 σ 离散又是局部有限的开加细覆盖而由仿紧性的定义得证.

Michael 在得到定理 5.1.1 后曾提出 T_2 仿紧性能否为闭映射所保持? 接着他在 1957 年引入闭包保持集族的概念,证明了:"在正则空间中,X 是仿紧空间,当且仅当 X 的每一开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖."从而解决了所提出的问题(见定理 5.2.1). 后来,他在 1959 年又引入垫状加细概念改进了上述结果.

定义 5.1.11 集族 $\mathscr{U}$ 称为**闭包保持的**(closure-preserving),如果对任一 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$, $(\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}'\})^-=\bigcup\{\overline{U}:U\in\mathscr{U}'\}$.

我们在第三章曾证明过,局部有限集族 $\mathscr{U}$ 具有定义 5.1.11 的性质(见引理 3.5.17),所以局部有限集族→闭包保持集族,其逆不真. 对闭包保持集族 $\mathscr{U}$ 及空间的闭集 F, $\{U\cap F:U\in\mathscr{U}\}$ 仍是闭包保持的(读者自证,习题 5.5).

定义 5.1.12 集族 $\mathscr{V}$ 称为**垫状**于(cushioned in)集族 $\mathscr{U}$,如果存在映射 $f:\mathscr{V}\to\mathscr{U}$,如果对每一 $\mathscr{V}'\subset\mathscr{V}$, $(U\{V:V\in\mathscr{V}'\})^-\subset\bigcup\{f(V):V\in\mathscr{V}'\}$.

当 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$ 时, $\mathscr{V}$ 垫状于 $\mathscr{U}$,可置 $V_\alpha=U\{V:V\in\mathscr{V},f(V)=U_\alpha\}$,则 $\mathscr{V}'=\{V_\alpha\}$ 仍垫状于 $\mathscr{U}$,这时有 $f(V_\alpha)=U_\alpha$,称 $\mathscr{V}'$ **精确地**(precisely)垫状于 $\mathscr{U}$.

设 $\mathscr{W}$ 是开覆盖 $\mathscr{U}$ 的闭包保持加细闭覆盖,则 $\mathscr{W}$ 也同时是 $\mathscr{U}$ 的垫状加细覆盖,只要把 $f:\mathscr{W}\to\mathscr{U}$ 确定为对每一 $W\in\mathscr{W}$, $f(W)$ 是包含着 W 的 $\mathscr{U}$ 中的某 U. 在正则空间,开覆盖 $\mathscr{U}$ 的每一加细覆盖 $\mathscr{V}$ 总可作为 $\mathscr{V}$ 中每一元 V 的闭包 $\overline{V}$ 包含在 $\mathscr{U}$ 的某一元 U 中,所以

在正则空间 X,每一开覆盖具有闭包保持加细覆盖,蕴含每一开覆盖具有垫状加细覆盖.

定理 5.1.13(Michael[1957],[1959]) 设 X 是正则空间,则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间,

(ii) X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持开加细覆盖,

(iii) X 的每一开覆盖具有闭加细覆盖,

(iv) X 的每一开覆盖具有 σ 垫状开加细覆盖,

(v) X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖.

为了证明上述定理 5.1.13,先证明下述引理.这引理的证明技巧很强,是前面所述 Stone 技巧的发展.

引理 5.1.14(Michael[1959]) 设 T_1 空间 X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖,则 X 是仿紧空间.

证明 容易证明每一开覆盖具有垫状加细覆盖蕴含 T_4 分离公理(习题 5.6 或后面定理 5.1.16),所以 T_1 空间 X 是正规的.所以只要证明 X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖,从而由定理 5.1.5 的(iv)得证.下面先证具有 σ 互不相交开加细覆盖,然后由正规性过渡到 σ 离散开加细覆盖.

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是空间 X 的开覆盖,把指标集 A 良序化.下面对每一 $i\in N$ 构造 $\mathscr{U}$ 的精确垫状加细覆盖$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$,使对每一 $\alpha\in A$ 及 $i\in N$ 满足:

$$(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,i})^-\cap C_{\alpha,i+1}=\varnothing, \tag{1}$$

$$C_{\alpha,i}\cap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,i+1})^-=\varnothing. \tag{2}$$

由假设取$\{C_{\alpha,1}\}_{\alpha\in A}$是$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$的精确垫状加细覆盖.设对 $i=1,2,\cdots,n$ 已构造$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$的垫状加细覆盖$\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$满足(1)及(2).下面构造$\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$.对每一 $\alpha\in A$,置

$$U_{\alpha,n+1}=U_\alpha-(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n})^-. \tag{3}$$

则$\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$是 X 的开覆盖,这是因为对 $x\in X$ 取 $\mathscr{U}$ 中包含 x 的第一个 U_α,由于$\{C_{\alpha,n}\}_{\alpha\in A}$垫状加细$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$,$(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n})^-\subset$

$\bigcup_{\beta<\alpha}U_\beta$，所以 $x\in U_{\alpha,n+1}$. 由假设取 $\{U_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$ 的垫状加细覆盖 $\{C_{\alpha,n+1}\}_{\alpha\in A}$，则由(3)可知 $(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,n})^-\cap C_{\alpha,n+1}=\varnothing$（因 $C_{\alpha,n+1}\subset U_{\alpha,n+1}$）. 故满足(1)，至于(2)，由(3)可知 $C_{\alpha,n}$ 与所有 $\beta>\alpha$ 的 $U_{\beta,n+1}$ 不交，而 $(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,n+1})^-\subset\bigcup_{\beta>\alpha}U_{\beta,n+1}$，故 $C_{\alpha,n}\cap(\bigcup_{\beta>\alpha}C_{\beta,n+1})^-=\varnothing$，满足(2).

对每一 α 及 i 置

$$V_{\alpha,i}=X-(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_{\beta,i})^-,$$

则 $V_{\alpha,i}$ 是开集且对 $\alpha\neq\beta$，$V_{\alpha,i}\cap V_{\beta,i}=\varnothing$. 由于 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖，$V_{\alpha,i}\subset C_{\alpha,i}\subset U_\alpha$. 下面要证明 $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,i\in N\}$ 是空间 X 的覆盖，这样，$\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,i\in N\}$ 成为 $\mathscr{U}$ 的 σ 互斥加细开覆盖. 对每一 $x\in X$，由于每一 $\{C_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}(i\in N)$ 都是 X 的覆盖，置

$$\alpha_i=\min\{\alpha\in A:x\in C_{\alpha,i}\}.$$

并取正整数 k 使

$$\alpha_k=\min\{\alpha_i:i\in N\}.$$

下面证明 $x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 首先由 α_k 的定义知 $x\in C_{\alpha_k,k}$. 由(2)（让 $i=k$），

$$x\notin(\bigcup_{\alpha>\alpha_k}C_{\alpha,k+1})^-. \tag{4}$$

由于 $\{C_{\alpha,k+2}\}_{\alpha\in A}$ 也是覆盖，由 α_k 的定义，存在某些 $\alpha\geqslant\alpha_k$ 使 $x\in C_{\alpha,k+2}$. 由(1)（让 $i=k+1$），$x\notin(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,k+1})^-$. 由于 $(\bigcup_{\beta<\alpha_k}C_{\beta,k+1})^-\subset(\bigcup_{\beta<\alpha}C_{\beta,k+1})^-$，所以

$$x\notin(\bigcup_{\beta<\alpha_k}C_{\beta,k+1})^-. \tag{5}$$

由(4)及(5)，知 $x\in V_{\alpha_k,k+1}$. 到此证明了 $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,i\in N\}$ 是 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的 σ 互斥加细开覆盖.

为了完成证明，由假设，存在开覆盖 $\{V_{\alpha,i}:\alpha\in A,i\in N\}$ 的精确垫状加细覆盖 $\{D_{\alpha,i}:\alpha\in A,i\in N\}$. 对每 $i\in N$，有

$$(\bigcup_{\alpha\in A}D_{\alpha,i})^-\subset\bigcup_{\alpha\in A}C_{\alpha,i}$$

因 X 是正规的，存在开集 G_i 使

$$(\bigcup_{\alpha\in A}D_{\alpha,i})^{-}\subset G_i\subset\overline{G_i}\subset\bigcup_{\alpha\in A}C_{\alpha,i}.$$

置 $\mathscr{W}_i=\{V_{\alpha,i}\cap G_i:\alpha\in A\}$，则 $\mathscr{W}_i$ 是离散开集族(读者自证，参见习题 2.29). 从而 $\mathscr{W}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{W}_i$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散加细开覆盖. 证完.

定理 5.1.13 的**证明**. 我们按下列程序证：(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(v)⇒(i)，及(ii)⇒(iv)⇒(v).

(i)⇒(ii). 由刻画定理 5.1.1 的(ii)及局部有限集族是闭包保持的而得证.

(ii)⇒(iii). 设空间 X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持加细开覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{V}_i$，每一 $\mathscr{V}_i$ 是闭包保持的. 因 X 是正则的，可作为每一 $\{\overline{V}:V\in\mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$. 显然，每一 $\{\overline{V}:V\in\mathscr{V}_i\}$ 也是闭包保持的. 对每一 $i\in N$，置 $H_i=\bigcup\mathscr{V}_i$，H_i 是开集. 并设

$$\mathscr{W}_i=\{\overline{V}-\bigcup_{n\leqslant i}H_n:V\in\mathscr{V}_i\},\mathscr{W}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{W}_i.$$

由于 $\overline{V}-\bigcup_{n\leqslant i}H_n=\overline{V}\cap(X-\bigcup_{n\leqslant i}H_n)$，$X-\bigcup_{n\leqslant i}H_n$ 是闭集. 而 $\{\overline{V}:V\in\mathscr{V}_i\}$ 是闭包保持的，所以 $\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的，从而对任何 $r\in N$，$\bigcup_{i\leqslant r}\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的. 现在要证 $\mathscr{W}$ 是闭包保持的. 设 $\mathscr{W}'\subset\mathscr{W}$，$x\in(\bigcup\mathscr{W}')^{-}$. 存在 $m\in N$，$x\in H_m$. 对每一 $W\in\mathscr{W}'\cap\mathscr{W}_i(i>m)$，$W\cap H_m=\varnothing$. 所以 $x\in(\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{W}_i))^{-}$. 由于 $\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{W}_i$ 是闭包保持的，所以存在 $W\in\mathscr{W}'\cap(\bigcup_{i\leqslant m}\mathscr{W}_i)\subset\mathscr{W}'$，使 $x\in\overline{W}=W$. 到此证明了 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{U}$ 的闭包保持闭加细覆盖.

(iii)⇒(v). $\mathscr{U}$ 的每一闭包保持闭加细覆盖同时是垫状加细覆盖.

(v)⇒(i). 由引理 5.1.14 得证.

(ii)⇒(iv). 显然，(iv)⇒(v)证法类似于(ii)⇒(iii)(读者自己完成). 证完.

T_2 仿紧性蕴含正规性，满足较强的分离公理(T_4 分离公理). 其实它满足更强形式的分离公理.

定义 5.1.15 T_1 空间 X 称为**集态正规**(collectionwise normal)**空间**，如果对 X 的每一离散闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$，存在互斥(互不相交)的开集族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，使对每一 $\alpha\in A$，$F_\alpha\subset U_\alpha$.

注记 显然,集态正规空间是正规的.由习题 2.29 知上述定义中的"互斥"可改为"离散".

在引理 5.1.14 的证明开始时指出每一开覆盖具有垫状加细覆盖蕴含正规性,其实有下列更强的结果.

定理 5.1.16 设空间 X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖.则 X 是集态正规空间.

证明 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的离散闭集族.不妨设对 $\alpha\neq\beta$, $F_\alpha\neq F_\beta$.对 $\alpha\in A$ 置 $U_\alpha = X - \bigcup_{\beta\neq\alpha}F_\beta$,则 $F_\alpha\subset U_\alpha$,且对 $\alpha\neq\beta$, $U_\alpha\cap U_\beta=\varnothing$. $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖,由假设,存在垫状加细覆盖 $\{C_\alpha\}_{\alpha\in A}$.置 $V_\alpha = X-(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta)^-$,下面验证 $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是所要求的开集族.因 $(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta)^-\subset\bigcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta$,而 $(\bigcup_{\beta\neq\alpha}U_\beta)\cap F_\alpha=\varnothing$,所以 $F\alpha\subset V_\alpha$, $\alpha\in A$.此外,对不同的 $\alpha,\alpha'\in A$, $(\bigcup_{\beta\neq\alpha}C_\beta)\cup(\bigcup_{\beta\neq\alpha'}C_\beta)=X$,所以 $V_\alpha\cap V_{\alpha'}=\varnothing$.到此证明了 X 是集态正规空间.证完.

推论 5.1.17 T_2(或正则)仿紧空间是集态正规空间.

证明 由定理 1.1.13 的(v)立刻得证.

注记 读者容易证明每一星加细开覆盖是垫状加细覆盖(习题 5.8).由定理 5.1.1 可知满正规性(定义 5.1.9)蕴含集态正规性.

定义 5.1.18 从空间 X 到单位区间 $I=[0,1]$ 内一族连续函数 $\Phi=\{\varphi_s\}_{s\in S}$ 称为 X 的**单位分解**(partition of unity),如果对每一 $x\in X$, $\sum_{s\in S}\varphi_s(x)=1$.单位分解称是局部有限的如果 $\{\varphi_s^{-1}((0,1])\}_{s\in S}$ 所形成 X 的覆盖是局部有限的.单位分解称为从属于这空间的覆盖 $\mathscr{U}$,如果 $\{\varphi_s^{-1}((0,1])\}_{s\in S}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖.

定理 5.1.19(Michael,[1953]) 设 X 是 T_2 空间,则下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间,

(ii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$,

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

上述刻画不仅在拓扑学中且在分析与微分几何中有很大用处.这刻画的证明可通过下列两引理而得证.

引理 5.1.20 正规空间 X 的每一局部有限开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正规空间 X 的局部有限开覆盖.由正规性,存在闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 使对每一 $\alpha\in A$, $F_\alpha\subset U_\alpha$(引理 4.4.3).由乌利松引理(定理 2.4.1),对每一 $\alpha\in A$,存在连续函数 $f_\alpha:X\to[0,1]$ 使 $f_\alpha(x)=0, x\in X-U_\alpha$; $f_\alpha(x)=1, x\in F_\alpha$.置 $f(x)=\sum\limits_{\alpha\in A}f_\alpha(x)$,由于 $\mathscr{U}$ 是局部有限的及 f_α 的定义知 f 是 X 到实数集合 R 内的连续函数.由于 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的覆盖, f 在 X 上处处不为零.置 $\varphi_\alpha=f_\alpha/f$,则 $\Phi=\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 上的单位分解.由于 $\{\varphi_\alpha^{-1}([0,1])\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的且加细 $\mathscr{U}$,故 Φ 是局部有限的且从属于 $\mathscr{U}$.证完.

引理 5.1.21 设空间 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有 X 上的单位分解 Φ 从属于 $\mathscr{U}$.则 $\mathscr{U}$ 具有 σ 局部有限加细开覆盖.

证明 设 $\Phi=\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 上的单位分解从属于 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$.所以 $\{\varphi_\alpha^{-1}([0,1])\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$.对每一 $\alpha\in A$ 把开集 $\varphi_\alpha^{-1}((0,1])$ 分解为如下可数个开集的并.

$$\varphi_\alpha^{-1}((0,1])=\bigcup\left\{\varphi_\alpha\left(\left(\frac{1}{i},1\right]\right):i\geqslant 2\right\},\alpha\in A.$$

置

$$V_{\alpha,i}=\varphi_\alpha^{-1}\left(\left(\frac{1}{i},1\right]\right),\mathscr{V}=\{V_{\alpha,i}:i\geqslant 2,\alpha\in A\},$$

则 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细开覆盖.下证对每一 i, $\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的,从而 $\mathscr{V}$ 是 σ 局部有限的.

设 $x_0\in X$, i 是某不小于 2 的自然数.要找出 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 使 $U(x_0)$ 仅与 $\{V_{\alpha,i}\}_{\alpha\in A}$ 中有限个元相交.因 $\Phi=\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是单位分解, $\sum_{\alpha\in A}\varphi_\alpha(x_0)=1$,可以选取 A 的有限子集 A' 使 $\sum_{\alpha\in A'}\varphi_\alpha(x_0)>1-\frac{1}{2i}$.由连续性,存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$,使对

每一 $x \in U(x_0)$, $\sum_{\alpha\in A'}\varphi_\alpha(x) > 1 - \frac{1}{i}$. $U(x_0)$ 只能与有限个 $V_{\alpha,i}(\alpha \in A')$ 相交. 如不然, $U(x_0) \cap V_{\beta,i} \neq \varnothing$, $\beta \notin A'$. 则对 $x' \in U(x_0) \cap V_{\beta,i}$, 将有 $\sum_{\alpha\in A'}\varphi_\alpha(x') + \varphi_\beta(x') > 1$. 矛盾. 证完.

定理 5.1.19 的**证明**: 只要证明(i)⇒(ii), (iii)⇒(i) ((ii)⇒(iii)是平凡的). (i)⇒(ii). 因 T_2 仿紧空间是正规的(定理 3.5.20), 由引理 5.1.20 得证.

(iii)⇒(i). 由引理 5.1.21 知 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有 σ 局部有限加细开覆盖. 只要证明满足(iii)的空间 X 是正则的, 则由定理 5.1.1 得证. 为此, 下证满足(iii)的 T_1 空间是完全正则空间.

对于点 $x_0 \in X$ 及闭集 $F \subset X$ 使 $x_0 \notin F$. 开覆盖 $\mathscr{U} = \{X - F, X - \{x_0\}\}$ 具有单位分解 $\Phi = \{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 从属于 $\mathscr{U}$. 取 $\alpha_0 \in A$, 使 $\varphi_{\alpha_0}(x_0) = a > 0$, 注意此时 $\varphi_{\alpha_0}^{-1}((0,1]) \subset X - F$ 而 $\varphi_{\alpha_0}(x) = 0, x \in F$. 置 $f(x) = 1 - \min\{1, \varphi_{\alpha_0}(x)/a\}$, 则 $f(x_0) = 0$, $f(x) = 1$, 当 $x \in F$ 时, 故 X 是完全正则空间. 证完.

以上关于仿紧空间的四个刻画(定理 5.1.1, 5.1.5, 5.1.13, 5.1.18)都是在正则空间或 T_2 空间情况下作出的. 下面仿紧空间的两个刻画是不以任何分离公理为前提的, 分别由 Mack[1967], Junnila[1979a][1979b]得到的. 它们的证明要引入较多概念. 这里仅作介绍以备后面引用. 证明参见上所引文.

定义 5.1.22 空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**定向的**(**全序的**、**良序的**), 如果按集的包含关系是定向的(全序的、良序的). 开覆盖 $\mathscr{U}$ 称为**内核保持的**(interior-preserving), 如果对每一 $\mathscr{U}' \subset \mathscr{U}$, $\bigcap \mathscr{U}'$ 是开集.

定理 5.1.23(Mack[1967]) 下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间,

(ii) X 的每一良序开覆盖具有局部有限开加细覆盖,

(iii) X 的每一定向开覆盖具有局部有限开加细覆盖,

(iv) X 的每一定向开覆盖具有局部有限闭加细覆盖.

注记 这里的(iv)不同于定理 5.1.1 中的(iv), 这里不要求正

则性.

定理 5.1.24(Junnila[1979a],[1979b]) 下列论断等价:

(i) X 是仿紧空间,

(ii) X 的每一内核保持定向开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖,且这覆盖的元(闭集)的内核覆盖 X,

(iii) X 的每一定向开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖,且这覆盖的元(闭集)的内核覆盖 X,

(iv) X 的每一全序开覆盖具有局部有限加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x\in X$, $x\in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{V}))$.

§2. 仿紧空间的映射性质

这一节里的映射都是连续满映射.

定理 5.2.1(Michael[1959]) 闭映射保持 T_2 仿紧空间.

证明 利用习题 5.7 及定理 5.1.13 的(iii)即可得证. 证完.

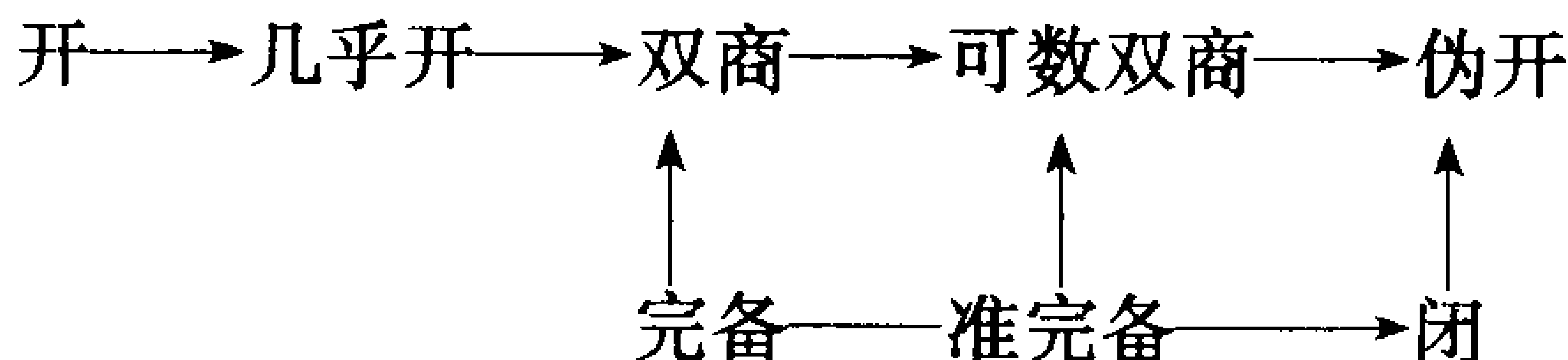
Michael 为了解决闭映射保持 T_2 仿紧性,引入闭包保持集族证明了相应的定理 5.1.13 中的(iii). 这一方法为后来许多学者采用.

上述定理 5.2.1 说明"闭映射保持 T_2 仿紧性",至于不加分离公理的仿紧性能否为闭映射保持? 文献中未见提起过. 由于前面的四个刻画是在分离公理的前提下得到的,由此刻画所得的映射定理难免附加分离公理. 要想得到不加分离公理的仿紧性的映射定理,必须仰仗不加分离公理的仿紧性的刻画,如前节末介绍的 Mack 和 Junnila 的刻画. Mack (1967)根据他的刻画的(iv)证明了"完备映射保持仿紧性"(注意,如果用定理 5.1.1 的(iv),无法证明这结果). Worrell[1966b]曾以高度技巧证明了"闭映射保持弱仿紧性(见后)"后,宣称用类似的技巧可以证明"既开且闭的映射保持仿紧性"及"T_1 仿紧空间在边缘紧的闭映射下的象是仿紧空间". 高国士(1985a)证明了"几乎开、闭映射保持仿紧性以改进 Worrell 的结果并正式提出:闭映射能否保持仿紧性(不加分离公

理)？高的文章发表后，吴利生认为稍加改动可将“几乎开”改为“双商”如下面的定理 5.2.23 所述.

定义 5.2.2 空间 X 到空间 Y 的映射 f 称为**几乎开的**(almost-open)，如果对每一 $y\in Y$，存在 $x\in f^{-1}(y)$ 使对 X 中的 x 的每一邻域 U，$y\in \operatorname{Int}f(U)$；$f$ 称为**双商的**(bi-quotient)，如果对每一 $y\in Y$ 及 X 的任一开集族 $\mathscr{U}$，$\bigcup\mathscr{U}\supset f^{-1}(y)$，则存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$ 使 $y\in \operatorname{Int}f(\bigcup\mathscr{U}')$(当 $\mathscr{U}$ 是 X 的任一可数开集族时，则称 f 为**可数双商的**(countably bi-quotient)；f 称为**伪开的**(pseudo-open)，如果对每一 $y\in Y$ 及 X 的开集 U，$U\supset f^{-1}(y)$，则 $y\in \operatorname{Int}f(U)$；$f$ 称为**准完备的**(quasi-perfect)，如果 f 是闭的，且对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是可数紧集(当 $f^{-1}(y)$ 是紧集时，称完备映射，见定义 3.3.2).

容易验证上述映射有下列蕴含关系：



相反蕴含关系均不成立.

定理 5.2.3 设 $f:X\to Y$ 是由仿紧空间 X 到空间 Y 上的双商闭映射，则 Y 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的定向开覆盖，则 $f^{-1}(\mathscr{V})=\{f^{-1}(V):V\in\mathscr{V}\}$ 是空间 X 的定向开覆盖. 由定理 5.1.24 之(iii)，存在闭包保持闭覆盖 $\mathscr{U}$ 加细 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 且 $\{\operatorname{Int}U:U\in\mathscr{U}\}$ 覆盖 X. 因开覆盖 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是定向的，可以设 $\mathscr{U}$ 关于有限并是封闭的. 因 f 是闭映射，$f(\mathscr{U})=\{f(U):U\in\mathscr{U}\}$ 是空间 Y 的闭包保持闭覆盖，显然加细 $\mathscr{V}$. $\{\operatorname{Int}U:U\in\mathscr{U}\}$ 是 X 的开覆盖. 因 f 是双商的，对每一 $y\in Y$，存在 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$ 使

$$y\in \operatorname{Int}f(\bigcup\{\operatorname{Int}U:U\in\mathscr{U}'\})\subset \operatorname{Int}f(\bigcup\mathscr{U}').$$

因 $\mathscr{U}$ 关于有限并封闭，存在某 $U\in\mathscr{U}$ 使 $U=\bigcup\mathscr{U}'$，从而 $y\in \operatorname{Int}f(U)$. 到此证明了空间 Y 的定向开覆盖 $\mathscr{V}$ 具有闭包保持闭加细覆盖 $f(\mathscr{U})=\{f(U):U\in\mathscr{U}\}$ 且这覆盖的元的内核覆盖 Y. 由定理

5.1.24 之(iii)，Y 是仿紧空间. 证完.

由于开映射、几乎开映射、完备映射都是双商映射，故有下述推论：

推论 5.2.4(高国士[1985a]) 几乎开、闭映射保持仿紧性.

推论 5.2.5(Worrell[1966b]) 开、闭映射保持仿紧性.

推论 5.2.6(Mack[1967]) 完备映射保持仿紧性.

关于 Worrell 的另一结果"边缘紧的闭映射保持 T_1 仿紧性"，其实可由 Mack 的结果导得，只要利用引理 4.4.11 把边缘紧闭映射过渡为完备映射并利用仿紧空间的闭子空间是仿紧的，即由推论 5.2.6 得证.

至于高国士(1985a)提出的问题：闭映射能否保持仿紧性(不加分离公理)？林寿(1988b)否定地回答了这问题. 他构作一个反例，说明即使是 T_1 仿紧空间也不能为闭映射所保持. 这一有趣的反例放在后面介绍(见下文例 6.2.6)，这是因为这例涉及许多尚未引入的概念，且对后面也有用处.

由于这反例的出现，上述定理 5.2.3 显得更有意义，不仅是当前这方面的最好结果，此后被改进的可能性也不多了.

此外，仿紧性为完备映射的逆象所保持. 下面证明更强的结果.

定理 5.2.7 设 f 是正则空间 X 到仿紧空间 Y 上的闭映射，且对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 X 的 Lindelöf 子空间，则 X 是仿紧空间(上述映射 f 通常称为**闭 Lindelöf 映射**).

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖，对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的. $f^{-1}(y)$ 为 $\mathscr{U}$ 中可数个元覆盖. 记 $f^{-1}(y)=\bigcup_{i\in N}U_{y,i}=U_y$. 由定理 1.5.8，存在开集 V_y 使 $f^{-1}(y)\subset V_y\subset U_y$ 及 $V_y=f^{-1}(f(V_y))$ 且 $f(V_y)$ 是 Y 中开集. 置 $W_y=f(V_y)$，则 $\{W_y\}_{y\in Y}$ 是空间 Y 的开覆盖. 因 Y 仿紧，$\{W_y\}_{y\in Y}$ 具有局部有限开加细覆盖 $\{O_\beta\}_{\beta\in B}$. 记 $\{W_y\}_{y\in Y}$ 中包含 O_β 的开集为 $W_{y(\beta)}$. 则 $f^{-1}(O_\beta)\subset f^{-1}(W_{y(\beta)})=V_{y(\beta)}\subset U_{y(\beta)}$. $\{f^{-1}(O_\beta)\}_{\beta\in B}$ 是局部有

限的. $\mathscr{V}_i=\{f^{-1}(O_\beta)\cap U_{y(\beta),i}\}_{\beta\in B}$也是局部有限的. 从而 $\mathscr{V}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{V}_i$ 是 $\mathscr{U}$的 σ 局部有限开加细覆盖. 因 X 正则,由定理 5.1.1 得证. 证完.

推论 5.2.8 设 f 是空间 X 到仿紧空间 Y 上的完备映射,则 X 是仿紧空间.

证明 因完备映射是闭 Lindelöf 映射. 定理 5.2.7 中 X 是正则的假设可去掉. 证完.

定理 5.2.9 空间 X 是仿紧空间当且仅当 X 在完备映射下的象是仿紧空间.

证明 结合推论 5.2.6 及推论 5.2.8. 证完.

§3. 仿紧空间的遗传性

在第二章§2 分离公理中述及空间的遗传性是指空间的任何子空间具有这空间的性质,并指出满足 T_0,T_1,T_2,T_3 分离公理的空间(从而正则空间)都具有遗传性,而正规空间不具有遗传性(例 2.2.15). 如果空间的任何闭子空间(或开子空间)具有这空间的性质,则称这空间具有闭遗传性(或开遗传性). 正规空间具有闭遗传性(习题 2.10)且开遗传性→遗传性(定理 2.2.17 的证明).

仿紧空间的闭子空间是仿紧的(定理 3.5.16),故仿紧空间具有闭遗传性,至于是否具有遗传性? 考察前面的例 2.2.15, $[0,\omega_1]$, $[0,\omega]$及其积$[0,\omega_1]\times[0,\omega]$都是 T_2 紧空间. 都是正规仿紧空间. 这积空间具有 T_2 而非正规的子空间,显然这子空间必非仿紧的(定理 3.5.20). 所以仿紧空间不具有遗传性. 但也有开遗传性→遗传性.

命题 5.3.1(Dieudonné[1944]) 设仿紧空间 X 的任一开子空间是仿紧的,则 X 的任何子空间是仿紧的(即 X 是遗传仿紧空间).

证明 设 $M\subset X$ 是仿紧空间 X 的任何子空间, $\mathscr{V}=\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族关于子空间 M 的开集覆盖 M. 存在 X 中的开集族 $\mathscr{U}=$

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$使 $V_\alpha = U_\alpha \cap M, \alpha \in A$. 置 $G = \bigcup \mathscr{U}, G \supset M$. $\mathscr{U}$覆盖开集 G,由假设,存在 $\mathscr{U}$ 的局部有限开加细覆盖 $\mathscr{W}$,则 $\{W \cap M : W \in \mathscr{W}\}$ 是关于子空间 M 的局部有限开覆盖,显然加细 $\mathscr{V}$. 故子空间 M 是仿紧的. 证完.

定理 5.3.2 T_2(正则)仿紧空间的 F_σ 子空间是仿紧空间.

证明 设 M 是 T_2(正则)仿紧空间 X 的 F_σ 子空间. 置 $M = \bigcup_{n\in N} F_n, F_{n(n\in N)}$是闭集. 设 $\mathscr{V} = \{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$是子空间$M$ 的开覆盖,存在 X 中的开集族 $\mathscr{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$使 $V_\alpha = U_\alpha \cap M, (\alpha \in A)$. 对每一 $n \in N$, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A} \cup \{X - F_n\}$是空间 X 的开覆盖. 存在局部有限开加细覆盖 $\mathscr{W}_n$. 置

$$\mathscr{B}_n = \{W \cap M : W \in \mathscr{W}_n, W \cap F_n \neq \varnothing\}, \mathscr{B} = \bigcup_{n\in N} \mathscr{B}_n$$

$\mathscr{B}$ 是关于子空间 M 的 σ 局部有限开加细覆盖,加细 $\mathscr{V}$. 因 T_2 仿紧空间是正则的, M 也是正则的. 由定理 5.1.1 的(ii)知 M 是仿紧的. 证完.

注记 上述定理 5.3.2 中 $\mathscr{B}_n$ 的局部有限性不仅是关于子空间M 且是关于空间X.

第四章§1 曾引入完备空间及完备正规空间(每一开集是 F_σ 集,见定义 4.1.12)结合前面定理 5.3.1 及定理 5.3.2 得下述推论.

推论 5.3.3(Dowker[1947]) 完备的 T_2 仿紧空间是遗传仿紧空间(或完备正规的仿紧空间是遗传仿紧空间).

上述推论中的完备性可稍减弱使成为遗传仿紧空间的必要与充分条件.

定义 5.3.4 集族$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$称为**遗传闭包保持的**(hereditarily closure-preserving),如果对 $\alpha \in A$. 任取 $H_\alpha \subset F_\alpha$, $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$是闭包保持的.

显然,局部有限→遗传闭包保持→闭包保持.

定理 5.3.5(高国士[1979b],恽自求[1981]) 设 X 是 T_2 仿紧空间,则下列论断等价:

(i) X 是遗传仿紧空间,

(ii) X 的每一开集 G 是一族开 F_σ 集的并，且这集族在 G 中是局部有限的，

(iii) X 的每一开集 G 是一族开 F_σ 集的并，且这集族在 G 中是 σ 遗传闭包保持的.

证明 只要证明(i)⇒(ii)及(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii). 设 G 是 T_2 仿紧空间 X 的开集. X 是正则的(定理 3.5.20). 对每一 $x \in G$. 存在 x 的开邻域 $U(x)$，使 $\overline{U}(x) \subset G$. $\{U(x)\}_{x \in G}$ 覆盖 G. 由(i) X 是遗传性仿紧的，存在关于 G 的局部有限开覆盖 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 加细 $\{U(x)\}_{x \in G}$. G 是 T_2 仿紧的，从而是正规的(定理 3.5.20)，存在关于 G 的闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 使 $F_\alpha \subset U_\alpha (\alpha \in A)$(定理 4.4.3). 从而存在关于 G 的开 F_σ 覆盖 $\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 使 $F_\alpha \subset G_\alpha \subset U_\alpha (\alpha \in A)$(习题 2.13)，因 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 在 G 中局部有限，$\{G_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 也在 G 中局部有限. 由于 G 是开集且 $G_\alpha \subset U_\alpha \subset \overline{U}_\alpha \subset \overline{U(x)} \subset G$，所以 G_α 是空间 X 的开 F_σ 集，$G = \bigcup \{G_\alpha : \alpha \in A\}$.

(iii)⇒(i). 只要证明空间 X 的任一开子集 G 是仿紧的，由定理 5.3.1 得证. 设 X 的任一开集 G 可表为：$G = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{\alpha_i \in A_i} X_{\alpha_i}$，每一 X_{α_i} 是 X 中的开 F_σ 集且 $\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in A_i}$ 在 G 中遗传性闭包保持. 设 $\mathscr{U}$ 是 G 的开覆盖. 置

$$\mathscr{U}_{\alpha_i} = \{U \cap X_{\alpha_i} : U \in \mathscr{U}\}, \alpha_i \in A_i, i \in N.$$

$\mathscr{U}_{\alpha_i}$ 是开 F_σ 集 X_{α_i} 的开覆盖. 由定理 5.3.2 的证明及这定理后的注记，知 $\mathscr{U}_{\alpha_i}$ 具有在 X 中 σ 局部有限，从而也在 G 中 σ 局部有限的开加细覆盖 $\mathscr{V}_{\alpha_i} = \bigcup_{j \in N} \mathscr{V}_{\alpha_i, j}$，对每一 j，$\mathscr{V}_{\alpha_i, j}$ 在 G 中局部有限，从而闭包保持. 由于 $\mathscr{V}^*_{\alpha_i, j} = \bigcup \{V : V \in \mathscr{V}_{\alpha_i, j}\} \subset X_{\alpha_i}$，而 $\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i \in A_i}$ 在 G 中遗传闭包保持的. 所以

$$\mathscr{V} = \bigcup_{i \in N} \bigcup_{j \in N} \bigcup_{\alpha_i \in A_i} \mathscr{V}_{\alpha_i, j}$$

是 G 的 σ 闭包保持开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 因 T_2 仿紧是正则的，G 是正则子空间. 由定理 5.1.13 的(ii)，知 G 是仿紧空间，从而 X 是遗传仿紧空间. 证完.

Dowker[1953]曾引入 totally **正规**(totally normal)**空间**(见习题 4.23). 这是满足定理 5.3.4 的(ii)的正规空间. 故有下述推论.

推论 5.3.6(高国士[1979b]) T_2 仿紧空间是遗传性仿紧空间当且仅当 X 是 totally 正规空间.

注记 定理 5.3.4 中的“遗传性闭包保持”不能减弱为“闭包保持”(见习题 5.16).

§4. 仿紧空间的可积性

1944 年 Dieudonné 引入仿紧空间后,1947 年 Sorgenfrey 给出两个仿紧空间的积不是仿紧空间的例. 这例见前面第二章的例 2.3.9(Sorgenfrey 直线). 例 2.3.10(两个 Sorgenfrey 直线的积). 这两个例在第二章里是用来说明两个 Lindelöf(正规)空间的积未必是 Lindelöf(正规)空间,也为这里说明两个仿紧空间的积不是仿紧空间作准备.

Sorgenfrey 直线是正则 Lindelöf 空间,从而是仿紧空间(推论 5.1.4),而 Sorgenfrey 直线与它自身的积是正则的,但不是正规的,从而不是仿紧的(定理 3.5.20).

基于上述情况,仿紧空间的可积性很差. 要使两个仿紧空间的积是仿紧的,必须至少对其中一个空间附加条件. Dieudonné (1944)直接证明下述定理 5.4.1(习题 5.17),这里通过映射定理作简易证明.

定理 5.4.1(Dieudonné) 仿紧空间与紧空间的积是仿紧空间.

证明 设 X 是仿紧空间,Y 是紧空间. 积空间 $X\times Y$ 到空间 X 上的投影 $p: X\times Y\to X$ 是完备映射(定理 3.3.1). 由推论 5.2.8,知 $X\times Y$ 是仿紧空间. 证完.

定理 5.4.2(Michael [1953]) 正则仿紧空间与正则 σ 紧(可数个紧子空间的并)空间的积是仿紧空间.

证明 设 X 是正则仿紧空间,Y 是正则 σ 紧空间. 由于 σ 紧

空间是 Lindelöf 空间，所以 Y 是仿紧空间(推论 5.1.4)，从而是 Tychonoff 空间. 所以存在空间 Y 的 Stone-Čech 紧化 βY. 投影 $\pi_1: X\times\beta Y\to X$ 是一完备映射. 由推论 5.2.8 知 $X\times\beta Y$ 是仿紧空间. 由于 T_2 空间的紧子集是闭集(定理 3.1.12)，Y 是βY 的F_σ 子集，从而 $X\times Y$ 是$X\times\beta Y$ 的 F_σ 子集，而 $X\times Y$ 是正则的，由定理 5.3.2 知 $X\times Y$ 是仿紧空间. 证完.

仿紧空间是紧空间与度量空间的共同推广. 仿紧性与紧空间的积是仿紧的(定理 5.4.2)，仿紧空间与度量空间的积怎样？答案是否定的，见下面的例.

例 5.4.3(Michael[1963]) 存在着 T_2 遗传性仿紧空间与某度量空间的积不是正规的，从而不是仿紧的.

取闭区间$[0,1]$，其中有理点集记作 Q，无理点集记作 I. 对$[0,1]$除赋以通常拓扑外，更规定 I 中的每一点是开的. 这样得到的拓扑空间记作 X. 显然 X 是正则的. 下证 X 是遗传仿紧的.

设 $\mathscr{U}$是 X 的开覆盖. 存在 $\mathscr{U}$的可数子族 $\mathscr{U}'$覆盖Q. 则

$$\mathscr{U}'\cup\{\{x\}:x\in X-\mathscr{U}'^*\}$$

是 σ 离散开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 以上证法对 X 的任何子空间成立，故由定理 5.1.5 知 X 是遗传仿紧的. I 是离散空间，显然可度量化. 下证 $X\times I$ 不是正规的.

取 $X\times I$ 中的不相交闭集$A=Q\times I, B=\{(x,x):x\in I\}$只要证包含 B 的任何开集U，有 $A\cap\overline{U}\neq\varnothing$. 对每一 $n\in N$，置

$$I_n=\left\{x:x\in I,\{x\}\times S\left(x,\frac{1}{n}\right)\subset U\right\},$$

这里 $S\left(x,\frac{1}{n}\right)=\left\{y:y\in I,\rho(x,y)<\frac{1}{n}\right\}$，$\rho$ 是数直线上的距离. 显然，$I=\bigcup_{n\in N}I_n$，因无理数集 I 是第二纲的(例 1.3.15)，不能表示为 F_σ 集，$I\neq\bigcup_{n\in N}\overline{I}_n$. 至少有某一 $\overline{I}_n$ 包含$[0,1]$中的有理点，即 $Q\cap\overline{I}_n\neq\varnothing$. 取点 $x\in Q\cap\overline{I}_n$ 及$y\in I$ 使$\rho(x,y)<\frac{1}{2n}$. 由于$(x,y)\in A$，只要证对 x 在X 中的任一邻域V 及y 在I 中的任一邻域W，有$(V\times W)\cap U\neq\varnothing$.

由 X 中拓扑，$V=G\cup K$，这里 G 是通常拓扑的开集，$K\subset I$，点 $x\in \mathbf{Q}$，是有理点，x 不属于 K 而属于 G，而 x 又属于 $\bar{I}_n$，所以存在 $x'\in G\cap I_n$ 使 $\rho(x',x)<\frac{1}{2n}$，所以 $(x',y)\in V\times W$，且

$$\rho(x',y)\leqslant\rho(x',x)+\rho(x,y)<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}.$$

由 I_n 的构造知 $(x',y)\in U$. 所以 $(V\times W)\cap U\neq\varnothing$. 证完.

注记 上例中的空间 X 不是 Lindelöf 的，为了得到 Lindelöf 性可把 $[0,1]$ 中的无理点集 I 用 $[0,1]$ 中的某不可数集 I' 代替，这不可数集 I' 的紧集都是可数集. 这样的空间是存在的，见 Kuratowski[1958]p. 422. 然后让这不可数集的每一点是开的. 这样得到的空间 X' 是 Lindelöf 的. 至于原来 X 的遗传仿紧性仍保持，相应的积空间 $X'\times I'$ 仍不是正规的. 这里的空间 X,X' 都不是完备正规的，因为 Michael[1953]证明：完备正规的仿紧空间与度量空间的积是完备正规仿紧空间(习题 5.19). 由推论 5.3.6 知 X,X' 都是 totally 正规空间. 所以 totally 正规性严格弱于完备正规性.

上例非常有用，上述构造方法更可借鉴. 通常把数直线 R 除通常拓扑外更赋以每一无理点是开集所得拓扑空间称为 **Michael 直线**(Michael Line).

下面利用积空间给出仿紧空间的(外部的)刻画.

定理 5.4.4(Tamano[1960,1962]) 设 X 是 Tychonoff 空间. 则下列论断等价：

(i) 空间 X 是仿紧空间，

(ii) 对空间 X 的每一紧化 cX，积 $X\times cX$ 是正规空间，

(iii) 积空间 $X\times\beta X$ 是正规空间，

(iv) 存在空间 X 的一个紧化 cX 使积空间 $X\times cX$ 是正规空间.

证明 (i)→(ii)由定理 5.4.1 得到. (ii)→(iii)，(iii)→(iv)是显然的. 下证(iv)→(i).

设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的开覆盖. 对每一 $\alpha\in A$，取空间 cX 的

开集 V_α 使 $U_\alpha = X\cap V_\alpha$. 由于 $Z = cX - \bigcup_{\alpha\in A}V_\alpha$ 是 $cX - X$ 的紧子集，对角线 $\Delta\subset X\times X$ 及 $X\times Z$ 是正规空间 $X\times cX$ 的不相交的一对闭子集. 所以存在由 $X\times cX$ 到 $I=[0,1]$ 上的连续函数 $f: X\times cX\to I$ 使 $f(\Delta)\subset\{0\}$，$f(X\times Z)\subset\{1\}$. 置

$$\rho(x,y) = \sup_{z\in cX}|f(x,z) - f(y,z)|. \tag{1}$$

ρ 是集 X 上的拟度量. 下面证明由 ρ 导出的拓扑 $\mathscr{T}_1$ 粗于 X 上的原来拓扑 $\mathscr{T}_2$，即 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$.

对固定的 $x_0\in X$，每一 $x'\in cx$ 及 $\varepsilon>0$，由 f 的连续性，存在 (x_0,x') 在 $X\times cX$ 中的开集 $G\times H$ 使 $f(G\times H)\subset(f(x_0,x')-\varepsilon/2, f(x_0,x')+\varepsilon/2)$，即 $\delta(f(G\times H))<\varepsilon$（$\delta(D)$ 表示 $D\subset I$ 的直径）. G 开于 X，H 开于 cX. cX 紧，有限个 H 盖住 cX，故有

$$\delta(f(G_i\times H_i)) < \varepsilon, i = 1,2,\cdots,k, \tag{2}$$

使 $\{x_0\}\times cX\subset\bigcup_{i=1}^k(G_i\times H_i)$，$x_0\in\bigcap_{i=1}^k G_i$. 对每一 $x\in\bigcap_{i=1}^k G_i$，由(1)，$\rho(x,x_0)=\sup_{x'\in cX}|f(x,x')-f(x_0,x')|$. 对任一 $x'\in cX$，$x'\in$ 某 H_i，由(2)知 $\rho(x,x_0)<\varepsilon$. 从而 $\bigcap_{i=1}^k G_i\subset S_\varepsilon(x_0)$. 这说明关于 ρ 的所有开球属于 $\mathscr{T}_2$，所以 $\mathscr{T}_1\subset\mathscr{T}_2$.

由 Stone 定理 4.3.4 后的注记，集 X 的覆盖 $\{S_{\frac{1}{2}}(x)\}_{x\in X}$ 具有一个关于拓扑 $\mathscr{T}_1$ 的局部有限开加细覆盖 $\{W_\beta\}_{\beta\in B}$，也是关于空间 X 上的原来拓扑 $\mathscr{T}_2$ 的局部有限开加细覆盖. 对每一 $x\in X$，$y\in S_{\frac{1}{2}}(x)$，有

$$F(x,y) = |f(x,y) - f(y,y)|\leqslant\rho(x,y) < \frac{1}{2}.$$

所以对任何 $y\in\overline{S_{\frac{1}{2}}(x)}$，$f(x,y)\leqslant\frac{1}{2}$（这里“—”是指关于 cX 的闭包）. 对每一 $z\in Z$，由于 $f(x,z)=1$，故有 $\overline{W_\beta}\cap z=\varnothing$，$\beta\in B$. $\overline{W_\beta}$ 是紧集，存在有限集 $A(\beta)\subset A$，使 $W_\beta\subset\bigcup_{\alpha\in A(\beta)}U_\beta$. 容易验证 $\{W_\beta\cap U_\alpha:\beta\in B, \alpha\in A(\beta)\}$ 是空间 X 的局部有限开覆盖加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. X 是仿紧空间. 证完.

由定理 5.4.1 及定理 5.4.4 得下述定理.

定理 5.4.5 空间 X 是 T_2 仿紧空间当且仅当对每一 T_2 紧空间 Y,积空间 $X\times Y$ 是正规空间.

§5. 仿紧空间的和定理

关于仿紧空间的和定理,下面先给出拓扑和的情况(读者可回忆第三章引入的拓扑和概念(定义 3.1.21).

定理 5.5.1 设 $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是一族不相交的拓扑空间,每一 X_α $(\alpha\in A)$ 是仿紧空间,则拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是拓扑和 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的开覆盖.对每一 $\alpha\in A$,$\{X_\alpha\cap U_\beta\}_{\beta\in B}$ 是仿紧子空间 X_α 的开覆盖,从而存在 X_α 的局部有限开覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$ 加细 $\{X_\alpha\cap U_\beta\}_{\beta\in B}$. 置 $\mathscr{V}=\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{V}_\alpha$,则 $\mathscr{V}$ 是 $\bigoplus_{\alpha\in A}X_\alpha$ 的局部有限开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 证完.

上述定理 5.5.1 可简单地叙述为"仿紧性关于拓扑和保持的". 下面先直接证明仿紧性满足局部有限闭和定理,然后证明一般性定理,以资比较.

定理 5.5.2 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖,每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 是 X 的正则(T_2)仿紧子空间,则 X 是正则(T_2)仿紧空间.

证明 设 $X=\bigcup_{\alpha\in A}F_\alpha$,每一 F_α 是正则仿紧闭子集. 集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 局部有限. 对每一 $x\in X$ 及闭集 F,$x\notin F$,置 $U(x)=X-\bigcup\{F_\alpha: x\notin F_\alpha\}$,$V(x)=\bigcup\{F_\alpha: x\in F_\alpha\}=\bigcup_{i=1}^n F_{\alpha_i}$. 由集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的局部有限性知 $U(x)$ 是包含 x 的开集,$V(x)$ 是闭集,$U(x)\subset V(x)$.

因每一 F_α 是正则的,x 属于有限个 $F_{\alpha_i}(i\leqslant n)$,故对每 $i\leqslant n$,存在 x 的开邻域 $\bigcup_i(x)$ 使 $\overline{\bigcup_i(x)\cap F_{\alpha_i}}\cap F=\varnothing$. 置 $W(x)=U(x)\cap(\bigcap_{i=1}^n U_i(x))$,$W(x)$ 是 x 的开邻域,并有

$$\overline{W(x)}\cap F\subset\overline{V(x)\cap(\bigcap_{i=1}^n U_i(x))}\cap F$$
$$\subset\overline{\bigcup_{i=1}^n(F_{\alpha_i}\cap U_i(x))}\cap F=\varnothing.$$

所以 X 是正则空间.

设 $\mathscr{U}$ 是 X 的任一开覆盖. $\mathscr{U}$ 中的元(开集)与 F_α 的交形成子空间 F_α 的开覆盖 $\mathscr{U}_\alpha$. 因 F_α 是仿紧的,存在关于 F_α 的局部有限覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$ 加细 $\mathscr{U}_\alpha$. 因 F_α 闭,集族 $\mathscr{V}_\alpha$ 在 X 中局部有限(定理 5.3.2 后的注记). 置 $\mathscr{V}=\bigcup_{\alpha\in A}\mathscr{V}_\alpha$, $\mathscr{V}$ 覆盖 X,加细 $\mathscr{U}$. 由 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 的局部有限性,容易验证 $\mathscr{V}$ 是局部有限的. 因 X 是正则的. 由定理 5.1.1 知 X 是仿紧的. 证完.

上述定理 5.5.2 可简单地叙述为"正则(T_2)仿紧性满足**局部有限闭和定理**".

现证明下列一般性定理,从而定理 5.5.2 可作为它的特例.

定理 5.5.3 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的,

(ii) $\mathscr{P}$ 关于有限对一闭映射保持的.

则 $\mathscr{P}$ 满足**局部有限闭和定理**.

证明 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖,每一闭集 F_α $(\alpha\in A)$ 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$. 对每一 $\alpha\in A$,设 F'_α 同胚于 F_α, $f_\alpha: F'_\alpha\to F_\alpha$ 是同胚映射. 置 $X^* = \bigoplus_{\alpha\in A}F'_\alpha$,定义 X^* 到 X 上的映射 f 如下:对每一 $x\in X^*$, $f(x)=f_\alpha(x)$,如 $x\in F'_\alpha$. 由(i)知空间 X^* 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$. 由于局部有限集族是点有限的(每一点 x 属于有限个 F_α), f 是有限对一的连续映射. 下证 f 是闭映射.

设 E^* 是空间 X^* 的闭集. $E^* = \bigcup_{\alpha\in A}(E^*\cap F'_\alpha)$, $E^*\cap F'_\alpha$ 闭于 $F'_\alpha(\alpha\in A)$. 置 $f(E^*)=E$. 因 f_α 是 F'_α 到 F_α 上的同胚映射,容易证明 $f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)=E\cap F_\alpha$,且 $E\cap F_\alpha$ 闭于 F_α. F_α 是闭集. $E\cap F_\alpha$ 是空间 X 的闭集. 现在要证明

$$f(E^*) = \bigcup_{\alpha\in A}(f_\alpha(E^*\cap F'_\alpha)) = \bigcup_{\alpha\in A}(E\cap F_\alpha)$$

是闭集. 因为 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是局部有限的, $\{(E\cap F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 也是局部有限的,从而是闭包保持的. 所以 $\bigcup_{\alpha\in A}(E\cap F_\alpha)$ 是闭集(定义 5.1.11),即 $f(E^*)$ 是闭集. 到此证明了 f 是 X^* 到 X 上的有限对一闭映射. 由(ii), X 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$,即 $\mathscr{P}$ 满足局部有限闭和定

理. 证完.

由定理 5.5.1 及推论 5.2.6 仿紧性满足定理 5.5.3 的条件(i)及(ii),故有下述定理.

定理 5.5.4 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$是空间 X 的局部有限闭覆盖,每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$是 X 的仿紧子空间,则 X 是仿紧空间.

注记 考察定理 5.5.3 在证明$\bigcup_{\alpha\in A}(E\cap F_\alpha)$是闭集时,利用集族$\{(E\cap F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$的闭包保持性.如果在证明开始时就把$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$的局部有限性减弱为闭包保持性,能否得到$\{(E\cap F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$的闭包保持性?一般说,设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$是闭包保持的.对每一 $\alpha\in A$ 任取$H_\alpha\subset F_\alpha$,$\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$未必是闭包保持的.见下面的例.

例 5.5.5 取数轴上的闭区间:$[0,1]$,$\left[0,\frac{1}{2}\right]$,…,$\left[0,\frac{1}{n}\right]$,….显然$\left\{\left[0,\frac{1}{n}\right]\right\}_{n\in N}$是闭包保持的.如取$\{1\}\subset[0,1]$,$\left\{\frac{1}{2}\right\}\subset\left[0,\frac{1}{2}\right]$,…,$\left\{\frac{1}{n}\right\}\subset\left[0,\frac{1}{n}\right]$,…,则$\left\{\left\{\frac{1}{n}\right\}\right\}_{n\in N}$不是闭包保持的.

我们可以把一般性定理 5.5.3 中的$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$的"局部有限"减弱为"遗传闭包保持",则可得$\{(E\cap F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$的闭包保持性,从而证明 f 是闭映射.这样可得又一一般性定理如下.

定理 5.5.6 设拓扑属性 $\mathscr{P}$满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$关于拓扑和保持的,

(ii) $\mathscr{P}$关于闭映射保持的.

则 $\mathscr{P}$满足**遗传闭包保持闭和定理**.

容易验证 T_2(正则)仿紧性关于拓扑和保持的,由定理 5.2.1,T_2(正则)仿紧性关于闭映射保持的,故由定理 5.5.6 得下述定理.

定理 5.5.7 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$是空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖,每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$是 X 的 T_2(正则)仿紧子空间,则 X 是 T_2(正则)仿紧空间.

上述定理 5.5.7 可简单地叙述为:"T_2(正则)仿紧性满足遗传闭包保持闭和定理".

下面再引入两个类似于定理 5.5.3、定理 5.5.6 的一般性定理以备后面引用.它们都联系着映射与和定理,放在这里引入可资比较.

关于"局部有限闭和定理"(记作($\sum$))及"遗传性闭包保持闭和定理"(记作($\sum'$))的具体内容分别详见定理 5.5.3 及定理 5.5.6.如果定理 5.5.6 中的遗传性闭包保持闭覆盖同时又是点可数的(即空间 X 的每一点仅属于这闭覆盖中可数个闭集),则相应的定理称为"**点可数遗传闭包保持闭和定理**"(记作($\sum^*$)).(注意:点有限的遗传性闭包保持闭覆盖就是局部有限闭覆盖).空间 X 的闭集 F 称为**正则闭集**(regular closed set),如果 $F=\overline{\mathrm{Int}F}$.易知 F 是正则闭集当且仅当 F 是某一开集的闭包.如果局部有限闭和定理中闭覆盖的所有闭集都是正则闭集,则称为"**局部有限正则闭和定理**"(记作($\sum^0$)).映射 $f:X\to Y$ 称为**可数对一的**,如果对每一 $y\in Y$,$f^{-1}(y)$是可数集;称为**拟开的**,如果对 X 中任一开集 U,$\mathrm{Int}f(U)$不空.

定理 5.5.8(高国士[1986a]) 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的,

(ii) $\mathscr{P}$ 关于可数对一闭映射保持的.

则 $\mathscr{P}$ 满足**点可数遗传闭包保持闭和定理**.

证明 证明同定理 5.5.3.

定理 5.5.9(高国士[1983]) 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持的,

(ii) $\mathscr{P}$ 关于拟开的,有限对一闭映射保持的.

则 $\mathscr{P}$ 满足**局部有限正则闭和定理**.

证明 证法同定理 5.5.3.当证明了 $f:X^*\to X$ 是有限对一闭映射后,为了证明 f 是拟开的,只要把定理 5.5.3 中的闭集 F_α 看作正则闭集,看作是某一开集 U_α 的闭包,即 $F_\alpha=\overline{U_\alpha}$.由拓扑和的定义,要证明 f 是拟开的,只要证明每一关于 F'_α 的不空开集 E

$(\subset F'_\alpha)$的象 $f(E)$的内核不空. 因 $F_\alpha: F'_\alpha \to \overline{U}_\alpha$ 是同胚映射, $f_\alpha(E)$开于 $\overline{U}_\alpha$. 存在开集 G 使$f_\alpha(E)=G\cap\overline{U}_\alpha$. 设 $x\in f_\alpha(E)\subset G$, 存在 x 的开邻域$V(x)\subset G$. 因 $x\in f_\alpha(E)\subset\overline{U}_\alpha$, $V(x)\cap U_\alpha\neq\varnothing$. 由于 $V(x)\cap U\subset f_\alpha(E)$, 所以 $\mathrm{Int} f_\alpha(E)\neq\varnothing$. 因 $E\subset F_\alpha$, $f(E)=f_\alpha(E)$. 到此证明了 f 是拟开的. 由(ii), X 具有拓扑属性 $\mathscr{P}$, 即 $\mathscr{P}$满足局部有限正则闭和定理. 证完.

综观上面四个一般性定理,比较它们的条件与结论(条件(i)是相同的,略去)如下:

$$(\Sigma')\Rightarrow(\Sigma^*)\Rightarrow(\Sigma)\Rightarrow(\Sigma^0).$$

拟开,有限对一闭映射⇒有限对一闭映射⇒可数对一闭映射⇒闭映射.

定理5.5.8适用于不能为闭映射保持而能为闭 Lindelöf 映射保持的空间类;定理5.5.9适用于不能为完备映射保持而能为拟开、完备映射保持的空间类.

上述一般性定理5.5.3的证明中的空间 X 如设定为 T_1 空间,可以得到下面一般性定理5.5.12. 为此,先给出下述引理.

引理 5.5.10 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$T_1$空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖,K 是空间X 的可数紧子集,则 K 为有限个 F_α 覆盖.

证明 设不然,任何有限个 F_α 不能覆盖K. 设 $K\cap F_{\alpha_1}\neq\varnothing$, 取 $x_1\in K\cap F_{\alpha_1}$. $K-F_{\alpha_1}$不是有限集,存在 F_{α_2}使$(K-F_{\alpha_1})\cap F_{\alpha_2}\neq\varnothing$, 取 $x_2\in(K-F_{\alpha_1})\cap F_{\alpha_2}$. 依次可取得 $x_n\in(K-\bigcup_{i<n}F_i)\cap F_{\alpha_n}$, $n\in N$. 得无限集$\{x_n:n\in N\}\subset K$, 且 $x_n\in F_{\alpha_n}$, $n\in N$. 由于$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$是遗传闭包保持的,且 X 是 T_1 空间, $\{x_n:n\in N\}$的任何子集是闭的, $\{x_n:n\in N\}$无聚点. 这和 K 是可数紧集矛盾. 证完.

定义 5.5.11 空间 X 到空间Y 的映射$f:X\to Y$ 称为**紧覆盖**(Compact-covering), 如果对 Y 中的每一紧集K 存在X 中的紧集 C 使$f(C)=K$; f 称为 **k 映射**, 如果对 y 中的每一紧集K, $f^{-1}(K)$是 X 中的紧集. 显然 k 映射是紧覆盖映射. 且易证完备映射是 k 映射(习题3.31). 故有

完备映射$\longrightarrow k$ 映射$\longrightarrow$紧覆盖映射

把所考察的空间限制在满足 T_1 公理的情况下，有下述一般性定理.

定理 5.5.12(林寿[1990a]) 设拓扑属性 $\mathscr{P}$ 满足下列两条件:

(i) $\mathscr{P}$ 关于拓扑和保持，

(ii) $\mathscr{P}$ 关于(可数对一)闭、紧覆盖映射保持.

则 $\mathscr{P}$ 满足(点可数)遗传性闭包保持闭和定理.

证明 关于 $f:X^*\to X$ 是闭映射的证明同定理 5.5.3. 只要证明 f 是紧覆盖的. 设 K 是 T_1 空间 X 的紧集. 由引理 5.5.10, $K\subset\bigcup_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}$. 每一 $K\cap F_{\alpha_i}$ 是 X 中的紧集. 置 $C=\bigoplus_{i=1}^{n}K\cap F'_{\alpha_i}$ (F'_{α_i} 是 F_{α_i} 的同胚像). 则 C 是 X^* 中的紧集且 $f(C)=K$. 所以 f 是紧覆盖映射. 证完.

上述一般性定理 5.5.13 适用于不能为闭映射保持而能为闭、紧覆盖映射保持的某些 T_1 空间类.

前面叙述了局部有限闭和定理及遗传闭包保持和定理，为什么不考察闭包保持闭和定理? 虽然在一般性定理 5.5.3 后的注记中指出把“遗传闭包保持”减弱为“闭包保持”不能完成定理 5.5.3 的证明，但不足以说明上述问题. 下面的例回答了这问题.

例 5.5.13(Potoczny[1972]) 存在一个非仿紧空间，它具有由紧集组成的闭包保持闭覆盖.

设 $X=\{(x,y):x,y>0$ 且 $y\geqslant x\}$(实数平面上第一象限内对角线 $y=x$ 及其左上部分). 对 $x\neq y$, 规定 $\{(x,y)\}$ 是开的，对每一 $(x,x)\in X$, 置

$$V_x=\{(x,y):(x,y)\in X \text{ 且 } y>x\}\cup\{(y,x):(y,x)\in X \text{ 且 } y<x\} \tag{1}$$

(这是通过点 (x,x) 的铅垂的与水平的两射线). 规定点 (x,x) 的邻域基 $\{(x,x)\}\cup\{V_x-F:F$ 是有限集$\}$. 置 $\Delta=\{(x,x):x>0\}$, 对每一 $(x,y)\in X-\Delta$. 置

$$F(x,y)=\{(x,x),(x,y),(y,y)\}. \tag{2}$$

则 $F(x,y)$是闭集,$\mathscr{F}=\{F(x,y):(x,y)\in X-\Delta\}$是由“三点集”组成的 X 的闭覆盖.下证$\mathscr{F}$是闭包保持的.任取$\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$.设点$(x,y)\in(\bigcup\mathscr{F}')^-$.如$(x,y)\in X-\Delta$,则$(x,y)$是孤立点,显然$(x,y)\in\bigcup\mathscr{F}'$.如$(x,y)=(x,x)\in\Delta$,$(x,x)$的邻域$\{(x,x)\}\cup\{V_x-F\}$与$\bigcup\mathscr{F}'$相交.从而存在$F(a,b)\in\mathscr{F}'$使$(\{(x,x)\}\cup\{V_x-F\})\cap F(a,b)\neq\varnothing$.由(2),$F(a,b)=\{(a,a,),(a,b),(b,b)\}$.由(1)可知$(x,x)=(a,a)$或$(x,x)=(b,b)$.所以$(x,x)\in F(a,b)\in\mathscr{F}'$,$(x,x)\in\bigcup\mathscr{F}'$,$\mathscr{F}$是闭包保持的.

空间 X 显然是 T_2 的,但不是正规的,从而不是仿紧的(关于 X 不是正规的证明与例 2.2.13 或例 2.3.10 中相应证明相似).

注记 后来 Potoczny[1973]继续研究这类空间(具有由紧集组成的闭包保持闭覆盖的空间类),得到在假定这空间是集态正规情况下则是弱仿紧的,从而是仿紧的(见后面定理 6.1.14 及注记).1975 年 Potoczny-Junnila 证明了不必附加集态正规性,这类空间是弱仿紧的(包括例 5.5.13).

§6. 可数仿紧空间

下面将叙述可数仿紧空间作为仿紧空间在可数覆盖情况的推广,这相当于可数紧空间(定理 3.5.1)作为紧空间的推广.T_2 仿紧空间是正规的(定理 3.5.20),但我们不能期望可数仿紧空间有类似情况,因为 T_2 可数紧空间未必是正规(见引理 3.5.19 后的注记(i)).因此常用正规可数仿紧性使相应于仿紧情况的 T_2 仿紧性,满足较强的分离公理.

定义 5.6.1 拓扑空间 X 称为**可数仿紧的**(countably paracompact),如果 X 的每一可数开覆盖具有局部有限的开加细覆盖.

显然,仿紧空间是可数仿紧空间,可数紧空间是可数仿紧空间.

定理 5.6.2(Ishikawa[1955])下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间,

(ii) 对 X 的每一可数开覆盖$\{U_i\}_{i\in N}$存在局部有限的可数开覆盖$\{V_i\}_{i\in N}$使$V_i\subset U_i, i\in N$,

(iii) 对 X 的每一递增的开覆盖$\{W_i\}_{i\in N}$,存在 X 的闭集序列$\{F_i\}_{i\in N}$使$F_i\subset W_i(i\in N)$且$\bigcup_{i\in N}\mathrm{Int}F_i=X$,

(iv) 对 X 的每一递减闭集序列$\{F_i\}_{i\in N}$满足$\bigcap_{i\in N}F_i=\varnothing$,存在 X 的开集序列$\{W_i\}_{i\in N}$使$F_i\subset W_i(i\in N)$且$\bigcap_{i\in N}\overline{W}_i=\varnothing$.

证明 (i)⇒(ii). 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$是可数仿紧空间的可数开覆盖. 由(i)存在局部有限开覆盖 $\mathscr{V}=\{V\}$加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $V\in\mathscr{V}$选定一个自然数 $i(V)$使 $V\subset U_{i(V)}$. 置 $V_i=\bigcup\{V: V\in\mathscr{V}, i(V)=i\}$. $\{V_i\}_{i\in N}$仍局部有限. 显然加细 $\mathscr{U}$且 $V_i\subset U_i, i\in N$.

(ii)⇒(i)显然. 下证(ii)⇒(iii).

(ii)⇒(iii). 设$\{W_i\}_{i\in N}$是 X 的递增开覆盖. 由(ii)存在 X 的局部有限开覆盖$\{V_i\}_{i\in N}$使$V_i\subset W_i, i\in N$. 置 $F_i=X-\bigcup_{j>i}V_i$, F_i 是闭集且$F_i\subset\bigcup_{j\leqslant i}V_j$. 由于$\bigcup_{j\leqslant i}V_j\subset\bigcup_{j\leqslant i}W_j=W_i$,所以 $F_i\subset W_i, i\in N$. 因$\{V_i\}_{i\in N}$是局部有限的,对每一 $x\in X$ 存在 x 的开邻域$U(x)$使 $U(x)$仅包含在有限个 V_j 的并内. 设这些 V_j 的附标最大者为 i,则 $U(x)\subset F_i$, $\bigcup_{i\in N}\mathrm{Int}F_i=X$.

(iii)⇔(iv). 由 de Morgon 公式. 下证(iii)⇒(ii).

(iii)⇒(ii). 设$\{U_i\}_{i\in N}$是空间 X 的可数开覆盖. 置 $W_i=\bigcup_{j\leqslant i}U_j$,则$\{W_i\}_{i\in N}$是递增开覆盖. 由(iii)存在闭集序列$\{F_i\}_{i\in N}$使$F_i\subset W_i(i\in N)$且$\bigcup_{i\in N}\mathrm{Int}F_i=X$. 置 $V_i=U_i-\bigcup_{j<i}F_j$,开集 $V_i\subset U_i, i\in N$. 由于$\bigcup_{j<i}F_j\subset\bigcup_{j<i}W_j=\bigcup_{j<i}U_j$,从而 $V_i=U_i-\bigcup_{j<i}F_j\supset U_i-\bigcup_{j<i}U_j$,所以$\{V_i\}_{i\in N}$是 X 的开覆盖. 由于$\bigcup_{j\in N}\mathrm{Int}F_i=X$,对每一 $x\in X$, $x\in$ 某 $\mathrm{Int}F_j$. 在 $i>j$ 时 x 的开邻域 $\mathrm{Int}F_j$ 与所有的 V_i 不交. 故$\{V_i\}_{i\in N}$是局部有限的且 $V_i\subset U_i, i\in N$. 证完.

注记 定理 5.6.2(iii)中的闭集序列$\{F_i\}_{i\in N}$可作为递增的

(可以$\bigcup_{j\leqslant i}F_j$ 代 F_i),(iv)中的开集序列$\{W_i\}_{i\in N}$可作为递减的(可以$\bigcap_{j\leqslant i}W_j$ 代 W_i).

推论 5.6.3(Dowker[1951]) 正规空间 X 是可数仿紧的当且仅当对 X 的每一递减闭集序列$\{F_i\}_{i\in N}$满足$\bigcap_{i\in N}F_i=\varnothing$. 存在 X 的开集序列$\{W_i\}_{i\in N}$使$F_i\subset W_i(i\in N)$且$\bigcap_{i\in N}W_i=\varnothing$.

引理 5.6.4 设$\{U_i\}_{i\in N}$是正规空间 X 的可数开覆盖,则下列论断等价:

(i) $\{U_i\}_{i\in N}$具有局部有限开加细覆盖,

(ii) $\{U_i\}_{i\in N}$具有点有限开加细覆盖,

(iii) $\{U_i\}_{i\in N}$具有开加细覆盖. $\{V_i\}_{i\in N}$使$\overline{V}_i\subset U_i, i\in N$,

(iv) $\{U\}_{i\in N}$具有闭加细覆盖. $\{F_i\}_{i\in N}$使$F_i\subset U_i, i\in N$,

(v) $\{U_i\}_{i\in N}$具有开 F_σ 加细覆盖. $\{A_i\}_{i\in N}$使$A_i\subset U_i, i\in N$,

(vi) $\{U_i\}_{i\in N}$具有可数闭加细覆盖. $\{F_j\}_{j\in N}$.

证明 (i)⇒(ii)显然. (ii)⇒(iii),利用正规性及引理 4.4.3 即得证. (iii)⇒(i)只要置 $W_i=U_i-\bigcup_{j<i}\overline{V}_j$, $\{W_i\}_{i\in N}$即所要求的. (iii)⇒(iv)显然.

(iv)⇒(iii),(iv)⇒(v)均由正规性得到. (v)⇒(iv)可置 $A_i=\bigcup_{j\in N}F_{i,j}(i\in N)$, $\{F_{i,j}\}_{i,j\in N}$即所求.

(vi)⇒(i). 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$是$X$ 的开覆盖, $\{F_j\}_{j\in N}$是X 的闭覆盖加细 $\mathscr{U}$. 令 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$ 中元之包含 F_j 者为 U_j, $\mathscr{U}'=\{U_j\}_{j\in N}$. 这里是取 $\mathscr{U}$中的元作重新排列:可能有些元不取,有些元取有限次,甚至可数次. $\mathscr{U}'=\{U_j\}_{j\in N}$仍是$X$ 的开覆盖、闭覆盖$\{F_j\}_{j\in N}$加细 $\mathscr{U}'$且 $F_j\subset U_j, j\in N$. 这是(iv)的情况,由于已证(iv)⇒(iii)⇒(i), $\mathscr{U}'$具有局部有限开加细覆盖 $\mathscr{V}$, 显然 $\mathscr{V}$ 也加细 $\mathscr{U}$. 证完.

推论 5.6.5 完备正规空间是可数仿紧空间.

定理 5.6.6(Mansfield[1957]) 设 X 是正规空间,则下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间,

(ii) X 的每一可数开覆盖具有可数局部有限闭加细覆盖,

(iii) X 的每一可数开覆盖具有可数闭包保持闭加细覆盖，

(iv) X 的每一可数开覆盖具有 σ 离散闭加细覆盖，

(v) X 的每一可数开覆盖具有 σ 局部有限闭加细覆盖，

(vi) X 的每一可数开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖.

证明 (i)⇒(ii). 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$是正规可数仿紧空间 X 的可数开覆盖. 由定理 5.6.2 的(i)⇒(ii)，存在局部有限加细开覆盖 $\{V_i\}_{i\in N}$，使 $V_i\subset U_i, i\in N$. 由正规性及引理 4.4.3 即得证. (ii)⇒(iii)⇒(iv)⇒(v)⇒(vi)显然. 下证(vi)⇒(i).

(vi)⇒(i). 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$是 X 的可数开覆盖. 由(vi)存在 σ 闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{i\in N}\mathscr{V}_i$，每一 $\mathscr{V}_i(i\in N)$是闭包保持的. 置 $F_{i,j}=\bigcup\{V: V\in\mathscr{V}_j, V\subset U_i\}$. $F_{i,j}$ 是闭集，且 $F_{i,j}\subset U_i$. $\{F_{i,j}\}_{i,j\in N}$是 X 的可数闭覆盖加细$\{U_i\}_{i\in N}$. 由引理 5.6.4 得证. 证完.

定理 5.6.7 设 X 是正规空间，则下列论断等价：

(i) X 是可数仿紧空间，

(ii) X 的每一可数开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部有限的单位分解从属于 $\mathscr{U}$，

(iii) X 的每一可数开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有单位分解从属于 $\mathscr{U}$.

证明 类似仿紧性的定理 5.1.19. 读者自证.

下面是映射定理. 先引入一反例说明闭映射不能保持可数仿紧性.

例 5.6.8(Burke[1980]) 对每一 $k\in N$，置

$$X_k=[0,\omega_1)\times[0,\omega_1)\times\{k\},\Delta_k=\{(\alpha,\alpha,k):\alpha\in\omega_1\}.$$

设空间 X 是这些空间 $X_k(k\in N)$的拓扑和，Y 是把$\bigcup_{k\in N}\Delta_k$ 中的所有点等同于一点 p 而得到的商空间. 易知相应的商映射是闭映射. 由于每一 X_k 是可数仿紧空间(习题 3.10，定理 3.5.8，习题 3.23)，从而易知 X 是可数仿紧空间. 下面验证 Y 不是可数仿紧空间. 置

$$U_0=\bigcup_{k\in N}\{[0,\omega_1)\times[0,\omega_1)\times\{k\}\},$$

$$U_k=\{(\alpha,\beta,k):(\alpha,\beta,k)\in X_k,\alpha\neq\beta\},k\in N.$$

$\{f(U_0), f(U_1), f(U_2), \cdots, f(U_k), \cdots\}$形成空间 Y 的可数开覆盖.如果 Y 是可数仿紧的话,由定理 5.6.2 的(ii),存在局部有限可数开覆盖 $\mathscr{V}=\{V_i\}_{i\in N}$使 $V_i \subset f(U_i)$, $i=0,1,2,\cdots$. 设 W 是点 p 的开邻域,W 仅与 $\mathscr{V}$中有限个 V_i 相交.故必存在 $V_k \in \mathscr{V}$使 $W \cap V_k = \varnothing$,从而 $f^{-1}(W) \cap X_k$ 及$f^{-1}(V_k)$是空间 X_k 的分别包含闭集Δ_k 及闭集$[0,\omega_1)\times[0,\omega_1)\times\{k\}$不相交的邻域,这是不可能的(见习题 3.11 及提示).

由于双商闭映射保持仿紧性(定理 5.2.3),易知有下述定理.

定理 5.6.9(葛英[1992]) 设 $f: X \to Y$ 是由可数仿紧空间X 到空间 Y 上的可数双商映射.则 Y 是可数仿紧空间.

证明从略.

推论 5.6.10 准完备映射保持可数仿紧性.

推论 5.6.11(Henriksen-Isbell[1958]) 完备映射保持可数仿紧性.

在正规可数仿紧情况,有下述定理.

定理 5.6.12 闭映射保持正规可数仿紧性.

证明 由定理 5.6.5 的(iii)得证.证完.

关于可数仿紧空间在某些映射下的逆象有下述定理.

定理 5.6.13 设 $f: X \to Y$ 是空间X 到可数仿紧空间 Y 上的准完备映射,则 X 是可数仿紧空间(可简记为准完备映射逆保持可数仿紧性).

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$是$X$ 的可数开覆盖.γ 是有限个自然数所成集,Γ 是所有 γ 所成集.显然 Γ 是可数集族.对每一 $\gamma \in \Gamma$,置 $U_\gamma = \bigcup_{i\in\gamma} U_i$.对每一 $y \in Y$,由于 $f^{-1}(y)$的可数紧性,$f^{-1}(y)$包含于某一 U_γ 内.置 $E_\gamma = \{y \in Y : f^{-1}(y) \subset U_\gamma\}$, $\gamma \in \Gamma$,则 $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma = Y$, $U_\gamma \supset f^{-1}(E_\gamma)$.由定理 1.5.8,存在开集 V_γ 使

$$f^{-1}(E_\gamma) \subset V_\gamma \subset U_\gamma \text{ 及 } V_\gamma = f^{-1}(f(V_\gamma)),$$

且 $f(V_\gamma)$是 Y 中开集.从而$\{f(V_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$是 Y 的可数开覆盖.由 Y 的可数仿紧性,存在局部有限可数开覆盖$\{W_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$加细$\{f$

$(V_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$(不失一般性,作为具有相同指标集),使每一 $\gamma\in\Gamma$, $W_\gamma\subset f(V_\gamma)$. 易知$\{f^{-1}(W_\gamma)\}_{\gamma\in\Gamma}$是 X 的局部有限开覆盖,且 $f^{-1}(W_\gamma)\subset f^{-1}(f(V_\gamma))=V_\gamma\subset U_\gamma$. 置 $O_{\gamma,i}=f^{-1}(W_\gamma)\cap U_i$,$(i\in\gamma)$,则$\{O_{\gamma,i}\}_{i\in\gamma,\gamma\in\Gamma}$是加细 $\mathscr{U}$ 的局部有限开覆盖. 证完.

这定理的证法对一些可数情况的覆盖性质有普遍性.

定理 5.6.13 连同推论 5.6.10 得下述定理.

定理 5.6.14 空间 X 是可数仿紧空间当且仅当 X 在准完备映射下的象是可数仿紧空间.

关于可数仿紧空间的遗传性,和仿紧空间一样,也具有闭遗传性及开遗传性⟶遗传性(证明同仿紧性情况).

定理 5.6.15 正规可数仿紧空间的 F_σ 子空间是正规可数仿紧的.

证明 类似于仿紧性情况(定理 5.3.2),利用定理 5.6.6 的(ii),(v)及习题 2.10. 证完.

定理 5.6.16 可数仿紧空间与紧空间的积是可数仿紧空间.

证明 类似于仿紧性情况(定理 5.4.1),利用推论 5.6.11. 证完.

下面叙述关于可数仿紧空间的一个重要定理,它是由 C. H. Dowker 在 1951 年给出的. 证法非常巧妙.

引理 5.6.17(Dowker[1951]) 正规可数仿紧空间 X 与紧度量空间 Y 的积空间是正规空间.

证明 设 A, B 是积空间 $X\times Y$ 的两个不相交的闭集. 设$\{G_i\}_{i\in N}$是空间 Y 的可数基(定理 4.1.14),γ 是由有限个自然数所成集,置 $H_\gamma=\bigcup_{i\in\gamma}G_i$. 设 A_x 是 Y 中的闭集满足$\{x\}\times A_x=(\{x\}\times Y)\cap A$,同样,定义 B_x 满足$\{x\}\times B_x=(\{x\}\times Y)\cap B$. 置

$$U_\gamma=\{x:A_x\subset H_\gamma \text{ 且 } \overline{H}_\gamma\subset Y-B_x\}$$

下证 U_γ 是开集. 设 $x_0\in X$ 使 $A_{x_0}\subset H_\gamma$,则对每一 $y\in Y-H_\gamma$, $(x_0,y)\notin A$. 因 A 是空间 $X\times Y$ 中的闭集,存在(x_0,y)的开邻域 $N\times M$ 与 A 不交,对每一 $y\in Y-H_\gamma$ 成立. $y-H_\gamma$ 闭,是空间 Y

的紧子空间，所以有限个开集 M 覆盖 $y-H_\gamma$. 设 N_{x_0} 是相应于有限个 M 的有限个开集 N 的交，则 $N_{x_0}\times(y-H_\gamma)\cap A_{x_0}=\varnothing$. 所以，如果 $x\in N_{x_0}$, $A_x\subset H_\gamma$. 这说明集 $\{x: A_x\subset H_\gamma\}$ 是 X 中的开集. 同理可证集 $\{x: \overline{H}_\gamma\subset y-B_x\}$ 也是 X 中的开集. U_γ 是这两个开集的交，也是开集.

设 Γ 是所有 γ 所成集(即有限个自然数所成集的集)，显然 Γ 是可数集. 下证 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的开覆盖. 对每一 $x\in X$, $A_x\cap B_x=\varnothing$. 由空间 Y 的正规性，存在开集 G 使 $A_x\subset G$, $\overline{G}\subset y-B_x$. 因 $\{G_i\}_{i\in N}$ 是 Y 的可数基，G 可取作某些 G_i 的并，由于 A_x 是 Y 中的紧集，故 G 可取作有限个 G_i 的并，记 $H_\gamma=\bigcup_{i\in\gamma}G_i$，故有 $A_x\subset H_\gamma$, $\overline{H}_\gamma\subset y-B_x$. 由 U_γ 的定义，$x\in U_\gamma$. 故 $\{U_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的可数开覆盖.

因 X 是正规可数仿紧的，存在 X 的局部有限开覆盖 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 使 $\overline{V}_\gamma\subset U_\gamma$, $\gamma\in\Gamma$(定理 5.6.2 之(ii)及引理 4.4.3). 置 $U=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(V_\gamma\times H_\gamma)$, U 是空间 $X\times Y$ 的开集，下证 $A\subset U$ 及 $\overline{U}\cap B=\varnothing$. 从而 $X\times Y$ 是正规的，引理得证.

对每一点 $(x,y)\in A$，因 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是 X 的覆盖. $x\in$ 某 $V_\gamma\subset U_\gamma$，则 $y\in A_\gamma\subset H_\gamma$，所以 $(x,y)\in V_\gamma\times H_\gamma$. 从而 $A\subset U$. 由于 $\{V_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 是局部有限的，对每一 $x\in X$，存在 x 的开邻域 $G(x)$ 仅与有限个 V_γ 相交. 从而作为点 (x,y) 的开邻域 $G(x)\times Y$ 也仅与有限个 $V_\gamma\times H_\gamma$ 相交. 所以 $\{V_\gamma\times H_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ 也是局部有限的，从而是闭包保持的. 所以 $\overline{U}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\overline{V_\gamma\times H_\gamma})$. 由于 $\overline{V_\gamma\times H_\gamma}=\overline{V}_\gamma\times\overline{H}_\gamma$，故有 $\overline{U}=\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(\overline{V}_\gamma\times\overline{H}_\gamma)\subset\bigcup_{\gamma\in\Gamma}(U_\gamma\times\overline{H}_\gamma)$. 容易证明，对每一 $\gamma\in\Gamma$, $(U_\gamma\times\overline{H}_\gamma)\cap B=\varnothing$，所以 $\overline{U}\cap B=\varnothing$. 结合前证 $A\subset U$ 知 $X\times Y$ 是正规空间. 证完.

注记 在上述引理 5.6.17 的证明中只用了空间 Y 的正规性. 具有可数基及紧性，并没有用到 Y 的度量性质. E. Michael [1963]曾构造了一个遗传仿紧且 Lindelöf 的空间 X 及可分度量空间(从而具有可数基) Y，而 $X\times Y$ 不是正规的(例 5.4.3 及其

后的注记).由此可见上述证明中紧性的重要性.

定理 5.6.18(Dowker[1951]) 空间 X 是正规可数仿紧空间当且仅当 X 与单位闭区间 $I=[0,1]$ 的积空间是正规空间.

证明 必要性由引理 5.6.17 得到,因为闭区间 I 是紧度量空间.下证充分性.设 $X\times I$ 是正规的,X 同胚于 $X\times I$ 的闭子空间 $X\times\{0\}$,从而是正规的.下证 X 是可数仿紧的.

设 $\{F_i\}_{i\in N}$ 是 X 中的递减闭集序列且 $\bigcap_{i\in N}F_i=\varnothing$.由于 $[0,1/i)$ 是 $I=[0,1]$ 中的开集,置 $W_i=(X-F_i)\times\left[0,\frac{1}{i}\right]$,$W_i$ 是 $X\times I$ 中的开集,从而 $A=X\times I-\bigcup_{i\in N}W_i$ 是闭集.对 $x\in X$,如 $x\in$ 某 $X-F_i$,则 $(x,0)\in W_i$.所以 $(x,0)\notin A$.所以置 $B=X\times\{0\}$,则 A,B 是不相交的闭集.由 $X\times I$ 的正规性,存在不相交的开集 U,V 使 $A\subset U,B\subset V$.置 $G_i=\left\{x:\left(x,\frac{1}{i}\right)\in U\right\}$,则 G_i 是开集.对每一 $x\in X$,$(x,0)\in B$.所以当 i 充分大时 $\left(x,\frac{1}{i}\right)\in V$,从而 $\left(x,\frac{1}{i}\right)\notin U$.所以 $\bigcap_{i\in N}G_i=\varnothing$.设 $x\in F_i$.则当 $j\leqslant i$ 时,$F_i\subset F_j$.从而 $x\notin X-F_j$;当 $j\geqslant i$ 时,$\frac{1}{i}\notin\left[0,\frac{1}{j}\right)$.由于 $W_j=(X-F_j)\times\left[0,\frac{1}{j}\right)$,所以对任何 $j\in N$,$\left(x,\frac{1}{i}\right)\notin W_j$.从而 $\left(x,\frac{1}{i}\right)\notin\bigcup_{j\in N}W_j$.所以 $\left(x,\frac{1}{i}\right)\in A\subset U$,$x\in G_i$.这证明了 $F_i\subset G_i$,$i\in N$,由推论 5.6.3,X 是可数仿紧空间.证完.

关于可数仿紧空间的和定理.容易验证可数仿紧空间关于拓扑和保持的且为完备映射所保持(推论 5.6.11),故由一般性定理 5.5.3 知可数仿紧性满足局部有限闭和定理,即下定理所述.

定理 5.6.19 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖,每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 是 X 的可数仿紧闭子空间,则 X 是可数仿紧空间.

容易验证正规性关于拓扑和保持的.而正规可数仿紧性为闭映射所保持(定理 5.6.12),故由一般性定理 5.5.6 知正规可数仿

紧性满足遗传性闭包保持闭和定理,即下定理所述.

定理 5.6.20 设$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$是空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖,每一 $F_\alpha(\alpha\in A)$是 X 的正规可数仿紧子空间,则 X 是正规可数仿紧空间.

此外,在 X 是正规空间情况,可数仿紧性也满足可数闭和定理,即下定理所述.

定理 5.6.21(Morita[1962]) 设$\{F_j\}_{j\in N}$是正规空间 X 的可数闭覆盖.每一闭集 $F_j(j\in N)$是 X 的可数仿紧子空间,则 X 是可数仿紧空间.

证明 设$\mathscr{U}=\{U_i\}_{i\in N}$是正规空间 X 的可数开覆盖.对每一 $i\in N$,$\{U_i\cap F_j\}_{i\in N}$是正规可数仿紧闭子空间 F_j 的可数开覆盖.由引理 5.6.4 的(vi)存在可数闭覆盖$\{H_{j,m}\}_{m\in N}$加细$\{U_i\cap F_j\}_{i\in N}$.从而$\bigcup_{j\in N}\{\{H_{j,m}\}_{m\in N}\}$是 X 的可数闭覆盖加细$\mathscr{U}$.由引理 5.6.4 的(vi)知 X 是可数仿紧的.证完.

可数仿紧空间是 Dowker[1951]及 Katětov[1951]互相独立地引进的.Dowker[1951]中曾考察一简单的例.取实数集 $R=(-\infty,+\infty)$,规定拓扑为:$\varnothing$,R 及$\{(-\infty,a):a\in R\}$.这空间的可数开覆盖$\mathscr{U}=\{(-\infty,i)\}_{i\in N}$不具有局部有限开加细覆盖,所以这空间不是可数仿紧的.由于这空间不存在不相交的闭集,自然满足 T_4 分离公理,但是不是 T_1 的,从而不是正规的.所以 Dowker 提出:"是否存在正规而不是可数仿紧的空间?"(这类空间后来称为 **Dowker 空间**),此后 20 年内许多拓扑学者致力于此.后为 M. E. Rudin[1971]正面解决.她构造了一个集态正规而不是可数仿紧的空间.由于论证较长,这里不予转载.

习 题 五

5.1 证明每一可数开覆盖具有局部有限加细覆盖.

5.2 定理 5.1.1 中的正则性可改为满足 T_4 分离公理(未必是 T_1 的)结论仍成立.

5.3 证明满正规空间是正规的.

5.4 Lindelöf 空间的每一局部有限集族是可数的. 如果 T_2 仿紧空间包含一个 Lindelöf 稠子空间,则是 Lindelöf 的. 从而 T_2 可分仿紧空间是 Lindelöf 的.

5.5 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的闭包保持集族, F 是闭集,则集族 $\{U\cap F: U\in \mathscr{U}\}$ 是闭包保持的. 证明点有限的闭包保持闭集族是局部有限的.

5.6 设空间 X 的每一开覆盖具有垫状加细覆盖,则 X 满足 T_4 分离公理.

5.7 设 f 是 X 到 Y 上的连续闭映射. 如 $\mathscr{U}$ 是 X 中的闭包保持闭集族则 $f(\mathscr{U})$ 是 Y 中的闭包保持闭集族. 如 $\mathscr{V}$ 是 Y 中的闭包保持闭集族则 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 是 X 中的闭包保持闭集族.

5.8 每一星加细(点星加细)开覆盖是垫状加细覆盖.

5.9 集态正规性是闭遗传的,能为闭映射保持(不能为开映射保持);关于拓扑和保持.

5.10 T_2(正则)空间 X 是仿紧(Lindelöf)空间当且仅当对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$,存在 X 到某(可分)度量空间上的连续映射 f,及 Y 的某开覆盖 $\mathscr{V}$ 使 $f^{-1}(\mathscr{V})$ 加细 $\mathscr{U}$

5.11 (陈必胜[1985a]) 空间 X 的子集 A 称为 **α 仿紧的**,如对由 X 中开集组成的 A 的任一覆盖 $\mathscr{U}$ 存在 $\mathscr{U}$ 的加细开集族 $\mathscr{V}$ 覆盖 A 且在 X 中是局部有限的. 证明设 f 是 X 到仿紧空间 Y 上的闭映射且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 X 的 α 仿紧子集,则 X 是仿紧空间. 给出空间 X 的仿紧子集但不是 α 仿紧的.

5.12 (高国士[1980]) 设 X 是集态正规空间, f 是 X 到 T_1 仿紧空间 Y 上的连续闭映射,且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是仿紧的,则 X 是仿紧空间. 构造一个非正规的完全正则空间(从而不是仿紧的) X 到仿紧空间 Y 上的闭映射使对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是仿紧的(这说明上述习题中的集态正规不能减弱为完全正则. 比较习题 5.11).

5.13 Lindelöf 空间的 F_σ 子空间是 Lindelöf 的.

5.14 空间 X 的子集 A 称为**广义 F_σ 集**(generalized F_σ-set),如果每一包含 A 的开集包含着一 F_σ 集. 这 F_σ 集包含着 A. 证明仿紧空间的广义 F_σ 集是仿紧的.

5.15 证明正则 Lindelöf 空间是遗传 Lindelöf 空间当且仅当 X 是完备正规空间.

5.16 (恽自求[1981]) 给出反例说明定理 5.3.5 中的条件"遗传闭包保持"不能改为"闭包保持".

5.17 直接证明(不利用映射)仿紧空间与紧空间的积是仿紧空间.

5.18 证明例 5.4.3 后注记中的空间 X' 是 Lindelöf 空间.

5.19 完备空间与度量空间的积是完备的.完备正规仿紧空间与度量空间的积是完备正规仿紧的.

5.20 证明正则 Lindelöf 空间与正则 σ 紧空间的积是 Lindelöf 空间.

5.21 证明点可数的遗传闭包保持闭集族就是局部可数的遗传闭包保持闭集族.

5.22 (Hodel,[1969]) 设 Q 是满足局部有限闭和定理且具有闭遗传性的空间类.证明:

(i) 设 $\mathscr{V}$ 是空间 X 的 σ 局部有限开覆盖且 $\mathscr{V}$ 中每一开集的闭包属于 Q,则 X 属于 Q,

(ii) 设 $\mathscr{V}$ 是正则空间 X 的 σ 局部有限开覆盖,$\mathscr{V}$ 中每一开集属于 Q 且具有紧的边缘,则 X 属于 Q.

5.23 证明仿紧且局部可度量化的空间可度量化.

5.24 证明可数仿紧空间的每一 σ 局部有限开覆盖具有局部有限开加细覆盖.

5.25 证明第一可数的可数仿紧空间是正则的.

5.26 设 X 是正规空间,则下列论断等价:

(i) X 是可数仿紧空间,

(ii) X 的每一可数开覆盖具有局部有限开 F_σ 加细覆盖,

(iii) X 的每一可数开覆盖具有 σ 离散开 F_σ 加细覆盖,

(iv) X 的每一可数开覆盖具有 σ 局部有限开 F_σ 加细覆盖.

5.27 (高国士[1980]) 设 f 是正规空间 X 到 T_1 仿紧空间 Y 上的闭映射,且对每一 $y\in Y$,$f^{-1}(y)$ 是可数仿紧的,则 X 是可数仿紧空间.

5.28 证明 Niemytzki 半平面(例 2.2.13)及 Sorgenfiey 直线与自身的积(例 2.3.10)都不是可数仿紧的.Michael 直线与直线上无理数子空间的积也不是可数仿紧的.

5.29 (Morita[1962]) 空间 X 称为 **m 仿紧**的,如果每一势 $\leqslant m$ 的开覆盖具有局部有限开加细覆盖.当 $m=\aleph_0$ 时,则是可数仿紧的.当对任何基数 m 都是 m 仿紧的,则是仿紧的.证明下列论断等价:

(i) X 是 m 仿紧的且满足 T_4 分离公理,

(ii) X 的每一势$\leqslant m$ 的开覆盖具有星加细开覆盖，

(iii) X 的每一势$\leqslant m$ 的开覆盖具有局部有限闭加细覆盖，

(iv) X 的每一势$\leqslant m$ 的开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖，

(v) X 的每一势$\leqslant m$ 的开覆盖具有σ 局部有限开加细覆盖且是可数仿紧的.

5.30 (高国士[1979c]) 设空间 X 是由既开且闭的仿紧(正规可数仿紧)子集组成的集族的并，且这集族在 X 中是σ 局部有限的，则 X 是仿紧(可数仿紧)空间.

5.31 (高国士[1979c]) 设 X 是集态正规空间，并且是可数个仿紧(可数仿紧)闭子空间的并，则 X 是仿紧(可数仿紧)空间.

第六章　其他覆盖性质

在这一章里将叙述除仿紧性外的其他覆盖性质，包括次仿紧性、弱仿紧性、强仿紧性、*meso* 紧性、*ortho* 紧性、θ 加细性、弱 θ 加细性、弱$\bar{\theta}$加细性等及由国内学者刘应明引入的拟仿紧性，研究它们的性质及相互间关系.

§1.　定义、刻画及相互间关系

定义 6.1.1　空间 X 称为**次仿紧**的(subparacompact)，如果 X 的每一开覆盖具有 σ 离散闭加细覆盖.

定理 6.1.2 (Burke[1969a], Junnila[1978b])　下列论断等价：

(i) X 是次仿紧空间，

(ii) X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限闭加细覆盖，

(iii) X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖，

(iv) X 的每一开覆盖具有 σ 垫状加细覆盖，

(v) 对 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$，存在开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 使对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{St}(x,\mathscr{V}_n)$包含在 $\mathscr{U}$ 中某一开集 U 内，

(vi) 对 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$，存在开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 使对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=1$ (这里 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=|\{V:V\in\mathscr{V}_n, x\in V\}|$).

证明　(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv)是显然的.(iv)⇒(i)的证明异常复杂，参见 Junnila[1978]或 Burke[1984]p.360.(vi)⇒(v)显然.下证(i)⇒(vi)及(v)⇒(iv).

(i)⇒(vi).设 $\mathscr{U}$是空间 X 的开覆盖，具有 σ 离散闭加细覆盖 $\{\mathscr{F}_n\}_{n\in N}$，每一 $\mathscr{F}_n$ 是离散的，对每一 $F\in\mathscr{F}_n$ 取 $U_F\in\mathscr{U}$ 使 $F\subset U_F$.

置

$$V_F = U_F - \bigcup \{F' \in \mathscr{F}_n : F' \neq F\},$$

$$\mathscr{V}_n = \{V_F : F \in \mathscr{F}_n\} \bigcup \{U - \bigcup \mathscr{F}_n : U \in \mathscr{U}\}.$$

则 V_F 是开集,它包含 F 且与 $\mathscr{F}_n$ 中其他闭集不交,所以 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 满足(vi)的所有条件.

(v)⇒(iv). 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 的开覆盖,$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 是 $\mathscr{U}$ 的开加细覆盖序列,满足(v)中的条件. 对每一 $n\in N, \alpha\in A$ 置

$$C(\alpha, n) = \{x : \mathrm{st}(x, \mathscr{V}_n) \subset U_\alpha\}, \tag{1}$$

则 $\bigcup_{n\in N}\{C(\alpha,n):\alpha\in A\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的加细覆盖. 下证对每一 $n\in N$, $\{C(\alpha,n):\alpha\in A\}$ 垫状于 $\mathscr{U}$, 即证明对 $A'\subset A$,

$$\overline{\bigcup \{C(\alpha, n) : \alpha \in A'\}} \subset \bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A'\}. \tag{2}$$

设 $z\notin\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in A'\}$. 对每一 $y\in C(\alpha,n), \alpha\in A'$, 由(1), $\mathrm{st}(y, \mathscr{V}_n)\subset U_\alpha$. 所以 $z\notin\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)$, 从而 $y\notin\mathrm{st}(z,\mathscr{V}_n)$. 这说明存在 z 的开邻域 $\mathrm{st}(z,\mathscr{V}_n)$ 与所有 $C(\alpha,n)\,(\alpha\in A')$ 相交, 也就是 $z\notin \overline{\bigcup\{C(\alpha,n):\alpha\in A'\}}$. (2)得证. 证完.

注记 在空间 X 是正则情况,定理 6.1.2 中的"闭"可以去掉. 从而知 T_2 仿紧空间是次仿紧空间. 在第四章曾引入可展空间(定义 4.4.7),由定理 6.1.2 的(v)知可展空间是次仿紧空间.

定义 6.1.3 空间 X 称为**弱仿紧**,或**点态仿紧**,或 **meta 紧**(weak paracompact, 或 pointwise paracompact, 或 metacompact)**空间**,如果 X 的每一开覆盖具有**点有限**(point finite)开加细覆盖. 空间 X 称为**弱 θ 加细**(weak θ-refinable)**空间**,如果 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$, 对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$ 使 $1\leqslant ord(x,\mathscr{V}_n)<\omega$; 如果上述条件加强为每一 $\mathscr{V}_{n(n\in N)}$ 都是覆盖,则称 X 是 **θ 加细**(θ-refinable)**空间**,上述覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 称为 X 的 **θ 加细序列**.

定义 6.1.4 空间 X 的集族 $\mathscr{U}$ 称为**紧有限的**(compact-finite),如果 X 的每一紧集 K 仅与 $\mathscr{U}$ 中有限个元相交. 空间 X 称为 **meso 紧**(mesocompact)**空间**,如果 X 的每一开覆盖具有紧有限的

开加细覆盖.

注记 上述定义无非是把弱仿紧(meta 紧)定义中的点换为紧集.容易证明局部有限集族是紧有限的,更由定义 6.1.3 有:仿紧→meso 紧→弱仿紧→θ 加细→弱 θ 加细.

比较次仿紧空间的刻划(定义 6.1.2 的(vi))及 θ 加细空间的定义(定义 6.1.3)知次仿紧→θ 加细.故 θ 加细是次仿紧与弱仿紧的共同推广.

下面关于弱仿紧、meso 紧、θ 加细空间的刻画(定理 6.1.5, 6.1.6,6.1.7)尽量选取比较常用而有效的,并写成便于比较的形式且可与仿紧空间(不加分离公理)的刻画(定理 5.1.21,5.1.22)参看.它们的证明都有一定的难度,读者可参阅所示文献.

定理 6.1.5 (Worrell [1966a], [1966b], Junnila [1978b], [1979a],[1979b]) 下列论断等价:

(i) X 是弱仿紧(即 meta 紧)空间,

(ii) X 的每一定向开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖,

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有点有限的加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x\in X$, $x\in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{V}))$,

(iv) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x\in X$,存在有限族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$,如 $x\in V\in\mathscr{V}$,则 V 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元 U 内.

证略.

定理 6.1.6 (高国士-吴利生[1983]) 下列论断等价:

(i) X 是 meso 紧空间,

(ii) X 的每一定向开覆盖具有闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{F}$,使由 X 的所有紧集组成集族加细 $\mathscr{F}$,

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有紧有限的加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x\in X$, $x\in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{V}))$,

(iv) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一紧集 $K\subset X$,存在有限族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$,如紧集 K 使 $K\cap V\neq\Phi$, $V\in\mathscr{V}$,则 V 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元 U 内.

证明从略.

定理 6.1.7(Worrell[1967],Junnila[1978b])　下列论断等价:

(i) X 是 θ 加细空间,

(ii) X 的每一定向开覆盖具有 σ 闭包保持闭加细覆盖,

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 使对每一 $x\in X$,存在 $n\in N$ 及有限族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$,如 $x\in V\in\mathscr{V}_n$,则 V 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元 U 内.

证明从略.

问题　定理 6.1.5(弱仿紧)的(ii)及定理 6.1.7(θ 加细)的(ii)中的"闭包保持"能否代以"垫状"?

这问题尚未解决.部分的正面答案有 Gruenhage[1986]附加条件"局部紧"及江守礼[1988]附加条件"orth 紧"(定义 6.1.19).

关于弱 θ 加细空间的下述刻画与上述 meta 紧,meso 紧,θ 加细的刻画不能相比,这是由于弱 θ 加细定义中的 $\mathscr{V}_n$ 不一定是覆盖.

定理 6.1.8(Bennett-Lutzer[1972])　下列论断等价:

(i) X 是弱 θ 加细空间,

(ii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$ 使 $\text{ord}(x,\mathscr{W}_n)=1$,

(iii) X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有加细覆盖 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{A}_n$ 使每一 $\mathscr{A}_n$ 是关于 $\cup\mathscr{A}_n$ 的离散集族.

证明　(i)⇒(ii).设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,由(i),$\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$,对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$,使 $1\leqslant\text{ord}(x,\mathscr{V}_n)<\omega$.对每一 $x\in X$ 及 $n\in N$,置 $W(x,n)=\bigcap\{V\in\mathscr{V}_n:x\in V\}$,由于这里是有限交,故 $W(x,n)$ 是开集.置 $\mathscr{W}(n,k)=\{W(x,n):\text{ord}(x,\mathscr{V}_n)=k\}$.则 $\bigcup\{\mathscr{W}(n,k):n,k\in N\}$ 满足(ii),这是因为 $\text{ord}(x,\mathscr{V}_n)=k$ 时,$\text{ord}(x,\mathscr{W}(n,k))=1$.

(ii)⇒(i)显然.下证(ii)⇒(iii).设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,由(ii),$\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 如(ii)所述.置 $X(n)=\{x:\text{ord}(x,\mathscr{W}_n)=1\}$ 及 $\mathscr{A}(n)=\{W\cap X(n):W\in\mathscr{W}_n\}$.$W\cap X(n)$ 是关于

$X(n)=\bigcup\mathscr{A}_n$ 的开集,且易知 $\mathscr{A}(n)$ 中任意二个元不相交,所以 $\mathscr{A}_n$ 是关于 $\bigcup\mathscr{A}_n$ 的离散集族. 由于 $X=\bigcup_{n\in N}X(n)$,所以 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{A}_n$ 是 X 的覆盖.

(iii)⇒(ii). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,由(iii),$\mathscr{U}$ 具有加细覆盖 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{A}_n$ 使每一 $\mathscr{A}_n$ 是关于 $\bigcup\mathscr{A}_n(n\in N)$ 离散的. 对每一 $A\in\mathscr{A}$,取 $U(A)\in\mathscr{U}$ 使 $A\subset U(A)$. 对每一 $A\in\mathscr{A}_n$,由 $\mathscr{A}_n$ 关于 $\bigcup\mathscr{A}_n$ 的离散性,存在开于 $\mathscr{A}_n$ 的,从而存在空间 X 的开集 $G(A,n)\supset A$ 且与 $\mathscr{A}_n$ 中其他元 $A'(A'\neq A)$ 不相交,置 $W(A,n)=G(A,n)\cap U(A)$,$\mathscr{W}_n=\{W(A,n):A\in\mathscr{A}_n\}$,则 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 满足(ii)的条件. 证完.

前面看到(定义 5.3.4 后的注记):次仿紧→θ 加细→弱 θ 加细,下面证明弱 θ 加细+完备性→次仿紧.

定理 6.1.9(Bennett-Lutzer[1972]) 完备的弱 θ 加细空间是次仿紧空间.

证明 设 X 是完备的弱 θ 加细空间,$\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,由定理 6.1.8 的(ii),$\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$. 对每一 $x\in X$,存在 $n\in N$,$\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)=1$. 对每一 $n\in N$,置 $G_n=\bigcup\mathscr{V}_n$. 由完备性,开集 G_n 可表示为 $G_n=\bigcup_{m\in N}F(n,m)$,这里 $F(n,m)$ 是闭集,不失一般性,可作为 $F(n,m)\subset F(n,m+1)$,$m\in N$. 对每一 $x\in X$,取 $U(x)\in\mathscr{U}$ 使 $x\in U(x)$. 对 $n,m\in N$,$x\in X-F(n,m)$,置

$$\begin{aligned}W(n,m,x)&=U(x)\cap(X-F(m,n))\\&=U(x)-F(m,n),\end{aligned}$$

$W(n,m,x)$ 是包含点 $x(x\in X-F(n,m))$ 的开集. 置

$$\mathscr{W}(n,m)=\mathscr{V}_n\cup\{W(n,m,x):x\in X-F(n,m)\}.$$

显然 $\mathscr{W}(n,m)$ 是 X 的开覆盖且加细 $\mathscr{U}$,下面证明 $\mathscr{W}=\bigcup_{n,m\in N}\mathscr{W}(n,m)$ 满足定理 5.3.2 的(vi),从而得证.

对每一 $x_0\in X$,由假设存在 $n_0\in N$ 使 $\mathrm{ord}(x_0,\mathscr{V}_{n_0})=1$. 因 $x_0\in G_{n_0}=\bigcup\mathscr{V}_{n_0}$,取 $m_0\in N$ 使 $x_0\in F(n_0,m_0)$. 从而取 $\mathscr{W}$ 中的开加

细覆盖

$$\mathscr{W}(n_0,m_0)=\mathscr{V}_{n_0}\cup\{W(n_0,m_0,x):x\in X-F(n_0,m_0)\}.$$

易知 $x_0\notin W(n_0,m_0,x)$，当 $x\in X-F(n_0,m_0)$. 从而

$$\mathrm{ord}(x_0,\mathscr{W}(n_0,m_0))=\mathrm{ord}(x_0,\mathscr{V}_{n_0})=1.$$

由定理 6.1.2 知 X 是次仿紧空间. 证完.

1975 年 Smith 引入弱$\bar{\theta}$加细空间，严格地介于 θ 加细空间与弱 θ 加细空间(见定义 6.1.10 及定理 6.1.11)，即 θ 加细→弱$\bar{\theta}$加细→弱 θ 加细.

定义 6.1.10 空间 X 称为弱$\bar{\theta}$加细空间，如果 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$，使对每一 $x\in X$，存在 $n\in N$，$1\leqslant\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)<\omega$，且 $\{\bigcup\mathscr{V}_n:n\in N\}$ 是点有限的. 这一开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 称为弱$\bar{\theta}$覆盖.

显然，弱$\bar{\theta}$加细蕴含弱 θ 加细. 下证 θ 加细蕴含弱$\bar{\theta}$加细.

定理 6.1.11 (Smith[1975]) θ 加细空间是弱$\bar{\theta}$加细空间.

证明 设 X 是 θ 加细空间，$\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖，$\mathscr{U}$ 具有开加细覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$，$\mathscr{V}_n=\{V_\alpha:\alpha\in A_n\}$ 使对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$，$1\leqslant\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)<\omega$. 对每一 $i,j\in N$，置

$$F(i,j)=\{x:\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_i)\leqslant j\},$$

易证 $F(i,j)$ 是闭集. 对每一 $n\in N$，置

$$\mathscr{W}_n=\{V_\alpha-\bigcup_{k=1}^{n-1}F(k,n-k):\alpha\in A_n\}.$$

易知 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 是 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$，且对每一 $x\in X$ 存在 $n\in N$，$1\leqslant\mathrm{ord}(x,\mathscr{W}_n)<\omega$. 下证 $\{\bigcup\mathscr{W}_n:n\in N\}$ 是点有限的.

对每一 $x\in X$，取最小的自然数 l 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{W}_l)=m<\omega$，则 $x\in F(l,m)$，对于 $n>l+m$，$F(l,m)\subset F(l,n-l)$. 所以当 $n>l+m$ 时 x 不属于 $\mathscr{W}_n$ 中的任何元素. 证完.

定理 6.1.9 给出了次仿紧空间与弱 θ 加细空间的关系. 下述定理 6.1.14 给出仿紧空间与 θ 加细空间的关系. 先叙述两个引理.

引理 6.1.12 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族，对每一 $n\in N$，置 $F_n=\{x\in X:\mathrm{ord}(x,\mathscr{U})\leqslant n\}$ 及对每一 $x\in X$ 置 $W_x=\bigcap\{U\in\mathscr{U}:x$

$\in U\}$,则有

(i) 每一 F_n 是闭集,

(ii) $\{W_x\cap(F_n-F_{n-1}):x\in F_n-F_{n-1}\}$ 是关于 F_n-F_{n-1} 的离散闭集族,

(iii) 如 V 是 X 中的开集且 $F_{n-1}\subset V$,则 $\{W_x\cap(F_n-V):x\in F_n-V\}$ 是 X 中的离散闭集族覆盖 F_n-V.

这引理的证明留给读者.

引理 6.1.13 设 X 是集态正规空间,$\mathscr{U}$ 是 X 中的开集族覆盖闭集 A,且在 A 上是点有限的,则存在 X 中的 σ 离散开集族覆盖 A,加细 $\mathscr{U}$.

证明 对每一 $n\in N$,置 $F_n=\{x\in X:\text{ord}(x,\mathscr{U})\leqslant n\}$ 及对每一 $x\in X$,置 $W_x=\cap\{U\in\mathscr{U}:x\in U\}$. 由引理 6.1.12,集族 $\{W_x\cap F_1:x\in F_1\}$ 是 X 中的离散闭集族覆盖闭集 F_1. 由集态正规性,存在离散开集族 $\mathscr{V}_1$ 覆盖 F_1 且加细 $\mathscr{U}$. 下面归纳地继续下去. 如已构造了覆盖 F_n 的开集族 $\bigcup_{k=1}^{n}\mathscr{V}_k$ 加细 $\mathscr{U}$,且每一 $\mathscr{V}_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 是离散的,置 $G_n=\bigcup\{V:V\in\mathscr{V}_k,1\leqslant k\leqslant n\}$,则 $F_n\subset G_n$. 由引理 6.1.12,$\{W_x\cap(F_{n+1}-G_n):x\in F_{n+1}-F_n\}$ 是离散闭集族,由集态正规性,存在离散开集族 $\mathscr{V}_{n+1}$ 覆盖 $F_{n+1}-F_n$ 加细 $\mathscr{U}$. 所以,可以对每一 $k\in N$,构造离散开集族 $\mathscr{V}_k$ 使 $\bigcup_{k\in N}\mathscr{V}_k$ 覆盖 A 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

定理 6.1.14(Worrell-Wicke[1965]) θ 加细的集态正规空间是仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 是加细 $\mathscr{U}$ 的 θ 序列. 对每一 $k\in N$,置 $A_{n,k}=\{x\in X:\text{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant k\}$. 则每一 $A_{n,k}$ 是闭集,且 $\mathscr{V}_n$ 在 $A_{n,k}$ 上是点有限的. 由引理 6.1.13,存在 σ 离散开集族 $\mathscr{W}_{n,k}$ 覆盖 $A_{n,k}$,加细 $\mathscr{V}_n$. 从而 $\bigcup\{\mathscr{W}_{n,k}:n,k\in N\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细覆盖. 由定理 5.1.5 得证. 证完.

注记 关于定理 6.1.14 是否可把 θ 加细减弱为弱 θ 加细,答案是否定的,见 De Caux[1976](或 Burke[1984a]).

下面我们借助于 Smith[1977]关于集态正规性的刻画,可进

一步推广定理 6.1.14.

定理 6.1.15 (Smith[1977]) 正规空间 X 是集态正规空间当且仅当每一弱$\overline{\theta}$覆盖具有局部有限开加细覆盖.

证明从略.

定理 6.1.16 弱$\overline{\theta}$加细的集态正规空间是仿紧空间.

证明 由弱$\overline{\theta}$加细的定义 6.1.10 及定理 6.1.15 的必要性即得证. 证完.

上面叙述了:弱 θ 加细 + 完备性→次仿紧(定理 6.1.9),

θ 加细 + 集态正规→仿紧(定理 6.1.14),

弱$\overline{\theta}$加细 + 集态正规→仿紧(定理 6.1.16).

下面是关于弱仿紧性(即 meta 紧性)方面的结果:θ 加细 + 点态集态正规→弱仿紧.

定义 6.1.17 空间 X 称为**点态集态正规**(pointwise collectionwise normal)**空间**,如果对空间的每一离散闭集族$\{F_\alpha:\alpha\in A\}$,存在点有限的开集族$\{G_\alpha:\alpha\in A\}$使 $F_\alpha\subset G_\alpha$,$(\alpha\in A)$,且对 $\alpha\neq\beta$,$F_\alpha\cap G_\beta=\varnothing$.

易知,弱仿紧空间(即点态仿紧空间)是点态集态正规空间(读者自证,习题 6.2).

定理 6.1.18(Boone[1973]) 空间 X 是弱仿紧空间当且仅当 X 是点态集态正规的 θ 加细空间.

证明从略,参见 Boone[1973].

定义 6.1.19 空间 X 称为 ortho **紧**(orthocompact)**空间**,如果 X 的每一开覆盖具有内核保持开加细覆盖.

由于点有限开集族是内核保持的(定义 5.1.22),故有:弱仿紧(即 meta 紧)→ortho 紧.

在这一节里叙述的许多覆盖性质(到此为止)都是弱于仿紧性的,它们间关系如下:

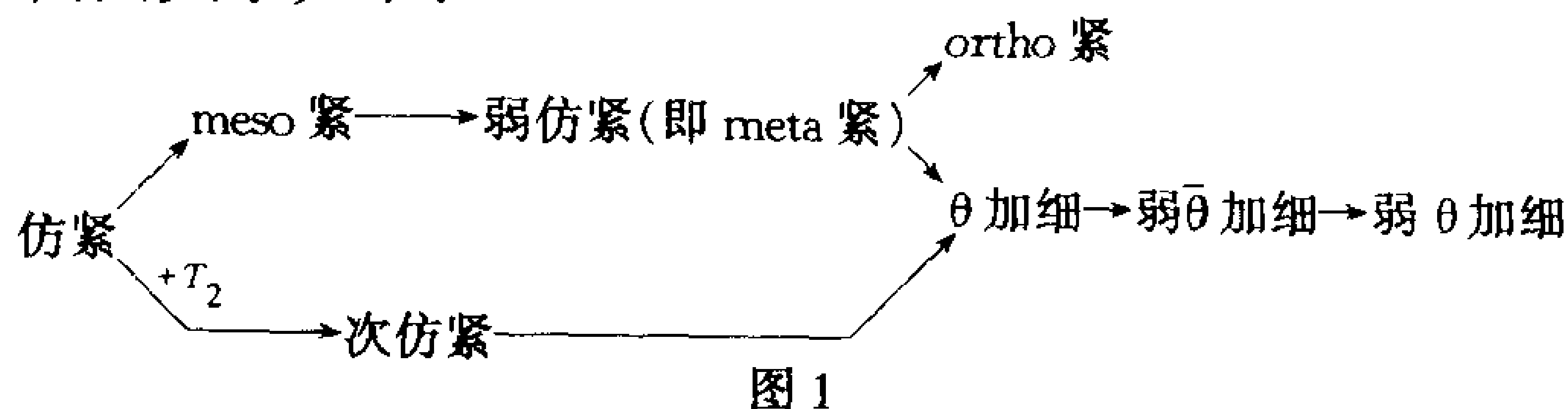


图 1

相反蕴含关系均不成立(参见 Burke[1984]及所引有关文献).

如果把仿紧性,弱仿紧性(即 meta 紧性)、θ 加细性、弱$\overline{\theta}$加细性、弱 θ 加细性中的局部有限、点有限性分别换为**局部可数**(locally countable)、**点可数**(point countable)**性**,则有下列一些覆盖性质.

定义 6.1.20 空间 X 称为**仿 Lindelöf**(paralindelöf)**空间**,如果 X 的每一开覆盖具有局部可数开加细覆盖;称为 **meta-Lindelöf 空间**,如果每一开覆盖具有点可数开加细覆盖;称为**弱 $\delta\theta$ 加细**(weak δθ-refinable **空间**),如果每一开覆盖具有开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$,使对每一 $x\in X$,存在 $n\in N$, $1\leqslant \mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant\omega$;如果上述条件加强为每一 $\mathscr{V}_n$ 是覆盖,则称为 **$\delta\theta$ 加细**(*δθ-refinable*)空间;如果对弱 $\delta\theta$ 加细加强为 $\{\bigcup\mathscr{V}_n: n\in N\}$ 是点有限的,则称为**弱 $\overline{\delta\theta}$加细**(weak $\overline{\delta\theta}$-refinable)**空间**.

上述空间间的关系有:

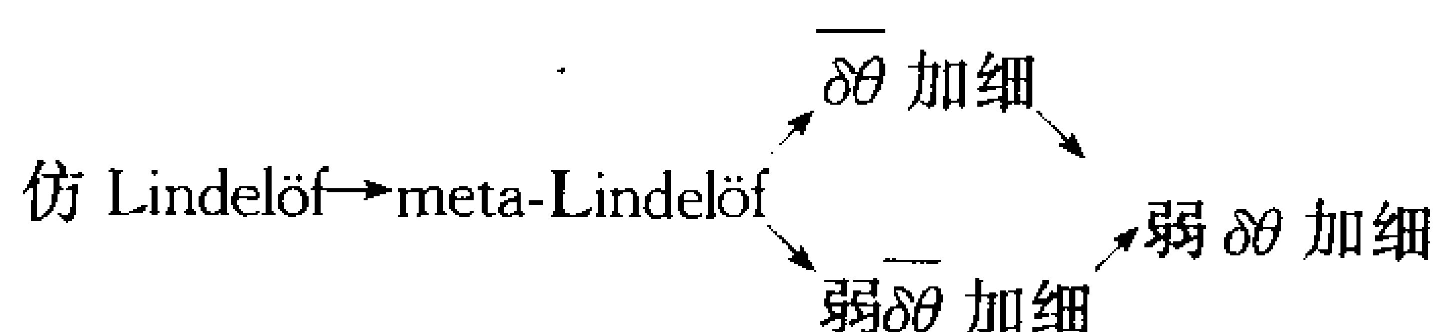


图 2

至于 $\delta\theta$ 加细与弱$\overline{\delta\theta}$加细是否有定理 6.1.11 的蕴含关系尚未解决(见 Smith[1976]或高国士[1989]).

关于图 2 中的覆盖性质,Burke[1980c]给出下述仿 Lindelöf 空间的有效刻画.

定理 6.1.21(Burke[1980c]) 空间 X 是仿 Lindelöf 空间当且仅当 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有局部可数加细覆盖 $\mathscr{V}$ 使对每一 $x\in X$, $x\in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{V}))$.

证明 必要性显然.下证充分性.设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖,由假设存在局部可数覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\mathscr{U}$.从而存在开覆盖 $\mathscr{W}$ 使每一 $W\in\mathscr{W}$, W 仅与 $\mathscr{V}$ 中可数个元相交.由假设,存在局部可数覆盖 $\mathscr{P}$ 加细 $\mathscr{W}$,且对每一 $x\in X$, $x\in\mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{P}))$.对每一 $V\in\mathscr{V}$,取 $U(V)\in\mathscr{U}$,使 $V\subset U(V)$.置 $G(V)=\mathrm{Int}(\mathrm{st}(V,\mathscr{P}))\cap U(V)$. $G(V)$是开

集,因对每一 $x\in V$, $x\in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(x,\mathscr{P}))$,所以 $V\subset \mathrm{Int}(\mathrm{st}(V,\mathscr{P}))$. 显然 $\mathscr{G}=\{G(V):V\in\mathscr{V}\}$ 是空间 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 下证 $\mathscr{G}$ 是局部可数的. 对每一 $x\in X$,因 $\mathscr{P}$ 是局部可数的,存在 x 的开邻域 $N(x)$ 仅与 $\mathscr{P}$ 中可数个元相交. 每一 $P\in\mathscr{P}$ 包含在某 $W\in\mathscr{W}$, W 仅与 $\mathscr{V}$ 中可数个元相交,所以 P 仅与 $\mathscr{V}$ 中可数个元相交. 由 $\mathrm{st}(V,\mathscr{P})$ 的定义,每一 $P\in\mathscr{P}$ 只能包含在 $\{\mathrm{st}(V,\mathscr{P}):V\in\mathscr{V}\}$ 的可数个 $\mathrm{st}(V,\mathscr{P})$ 内. 从而 $N(x)$ 与 $\mathscr{G}$ 中可数个元相交, $\mathscr{G}$ 是局部可数的. 证完.

下面叙述一个强于仿紧性的覆盖性质——强仿紧性. 这一覆盖性质比较特殊. 例如不能为度量空间所蕴含,不能为有限对一闭映射保持,不具有 F_σ 遗传性等.

定义 6.1.22 集族 $\mathscr{A}$ 称为**星有限的**(star-finite),如果对每一 $A\in\mathscr{A}$, $\{B\in\mathscr{A}: B\cap A\neq\varnothing\}$ 是有限的; 称为**星可数的**(star-countable),如果对每一 $A\in\mathscr{A}$, $\{B\in\mathscr{A}: B\cap A\neq\varnothing\}$ 是可数的. 空间 X 称为**强仿紧(strongly paracompact)空间**,如果 X 的每一开覆盖具有星有限的开加细覆盖.

显然星有限开覆盖是局部有限的,故强仿紧→仿紧. 相反蕴含关系不成立(存在非强仿紧的度量空间),见后面的例 6.2.10. 而由推论 6.1.26 知可分度量空间是强仿紧的.

在给出强仿紧空间的刻画(定理 6.1.25)以前,先给出二个引理.

引理 6.1.23 每一个星可数集族 $\mathscr{A}$ 可以表示为 $\mathscr{A}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$,每一 $\mathscr{B}_\alpha$ 是可数集族,且当 $\alpha\neq\beta$ 时, $(\bigcup\mathscr{B}_\alpha)\cap(\bigcup\mathscr{B}_\beta)=\varnothing$.

证明 对 $A,B\in\mathscr{A}$,称 $\mathscr{A}$ 的有限子集族 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$ 为 A 到 B 的链,如果 $A=C_1$, $B=C_n$ 且 $C_i\cap C_{i+1}\neq\varnothing$, $1\leqslant i<n$. 对每一 $A\in\mathscr{A}$,置

$$\mathscr{B}(A)=\{B\in\mathscr{A}:\text{存在从 } A \text{ 到 } B \text{ 的 } \mathscr{A} \text{ 中的链}\}.$$

易知 $\mathscr{B}(A)$ 是可数集族,且对 $A_1,A_2\in\mathscr{A}$, $(\bigcup\mathscr{B}(A_1))\cap(\bigcup\mathscr{B}(A_2))\neq\varnothing$ 当且仅当 $\mathscr{B}(A_1)=\mathscr{B}(A_2)$. 证完.

引理 6.1.24 设 $\mathscr{U}=\{U_k\}_{k\in N}$ 是正规空间 X 的可数开覆盖,

且 $\mathscr{U}$ 具有闭加细覆盖 $\{F_k\}_{k\in N}$ 使 $F_k\subset U_k, k\in N$. 则 $\mathscr{U}$ 具有星有限的开加细覆盖.

证明 对每一 $k\in N$, 由于 $F_k\subset U_k$ 及正规性, 存在开集族 $\{G(k,n)\}_{n\in N}$ 使 $F_k\subset G(k,1)\subset\overline{G(k,1)}\subset G(k,2)\subset\cdots\subset G(k,n)\subset\overline{G(k,n)}\subset\cdots\subset U_k$. 对每一 $n\in N$, 置 $V_n=\bigcup\{G(i,n):1\leqslant i\leqslant n\}$. 置

$$H(1,1)=V_2\cap G(1,2),$$
$$H(k,n)=(V_{n+1}-V_{n-1})\cap G(k,n+1),$$
$$n>1, 1\leqslant k\leqslant n.$$

可直接验证 $\{H(k,n):k,n\in N,1\leqslant k\leqslant n\}$ 是星有限的开覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 证完.

注记 引理 6.1.24 的内容可以补充入定理 5.6.6(Mansfield)作为正规空间情况下, 可数仿紧性的一个充要条件.

定理 6.1.25(Smirnov[1956a]) 在正则空间, 下列论断等价:

(i) X 是强仿紧空间,

(ii) X 的每一开覆盖具有星可数的开加细覆盖.

证明 (i)→(ii)显然. 下证(ii)→(i). 设 $\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖, $\mathscr{U}$ 具有星可数开加细 $\mathscr{V}$. 由引理 6.1.23, $\mathscr{V}$ 可以表示为 $\mathscr{V}=\bigcup\{\mathscr{B}_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$, 每一 $\mathscr{B}_\alpha$ 是可数集族且 $(\bigcup\mathscr{B}_\alpha)\cap(\bigcup\mathscr{B}_\beta)=\varnothing$, 当 $\alpha\neq\beta$ 时, 按(ii)可以蕴含仿紧性, 只要把每一 $\mathscr{B}_\alpha(\alpha\in\Lambda)$ 表示为 $\mathscr{B}_\alpha=\{B_{\alpha,n}:n\in N\}$, 从而对每一 $n\in N$, $\{B_{\alpha,n}:\alpha\in\Lambda\}$ 是一离散开集族, $\bigcup_{n\in N}\{B_{\alpha,n}:\alpha\in\Lambda\}$ 是 $\mathscr{U}$ 的 σ 离散开加细(由定理 5.1.5 知是仿紧的). 对每一 $\alpha\in\Lambda$, 置 $Z_\alpha=\bigcup\mathscr{B}_\alpha$, Z_α 是仿紧空间 X 的既开又闭的子集, 从而是仿紧的. $\mathscr{B}_\alpha=\{B_{\alpha,n}:n\in N\}$ 是 Z_α 的可数开覆盖, 存在可数闭加细 $\{F_{\alpha,n}\}_{n\in N}$ 使 $F_{\alpha,n}\subset B_{\alpha,n}$, $n\in N$(引理 5.6.4). 由引理 6.1.24, 存在星有限的开集族 $\mathscr{W}_\alpha$ 覆盖 Z_α. 加细 $\mathscr{B}_\alpha$. 从而 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\mathscr{W}_\alpha$ 是空间 X 的星有限的开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 证完.

推论 6.1.26 正则 Lindelöf 空间是强仿紧空间.

证明 由定理 6.1.25 的(ii)即满. 证完.

推论 6.1.26 加强了推论 5.1.4.

1977 年刘应明引入拟仿紧性作为次仿紧性与弱仿紧性的共同推广.

定义 6.1.27 空间 X 的集族 $\mathscr{P}$ 称为相对于 $X'\subset X$ 离散的，如果对每一 $x\in X'$ 存在 X 中的邻域仅与 $\mathscr{P}$ 中一个元相交. 设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$，每一 $\mathscr{P}_n$ 是 X 的子集族. 如果 $\mathscr{P}_1$ 是离散的，且对 $n\geqslant 2$，$\mathscr{P}_n$ 相对于 $X-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$ 是离散的($\mathscr{P}_i^*=\bigcup\{P:P\in\mathscr{P}_i\}$)，则称 $\mathscr{P}$ 是 σ 相对离散的；如果再要求 $\mathscr{P}_1$ 是闭集族且对 $n\geqslant 2$，$\mathscr{P}'_n=\{P-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*:P\in\mathscr{P}_n\}$ 是子空间 $X-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$ 的闭集族，则称 $\mathscr{P}$ 是 σ 相对离散相对闭的，空间 X 称为**拟仿紧的(狭义拟仿紧的)**，如果 X 的每一开覆盖具有 σ 相对离散的(σ 相对离散相对闭的)加细覆盖.

注记 狭义拟仿紧空间是拟仿紧空间. 易知在正则空间二者等价. 容易验证，当 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是 σ 相对离散相对闭时，对每一 $n\in N$，$\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$ 是空间 X 的闭集.

由次仿紧空间的定义(定义 6.1.1)，显然次仿紧空间是狭义拟仿紧的. 下证弱仿紧空间是狭义拟仿紧的.

定理 6.1.28(刘应明[1977]) 弱仿紧空间是狭义拟仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是弱仿紧空间 X 的开覆盖，$\mathscr{V}$ 具有点有限的开加细覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 对每一 $m\in N$，记指标集 A 中 m 个不同元素组所成集为 A_m. 设 $\xi\in A_m$，$\xi=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)$. 置 $U_\xi=U_{\alpha_1}\cap U_{\alpha_2}\cap\cdots\cap U_{\alpha_m}$，$\mathscr{U}_m=\{U_\xi:\xi\in A_m\}$. 记 E_m 为 X 中恰好属于 $\mathscr{U}$ 中 m 个开集的点所成集. 则有 $\mathscr{U}_m^*\supset E_m$. 置

$$\mathscr{P}_m=\{U_\xi\cap E_m:\xi\in A_m\}.$$

显然 $\mathscr{P}_m$ 加细 $\mathscr{U}$，且 $\mathscr{P}_m^*=E_m$. 由 $\mathscr{U}$ 是点有限的，$X=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$，所以 $\mathscr{P}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\mathscr{P}_i$ 覆盖 X. 对 A_m 中的不同元 ξ,η，$U_\xi\cap U_\eta\cap E_m=\phi$. 所以每一 U_η 至多与 $\mathscr{P}_m$ 中一个元相交，即 $\mathscr{P}_m$ 关于 $\mathscr{U}_m^*$ 离散. 因为

$$X-\bigcup_{i=1}^{m-1}\mathscr{P}_i^*=X-\bigcup_{i=1}^{m-1}E_i\subset\mathscr{U}_m^*,$$

所以 $\mathscr{P}_m$ 关于 $X-\bigcup_{i=1}^{m-1}\mathscr{P}_i^*$ 离散，不难验证

$$U_\xi\cap E_m=(X-\bigcup_{i=1}^{m-1}\mathscr{P}_i^*)\cap(X-\bigcup\{U_\eta:\eta\in A_m,\eta\neq\xi\})$$

即 $U_\xi\cap E_m(=U_\xi\cap E_m-\bigcup_{i=1}^{m-1}\mathscr{P}_i^*)$ 是子空间 $X-\bigcup_{i=1}^{m-1}\mathscr{P}_n^*$ 中的闭集. 所以 $\mathscr{P}$ 是 $\mathscr{U}$ 的；也是 $\mathscr{V}$ 的 σ 相对离散相对闭的加细覆盖. 到此证明了 X 是狭义拟仿紧空间. 证完.

利用定理 6.1.28 的证法，可得下述定理.

定理 6.1.29 θ 加细空间是狭义拟仿紧的.

证明 设 $\mathscr{V}$ 是 θ 加细空间 X 的开覆盖，$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 是开覆盖序列加细 $\mathscr{V}$，且对每一 $x\in X$，存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{U}_n)<\omega$，利用定理 6.1.27 的证法，对每一 $\mathscr{U}_n(n\in N)$，存在 σ 相对离散相对闭加细集族 $\mathscr{P}_n=\bigcup_{m=1}^{\infty}\mathscr{P}_{n,m}$，覆盖 $X_n=\{x\in X:\mathrm{ord}(x,\mathscr{U}_n)<\omega\}$. 从而 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 覆盖 X，用对角线法：

$$\begin{array}{llll}
\mathscr{P}_{1,1}\to & \mathscr{P}_{1,2}, & \mathscr{P}_{1,3}, & \mathscr{P}_{1,4},\cdots\cdots\\
\quad\swarrow & \quad\swarrow & \quad\swarrow & \\
\mathscr{P}_{2,1} & \mathscr{P}_{2,2}, & \mathscr{P}_{2,3}, & \mathscr{P}_{2,4},\cdots\cdots\\
\quad\swarrow & \quad\swarrow & & \\
\mathscr{P}_{3,1} & \mathscr{P}_{3,2}, & \mathscr{P}_{3,3}, & \mathscr{P}_{3,4},\cdots\cdots\\
\quad\swarrow & & & \\
\cdots\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\ \cdots
\end{array}$$

令 $\mathscr{W}_1=\mathscr{P}_{1,1},\mathscr{W}_2=\mathscr{P}_{1,2},\mathscr{W}_3=\mathscr{P}_{2,1},\mathscr{W}_4=\mathscr{P}_{1,3},\mathscr{W}_5=\mathscr{P}_{2,2},\cdots$.

显然 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 是 $\mathscr{V}$ 的 σ 相对离散相对闭加细集族覆盖 X. 故 X 是狭义拟仿紧空间. 证完.

定理 6.1.30(朱俊[1984]，龙冰[1986]) 拟仿紧空间是弱 θ 加细空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是拟仿紧空间 X 的开覆盖，存在 σ 相对离散的覆盖 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 加细 $\mathscr{U}$. 当 $n=1$ 时，$\mathscr{P}_1$ 是 X 中的离散集，对任一 $P\in\mathscr{P}_1$ 及 $x\in P$ 存在 x 的开邻域 $V(x)$ 仅与 $\mathscr{P}_1$ 中一个元素相交. 由 $x\in P$，$V(x)$ 仅与 P 相交. 从而 $V(P)=\bigcup_{x\in P}V(x)$ 也仅与 P 相交. 取 $U(P)\in\mathscr{U}$ 使 $P\subset U(P)$. 令 $B(P)=V(P)\cap U(P)$，$\mathscr{B}_1=\{B(P):P\in\mathscr{P}_1\}$. 显然开集族 $\mathscr{B}_1$ 加细 $\mathscr{U}$，且 $\mathscr{B}_1^*\supset\mathscr{P}_1^*$. 对每一 $x\in\mathscr{P}_1^*$，$x\in$ 某 P_0. 对任一 $P\neq P_0$，则 $B(P)\cap P_0=\varnothing$. 故 $x\notin B$

(P). 所以对每一 $x\in\mathscr{P}_1^*$, $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_1)=1$.

对 $n\geqslant 2$, $\mathscr{P}_n$ 相对于 $X-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_1^*$ 离散. 由定义 6.1.27, 对每一 $x\in X-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$, 存在 x 在 X 中的开邻域 $V(x)$ 仅与 $\mathscr{P}_n$ 中一个元素相交. 用完全相同的证法得开集族 $\mathscr{B}_n$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $\mathscr{B}_n^*\supset\mathscr{P}_n^*-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$ 使对每一 $x\in X-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*\supset\mathscr{P}_n^*-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_i^*$, $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)=1$.

置 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$. 显然 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的覆盖, 加细 $\mathscr{U}$. 对 $x\in X$, 设 n_0 是 $x\in\mathscr{P}_n^*$ 的最小下标, 则 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_{n_0})=1$. 故 X 是弱 θ 加细空间. 证完.

定理 6.1.31(朱俊[1984], 龙冰[1986]) 狭义拟仿紧空间是弱$\bar{\theta}$加细空间.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是狭义拟仿紧空间 X 的开覆盖. 存在 σ 相对离散相对闭的覆盖 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 加细 $\mathscr{U}$. 由定理 6.1.30, 存在弱 θ 加细覆盖 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$ 加细 $\mathscr{U}$, 且 $\mathscr{B}_1^*\supset\mathscr{P}_1^*$, $\mathscr{B}_n^*\supset\mathscr{P}_n^*-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_n^*$ $(n\geqslant 2)$. 由 $\mathscr{P}$ 是 σ 相对离散相对闭的, 由定义 6.1.27 后的注记, 对每一 $n\in N$, $\bigcup_{i=1}^{n}\mathscr{P}_i^*$ 是空间 X 的闭集. 置

$$\mathscr{B}_1'=\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_n'=\{B-\bigcup_{i=1}^{n-1}\mathscr{P}_1^*:B\in\mathscr{B}_n\},\qquad(n\geqslant 2)$$

$\mathscr{B}'=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n'$ 仍是弱 θ 加细覆盖加细 $\mathscr{U}$. 下证 $\{\mathscr{B}_n^*\}_{n\in N}$ 是点有限的. 对每一 $x\in X$, 存在 $n_0\in N$ 使 $x\in\mathscr{P}_{n_0}^*$, 则当 $n>n_0$ 时, $x\notin\mathscr{B}_n'^*$. 所以 X 是弱$\bar{\theta}$加细空间. 证完.

综上, 有下列蕴含关系:

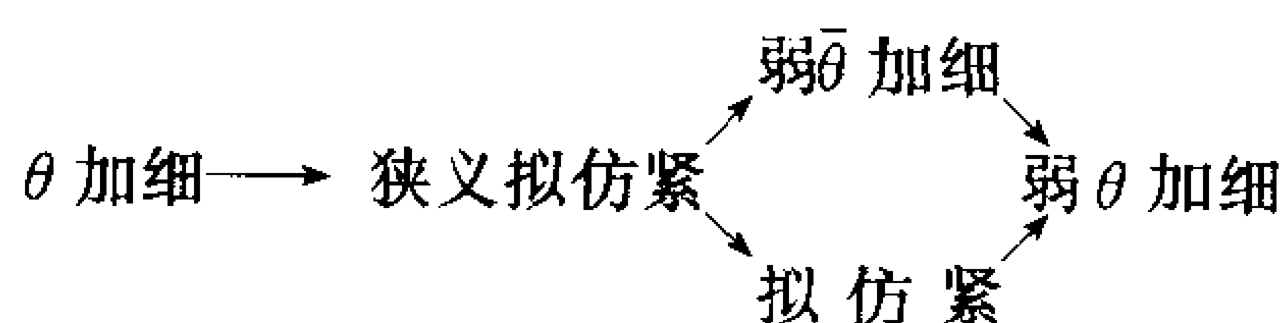


图 3

相反蕴含关系均不成立. 参见刘应明[1977], 朱俊[1984], 龙冰[1986].

关于怎样较弱的覆盖性质 + 集态正规性→仿紧性, 前面定理 6.1.16 的结果: "弱$\bar{\theta}$加细 + 集态正规→仿紧"到目前为止是比较

好的，因为不能以"弱 θ 加细"代替"弱$\overline{\theta}$加细"(见定理 6.1.14 后的注记).刘应明证明了可用"拟仿紧"代"弱$\overline{\theta}$加细"从上表所列蕴含关系看，同样是比较好的.

定理 6.1.32(刘应明[1977]) 拟仿紧的集态正规空间是仿紧空间.

证明从略.

由于存在拟仿紧空间不是弱$\overline{\theta}$加细的(见朱俊[1984])，定理 6.1.32 不能由定理 6.1.16 导出.现在还不知道弱$\overline{\theta}$加细能否蕴含拟仿紧？从而确定定理 6.1.32 是否强于定理 6.1.16.

关于定理 6.1.18(Boone)："θ 加细 + 点态集态正规→弱仿紧".朱俊，龙冰证明了以"狭义拟仿紧"代替"θ 加细".改进 Boone 的结果.

定理 6.1.33(朱俊[1984]，龙冰[1986]) 空间 X 是弱仿紧空间当且仅当 X 是点态集态正规的狭义拟仿紧空间.

证明从略.

像第五章 §6 引入可数仿紧空间一样可以定义：**可数次仿紧、可数弱仿紧、可数 meso 紧、可数 $\boldsymbol{\theta}$ 加细**等等空间，只要把相应的次仿紧、弱仿紧、θ 加细等等空间的定义中的"每一开覆盖"换为"每一可数开覆盖"就行.它们间蕴含关系也相应于定义 5.3.19 后的表所示，但也有个别蕴含关系不尽相同.

定理 6.1.34(Hodel[1970]) 空间 X 是可数次仿紧(countably subparacompact)空间当且仅当对 X 的每一可数开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in N}$存在可数闭覆盖$\{F_{n,j}\}_{n,j\in N}$使$F_{n,j}\subset U_n, n, j\in N$.

证明 必要性.设 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in N}$是可数次仿紧空间 X 的开覆盖，$\mathscr{F}=\bigcup_{j\in N}\mathscr{F}_j$ 是 X 的 σ 离散闭覆盖加细 $\mathscr{U}$.把 $\mathscr{F}_j$ 中的闭集之包含于 U_n 者的并记作 $F_{n,j}$，则闭集 $F_{n,j}\subset U_n(j\in N, n\in N)$.充分性.由一个闭集 $F_{n,j}$形成的闭集族 $\mathscr{F}_{n,j}=\{F_{n,j}\}$当然是离散闭的.证完.

推论 6.1.35(Hodel[1970]) 完备空间是可数次仿紧空间.

证明 完备空间的每一开集是 F_σ 集，由定理 6.1.34 得证.证

完.

定理 6.1.36(Hodel[1970]) 可数次仿紧空间是可数弱仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_n\}_{n\in N}$是可数次仿紧空间$X$的可数开覆盖.存在可数闭覆盖$\{F_{n,j}\}_{n,j\in N}$使$F_{n,j}\subset U_n(n,j\in N)$.置 $V_1=U_1$,对 $n\geqslant 2$,置 $V_n\doteq U_n-\bigcup\{F_{k,j}:k<n,j<n\}$,则 $\mathscr{V}=\{V_n\}_{n\in N}$是点有限开覆盖加细 $\mathscr{U}$.证完.

注记 按次仿紧空间与弱仿紧空间之间无蕴含关系,而可数次仿紧蕴含可数弱仿紧.相反蕴含关系不成立,见 Hodel[1970].

下面是可数弱仿紧空间的刻画,它与可数仿紧空间的刻画(定理 5.6.2)类似.

定义 6.1.37(Ishikawa[1955]) 下列论断等价:

(i) X 是可数弱仿紧空间.

(ii) X 的每一可数开覆盖$\{U_n\}$ $n\in N$ 存在点有限的开覆盖$\{V_n\}_{n\in N}$使$V_n\subset U_n,n\in N$.

(iii) 对 X 的每一递增开覆盖$\{W_n\}_{n\in N}$,存在 X 的闭覆盖$\{F_n\}_{n\in N}$使$F_n\subset W_n,n\in N$.

(iv) 对X的每一递减的闭集序列$\{F_n\}_{n\in N}$满足$\bigcap_{n\in N}F_n=\varnothing$,存在$X$的开集序列$\{W_n\}_{n\in N}$使 $F_n\subset W_n(n\in N)$且$\bigcap_{n\in N}W_n=\varnothing$.

证明 证法类似定理 5.6.2 且较简,从略.

定理 6.1.38(Gittings[1974]) 下列论断等价:

(i) X 是可数弱仿紧空间,

(ii) X 是可数θ加细空间,

(iii) 对 X 的每一递减的闭集序列$\{F_n\}_{n\in N}$满足$\bigcap_{n\in N}F_n=\varnothing$,存在 X 的 G_δ 集的序列$\{G_n\}_{n\in N}$使$F_n\subset G_n$ 且$\bigcap_{n\in N}G_n=\varnothing$.

证明 (i)⇒(ii)显然.下证(ii)⇒(iii).设 X 是可数θ加细空间,$\{F_n\}_{n\in N}$是X的递减闭集序列满足$\bigcap_{n\in N}F_n=\varnothing$.置$\mathscr{U}=\{X-F_n:n\in N\}$,$\mathscr{U}$是 X 的可数递增开覆盖,存在 θ 加细序列$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$.置

$$G_{n_j}=\mathrm{st}(F_n,\mathscr{V}_j),G_n=\bigcap_{j\in N}G_{n_j},$$

则每一 G_n 是 G_δ 集且 $G_n \supset F_n$, $n \in N$. 下证 $\bigcap_{n\in N} G_n = \varnothing$.

如不然,存在 $x \in \bigcap_{n\in N} G_n$. 选取 $j_0 \in N$ 使 $\text{ord}(x, \mathscr{V}_{j_0}) < \omega$. 兹设 $\text{ord}(x, \mathscr{V}_j) = k$,则存在集:$V_1, V_2, \cdots, V_k \in \mathscr{V}_{j_0}$ 使 $x \in V_i (i = 1,2,\cdots,k)$,对 $V \in \mathscr{V}_{j_0}$ 而 $V \neq V_i (i = 1,2,\cdots,k)$,则 $x \notin V$. 对每一 i,存在 $n_i \in N$ 使 $V_i \subset X - F_{n_i}$. 置 $n = \max\{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$,则对 $i = 1,2,\cdots,k$, $V_i \subset X - F_n$. 按 $x \in G_{n_{j_0}} = \text{st}(F_n, \mathscr{V}_{j_0})$,所以存在 $V \in \mathscr{V}_{j_0}$ 使 $x \in V$ 且 $V \cap F_n \neq \varnothing$. 由于 $x \in V$,而 $V \in \mathscr{V}_{j_0}$,所以 V 必须就是 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ 中的某一个集,从而 $V \subset X - F_n$. 这与 $V \cap F_n \neq \varnothing$ 矛盾.

(iii)⇒(i). 下证(iii)⇒定理 6.1.37 的(iv),从而由定理 6.1.37 得证. 设 $\{F_n\}_{n\in N}$ 是空间 X 的递减闭集序列满足 $\bigcap_{n\in N} F_n = \varnothing$. 由(iii)存在 X 的 G_δ 集的序列 $\{G_n\}_{n\in N}$ 使 $F_n \subset G_n (n \in N)$ 且 $\bigcap_{n\in N} G_n = \varnothing$. 置 $G_n = \bigcap_{j\in N} G_{n_j}$, G_{n_j} 是开集,对 $n \in N$ 置

$$U_n = \bigcap \{G_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

显然 U_n 是开集, $F_n \subset U_n (n \in N)$ 且 $\bigcap_{n\in N} U_n = \varnothing$. 满足定理 6.1.37 的(iv). 证完.

综上,有下列蕴含关系:

完备 → 可数次仿紧 → 可数弱仿紧 ↔ 可数 θ 加细.

图 4

§2. 映射性质

下面叙述本书中覆盖性质的映射性质. 自从 Micheal[1957]开创以闭包保持闭加细覆盖刻画正则仿紧性(定理 5.1.13),从而得到闭映射保持 T_2 仿紧性(定理 5.2.1)后,学者们对其他覆盖性质有目的地作类似的刻画企图获得相应的映射性质. 下面关于次仿紧、弱仿紧及 θ 加细空间的映射定理就是这样得到的.

定理 6.2.1(Burke[1969]) 次仿紧空间在闭映射下的象是次仿紧空间.

证明 由定理 6.1.2 的(iii),仿定理 5.2.1 的证法即得证.证完.

定理 6.2.2(Worrell[1966b]) 弱仿紧空间在闭映射下的象是弱仿紧空间.

证明 由定理 6.1.5 的(ii),仿定理 5.2.1 的证法即得证.证完.

定理 6.2.3(Junnila[1978b]) θ 加细空间在闭映射下的象是 θ 加细空间.

证明 由定理 6.1.7 的(ii),仿定理 5.2.1 的证法即得证.证完.

关于 meso 紧空间的映射定理,定理 6.1.6 的(ii)也是有目的地安排的,但没有前面定理 6.1.2 的(iii).定理 6.1.5 的(ii)和定理 6.1.7 的(ii)那样明确,相应的映射定理也有所不同.

定理 6.2.4(高国士-吴利生[1983]) Meso 紧空间在闭的紧覆盖映射下的象是 meso 紧空间.

证明 设 X 是 meso 紧空间,$f: X \to Y$ 是闭的紧覆盖映射(定义 5.5.12).设 $\mathscr{V}=\{V_\beta\}_{\beta\in B}$是空间 Y 的定向开覆盖,则 $\mathscr{U}=\{f^{-1}(V_\beta)\}_{\beta\in B}$是空间$X$ 的定向开覆盖.由定理 6.1.6 的(ii),$\mathscr{U}$具有闭包保持闭加细覆盖 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$且 $\mathscr{F}$为 X 中所有紧集组成的集族所加细.因 f 是闭映射,$\{f(F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是空间 Y 的闭包保持闭覆盖加细 $\mathscr{V}$.因 f 是紧覆盖的,$\{f(F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$为 Y 中所有紧集组成的集族所加细.由定理 6.1.6 的(ii),知 Y 是 meso 紧空间.证完.

推论 6.2.5(高国士-吴利生[1983]) Meso 紧空间在完备映射下的象是 meso 紧空间.

证明 因完备映射是闭的紧覆盖映射(见定义 5.5.12).证完.

至于闭映射能否保持 meso 紧性?我们回忆在前面定理 5.2.3 证明了"双商闭映射保持(不加分离公理的)仿紧性后,曾同样提出闭映射能否保持这样的仿紧性?并指出答案是否定的.有反例存在.下面的例 6.2.6 正是这样的例.而反例 6.2.7 否定了

meso 紧性情况.

例 6.2.6(林寿[1988b]) 存在 T_1 强仿紧空间在某闭映射下的象不是可数仿紧空间.

取 $X=(N\cup\{0\})\times(N\cup\{0\})\setminus\{(0,0)\}$. 这里 N 是自然数集. 对 $m,n,k\in N$,置 $V(n,m)=\{(n,k):k\geqslant m\}$. 在 X 上导入如下拓扑:(1)点$(n,m)\in N\times N$ 的邻域基为$\{\{(n,m)\}\}$;(2)点$(n,0)$的邻域基为$\{V(n,m)\cup\{(n,0)\}\}_{m=1}^{\infty}$;(3)点$(0,n)$的邻域基为$\{V(n,m)\cup\{(0,n)\}\}_{m=n}^{\infty}$. 易知 X 是 T_1 空间. 可以证明 X 是强仿紧空间.

将 X 的子集$\{0\}\times N$ 粘合成一点 O^* 所成的商空间记为 $Y=(N\times(N\cup\{0\}))\cup\{0^*\}$. 由于$\{0\}\times N$ 是 X 的闭子集,故商映射 f 是闭映射. 可以证明 Y 不是可数仿紧空间. 这例说明 T_1 仿紧性不能为闭映射保持.

例 6.2.7(林寿[1988b]) 存在 T_0 强仿紧空间在某闭映射下的象不是可数 meso 紧空间.

仍取例 6.2.6 中的 X,在导入拓扑时,(1),(2)相同. (3)修改为:点$(0,n)$的邻域基由单元族$\{V(n,n)\cup\{(0,n)\}\}$形成. 由于点$(0,n)$邻域总包含点(n,n),这空间是 T_0 空间,类似地可证明是强仿紧空间.

同样把闭集$\{0\}\times N$ 粘合成一点 O^* 的商空间记为 Y,商映射 f 仍是闭映射. 同样可证 Y 不是可数仿紧空间. 按商拓扑的定义, Y 的点 O^* 的邻域基由单元素族$\{V_0=\{(n,m):m\geqslant n>0\}\cup\{0^*\}\}$形成. 所以 Y 满足第一可数公理. 由于第一可数空间的紧有限集族是局部有限的(习题 6.13),知 Y 不是可数 meso 紧空间. 这例说明 T_0 meso 紧不能为闭映射保持.

上例说明闭映射不能保持 meso 紧性,但是可以证明闭映射能保持正规 meso 紧性.

定理 6.2.8(高国士-吴利生[1983]) 正规 meso 紧空间在闭映射下的象是正规 meso 紧空间.

证明 见§6. 定理 6.6.13 后的注记.

在弱 θ 加细空间的刻画(定理 6.1.8)中,设有借助于闭包保持闭加细覆盖的某种形式.这说明这种类型的刻画对弱 θ 加细空间来说有一定的困难(但未必不可能,读者可以尝试).因此关于弱 θ 加细空间的映射定理不能像前面那些空间情况容易得到.下面的结果是 Burke 得到的.证明难度较大,读者可参看 Burke [1984b].

定理 6.2.9(Burke[1984b]) 弱 θ 加细空间在完备映射下的象是弱 θ 加细空间.

证明从略.

问题 闭映射能否保持弱 θ 加细性?

关于弱$\overline{\theta}$加细空间,情况更差.在文献中没有看到过关于这类空间的有效刻画,连类似于弱 θ 加细空间的刻画(定理 6.1.8)都难得到(而在上述定理证明中主要利用定理 6.1.8 的(ii)).

问题 闭映射或完备映射能否保持弱$\overline{\theta}$加细性?

关于 ortho 紧空间,Gruenhage[1979]构造反例说明闭映射不能保持 ortho 紧性.接着 Burke[1980a]构造反例说明完备映射也不能保持 ortho 紧性.

问题 有限对一闭映射能否保持 ortho 紧性?

关于强仿紧空间,它的映射性质更差.Ponomarev[1962]曾证明"每一仿紧空间是某一强仿紧空间在完备映射下的象",这说明完备映射未必保持强仿紧性.事实上,即使是有限对一闭映射也未必能保持强仿紧性.见下面的例.

例 6.2.10 存在度量空间 X 可以表示为两个强仿紧闭子空间F_1, F_2 的并,但 X 不是强仿紧空间(见 Engelking [1977]Ex. 5.3.F).置 $F = F_1 \oplus F_2$(不相交拓扑和),映射 $f: F \to X$ 是二对一的闭映射.容易验证,强仿紧性关于拓扑和保持的.如果强仿紧性关于有限对一闭映射也保持的话,则由定理 5.5.3 将得到 X 是强仿紧空间.由此矛盾可知,有限对一闭映射不能保持强仿紧性.

关于图 2 中的覆盖性质的映射定理,有下述 Burke 关于仿 Lindelöf 空间的结果.

定理 6.2.11(Burke[1980c]) 仿 Lindelöf 空间在闭 Lindelöf 映射下的象是仿 Lindelöf 空间.

证明 设 X 是仿 Lindelöf 空间, $f: X \to Y$ 是闭 Lindelöf 映射. 设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的开覆盖, $f^{-1}(\mathscr{V}) = \{f^{-1}(V): V \in \mathscr{V}\}$ 是空间 X 的开覆盖. 存在 X 的局部可数开覆盖 $\mathscr{U}$ 加细 $f^{-1}(\mathscr{V})$. 置 $f(\mathscr{U}) = \{f(U): U \in \mathscr{U}\}$, 显然 $f(\mathscr{U})$ 覆盖 Y, 加细 $\mathscr{V}$. 下证 $f(\mathscr{U})$ 是局部可数的.

对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是 Lindelöf 的, 而 $\mathscr{U}$ 是局部可数的, 易知 $f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{U}$ 中可数个元相交. 记这可数个元的并为 U_y, $f^{-1}(y) \subset U_y$. 因 f 是闭映射, 由定理 1.5.8, 存在开集 G_y 使 $f^{-1}(y) \subset G_y \subset U_y$, $G_y = f^{-1}(f(G_y))$ 且 $f(G_y)$ 是 Y 中的开集. 因 G_y 仅与 $\mathscr{U}$ 中可数个元相交, 所以 $f(G_y)$ 仅与 $f(\mathscr{U})$ 中可数个元相交. 所以 $f(\mathscr{U})$ 是局部可数的.

此外, 每一 $y \in Y$, $y \in f(G_y) \subset \bigcup \{f(U): U \in \mathscr{U}, y \in f(U)\} = \mathrm{st}(y, f(\mathscr{U}))$. 因 $f(G_y)$ 是开集, 所以 $y \in \mathrm{Int}(\mathrm{st}(y, f(\mathscr{U})))$. 由定理 6.1.21 知 Y 是仿 Lindelöf 空间. 证完.

注记 Burke[1980c]曾给出一正规(非集态正规)的仿 Lindelöf 空间在某一闭映射下的象不是仿 Lindelöf 空间.

关于拟仿紧性等的映射性质, 文献中不多见, 这里从略.

关于可数覆盖性质的映射性质基本上类似于相应的覆盖性质, 这里从略(参见 Gittings[1977]及林寿[1989b]). (上述二类覆盖性质的遗传性可积性、和定理等也都不予讨论, 因为基本上类似).

上面叙述怎样的闭映射保持某些覆盖性质, 下面叙述逆保持情况. 前面图 1、图 2 中的所有覆盖性质(除 ortho 紧性外)以及强仿紧性都能为闭 Lindelöf 映射的逆象所保持(其中有些情况要对映射的定义域附加"正则"条件, 像前面仿紧情况的定理 5.2.7 一样).

定理 6.2.12 设 $f: X \to Y$ 是正则空间 X 到空间 Y 上的闭 Lindelöf 映射, Y 是 meso 紧、弱仿紧、次仿紧、强仿紧、θ 加细、弱 $\overline{\theta}$

加细空间，则 X 分别是 meso 紧、弱仿紧、次仿紧、强仿紧、θ 加细、弱 $\overline{\theta}$ 加细空间.

证明 仿照定理 5.2.7(仿紧空间情况)的证法，引用定理 6.1.2(次仿紧性的刻画)的(ii)可证明次仿紧空间情况；如改用定理 6.1.24(强仿紧性的刻画)可证明强仿紧空间情况.

至于其他情况可参考下面证明 meso 紧空间情况予以适当改变(利用下面证明中 $\{W_{yn}\}_{n\in N}$ 的点有限性).

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正则空间 X 的开覆盖. 由正则性存在开覆盖 $\mathscr{V}$ 使 $\{\overline{V}: V\in\mathscr{V}\}$ 加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 具有 Lindelöf 性质，$f^{-1}(y)$ 为 $\mathscr{V}$ 中可数个元 $\{V_{yi}\}_{i\in N}$ 覆盖. 选取 $U_{yi}\in\mathscr{U}$ 使 $\overline{V}_{yi}\subset U_{yi}(i\in N)$. 置

$$W_{y1} = U_{y1}\cap(\bigcup_{i\in N}V_{yi}),$$

$$W_{yn} = (U_{yn}-\bigcup_{i<n}\overline{V}_{yi})\cap(\bigcup_{i\in N}V_{yi}),(n>1,n\in N).$$

则 $\{W_{yn}\}_{n\in N}$ 是空间 X 的(点有限)开集族覆盖 $f^{-1}(y)$，关于 $\bigcup_{n\in N}V_{yn}$ 局部有限的. $W_y=\bigcup_{n\in N}W_{yn}$ 是包含 $f^{-1}(y)$ 的开集，因 f 是闭映射，由定理 1.5.8，存在开集 W_y' 使 $f^{-1}(y)\subset W_y'\subset W_y$，及 $W'_y=f^{-1}(f(W'_y))$ 且 $f(W'_y)$ 是 Y 中的开集. $\{f(W'_y)\}_{y\in Y}$ 是 Y 的开覆盖. 因 Y 是 meso 紧空间，存在紧有限的开加细覆盖(不失一般性)可设为 $\{H_y\}_{y\in Y}$ 使对每一 $y\in Y$，$H_y\subset f(W_y')$ *). 设 C 是空间 X 的紧集，它的连续象 $f(C)$ 是 Y 中的紧集. $f(C)\cap H_y\neq\varnothing$ 当且仅当 $C\cap f^{-1}(H_y)\neq\varnothing$. 所以 $\{f^{-1}(H_y)\}_{y\in Y}$ 是 X 的紧有限开覆盖. $f^{-1}(H_y)\subset W_y'\subset W_y=\bigcup_{n\in N}W_{yn}$. 置

$$\mathscr{W}=\{W_{yn}\cap f^{-1}(H_y): n\in N, y\in Y\}.$$

显然，$\mathscr{W}$ 是空间 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 下面证明 $\mathscr{W}$ 是紧有限的. 设 C 是空间 X 的紧集. 因开覆盖 $\{f^{-1}(H_y)\}_{y\in Y}$ 是紧有限的，C 仅与有

---

*)这种具有相同指标集的加细覆盖. 通常称为**精确的**(precise)加细覆盖. 如果覆盖 $\mathscr{U}$ 具有点有限、局部有限、紧有限的开加细覆盖，则也分别具有点有限、局部有限、紧有限的精确的加细覆盖. 证明同定理 5.6.2 的(ii).

限个$f^{-1}(H_{y1}),\cdots f^{-1}(H_{yk})$相交.从而$C\subset\bigcup_{l=1}^{k}(f^{-1}(H_{yl}))=\bigcup_{l=1}^{k}(\bigcup_{n\in N}(W_{yl,n}\cap f^{-1}(H_{yl})))$.由于对每一$l(l=1,2,\cdots,k)$,$\{W_{yl,n}\}_{n\in N}$关于$\bigcup_{n\in N}V_{yl,n}=\bigcup_{n\in N}W_{yl,n}$局部有限的.从而$\{W_{yl,n}\cap f^{-1}(H_{yl})\}_{n\in N}$亦然.对每一$x\in C$,$x\in$某$W_{yl,n}$,存在$x$的开邻域$G_{x,l}$与$\{W_{yl,n}\cap f^{-1}(H_{yl})\}_{n\in N}$中有限个元相交.这些开邻域$\{G_{x,l}:x\in C,l=1,2,\cdots,k\}$覆盖紧集$C$,从而可取其中的有限个元覆盖$C$,故$C$与$\{W_{yi,n}\cap f^{-1}(H_{yi})\}n\in N,i=1,2,\cdots,k$中,从而与$\mathscr{W}$中有限个元相交.所以$\mathscr{W}$是紧有限的.证完.

至于下面定理6.2.13的一些空间在闭Lindelöf映射下逆象的保持性可以不要求定义域空间的正则性(见周友成[1983]及葛英[1994b]),这是因为在弱θ加细情况不要求覆盖序列,其他都是点可数情况正好与$f^{-1}(y)$是Lindelöf相适应.

定理 6.2.13 设$f:X\to Y$是空间X到空间Y上的闭Lindelöf映射.Y是弱θ加细、仿Lindelöf meta-Lindelöf,$\delta\theta$加细、弱$\overline{\delta\theta}$加细及弱$\delta\theta$加细空间,则X分别是相应的空间.

证明 仿照定理5.2.7的证法,证明是直接的,留给读者.

推论 6.2.14 设$f:X\to Y$是空间X到空间Y上的完备映射.Y具有定理6.2.12及定理6.2.13中的某一覆盖性质,则X也具有这一覆盖性质.

证明 因完备映射$\to$闭Lindelöf映射.而在完备映射情况,定理6.2.12中的正则性可以去掉.证完.

下面的例(葛英[1994b])说明定理6.2.12中映射的定义域X的正则性不能去掉.

例 6.2.15 设$X=[0,1)$,定义$\{[0,t):0\leqslant t\leqslant 1\}\cup\{\{x\}:x$是$[0,1)$中的无理点$\}$为$X$上的拓扑的基.下面证明$X$不是弱$\bar{\theta}$加细空间.

记Q是$[0,1)$中的所有有理点所成的子空间.Q是闭的.由弱$\bar{\theta}$加细空间是闭遗传的(见定理6.3.1),所以只要证明闭子空间Q不是弱$\bar{\theta}$加细的.

设$\{\mathscr{V}_n:n\in N\}$是 Q 中严格递增趋于 1 的序列，则 $\mathscr{U}=\{[0,r_n)\cap Q:n\in N\}$是 Q 的开覆盖. 设 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$ 是 $\mathscr{U}$ 的任一弱 θ 加细覆盖. 下面证明$\{\mathscr{V}_n^*:n\in N\}$不是点有限的. 注意 $\mathscr{V}$ 中的每一元都形如$[0,t)\cap Q$，这里 $t\in[0,1)$. 取 $s_1\in Q$，则存在 $n_1\in N$ 使 $0<\mathrm{ord}(s_1,\mathscr{V}_{n_1})<\infty$，不妨记作 $\mathrm{ord}(s_1,\mathscr{V}_{n_1})=m_1$. 取 $s_2\in Q$，使 $s_2>\max\{t:s_1\in[0,t)\cap Q\in\mathscr{V}_{n_1}\}$，则存在 $n_2\in N$，使 $0<\mathrm{ord}(s_2,\mathscr{V}_{n_2})<\infty$，不妨记作 $\mathrm{ord}(s_2,\mathscr{V}_{n_2})=m_2$. 这里的 $\mathscr{V}_{n_2}$ 必不同于 $\mathscr{V}_{n_1}$ $(n_1\neq n_2)$，因为不然的话，由于 $s_1<s_2$，将有 $\mathrm{ord}(s_1,\mathscr{V}_{n_1})=m_1+m_2$，矛盾. 从而可选出$\{s_k\}_{k\in N}\subset Q$ 及$\{n_k\}_{k\in N}$使对每一$k\in N$，$0<\mathrm{ord}(s_k,\mathscr{V}_{n_k})<\infty$，其中 $0\leqslant s_1<s_2<\cdots<s_k<\cdots<1$，且当 $k_1\neq k_2$ 时，$n_{k_1}\neq n_{k_2}$. 由此可推得，对每一 $k\in N$，$s_1\in\mathscr{V}_{n_k}^*$. 所以$\{\mathscr{V}_n^*\}_{n\in N}$不是点有限的，从而 X 不是弱$\bar\theta$加细空间.

记 X 的商空间X/Q 为 Y. 由商拓扑知 Y 是紧空间，而商映射 $f:X\to Y$ 是可数对一闭映射. 这说明如果去掉定理 6.2.11 中的正则性，则定理 6.2.11 中的所有空间(以及定理 5.2.7 中的仿紧空间)都不能为可数对一闭映射所保持，更不能为闭 Lindelöf 映射所保持.

遗憾的是这例的空间是 T_0 的. 如能构造相应的 T_2 空间则更好. 如借用 Bennett-Lutzer[1972]的例(见习题 6.4). 这例的空间 X 是 T_2 的，不是 θ 加细，但是弱$\bar\theta$加细的. 把 X 中有理点等同于一点得到的商空间是 T_1 紧的. 商映射 f 是可数对一的. 这例说明定理 5.2.7 及定理 6.2.12 的正则性(除弱$\bar\theta$空间外)不能减弱为 T_2.

例 6.2.16 存在 ortho 紧空间在某完备映射下的逆象不是 ortho 紧的空间.

取投影映射 $P:[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]\to[0,\omega_1)$. 因$[0,\omega_1]$是紧空间. 所以投影 p 是完备映射. 下面要证明$[0,\omega_1)$是 ortho 紧的及$[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$不是 ortho 紧的，为此引入下面两个引理.

引理 6.2.17 设 $f:[0,\omega_1)\to[0,\omega_1)$，对充分大的 x 都有

$f(x)<x$. 则存在 $c\in[0,\omega_1)$ 使对每一 $x\in[0,\omega_1)$ 存在 $y\geqslant x$ 使 $f(y)\leqslant c$.

证明 如果结论不成立,则对任何 $c'\in[0,\omega_1)$,存在某一与 c' 相应的 x' 对所有 $y\geqslant x'$ 都有 $f(y)>c'$.

今设当 $x\geqslant\alpha$ 时有 $f(x)<x$. 取 $x_1\geqslant\alpha$ 作为 c',则存在与 x_1 相应的 x_2 使对所有的

$$y\geqslant x_2, 有\ f(y)>x_1.$$

以 x_2 为 c'. 则存在与 x_2 相应的 x_3 使对所有的

$$y\geqslant x_3, 有\ f(y)>x_2.$$

依此类推,取 x_n 为 c',则存在与 x_n 相应的 x_{n+1} 使对所有的

$$y\geqslant x_{n+1}, 有\ f(y)>x_n.$$

这样继续下去. 设 β 是大于可列个 x_n 的最小数. 因 $\beta>x_n(n\in N)$. 故对所有的

$$y\geqslant\beta, 有\ f(y)>x_n, (n\in N).$$

因 β 是大于 $x_n(n\in N)$ 的最小数,故有

$$y\geqslant\beta, 有\ f(y)\geqslant\beta.$$

特别取 $y=\beta$,则有 $f(\beta)\geqslant\beta$. 然因 $\beta>x_1>\alpha$,由假设应有 $f(\beta)<\beta$,这是矛盾的. 证完.

引理 6.2.18 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 $[0,\omega_1)$ 的开覆盖,则存在 $c\in[0,\omega_1)$ 使 $\mathrm{st}(c,\mathscr{U})\supset[c,\omega_1)$.

证明 这里的 U_α 可假定为基本开集,即具有形式 $(\alpha_x,x]$ 者. 这里 $\alpha_x<x$. 置 $f(x)=\alpha_x$. 由引理 6.2.17 知存在 $c\in[0,\omega_1)$ 使对每一 $x\in[0,\omega_1)$ 存在 $y\geqslant x$ 使 $\alpha_y\leqslant c$. 从而 $\mathrm{st}(c,\mathscr{U})\supset[c,\omega_1)$. 证完.

下面我们证明空间 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的. 设 $\mathscr{U}$ 是 $[0,\omega_1)$ 的开覆盖(U_α 的假定同前). 由引理 6.2.18,存在 $c\in[0,\omega_1)$ 使 $\mathrm{st}(c,\mathscr{U})\supset[c,\omega_1)$. 由于 $[0,c]$ 是紧空间,为 $\mathscr{U}$ 中有限个开集覆盖,这有限覆盖记为 $\mathscr{U}'$. 置

$$\mathscr{V}=\mathscr{U}'\cup\{U_\alpha\cap(c,\omega_1):c\in U_\alpha\in\mathscr{U}\}.$$

容易验证 $\mathscr{V}$ 是内核保持开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 证完.

证 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 不是 ortho 紧空间. 取这积空间的开覆盖为 $\mathscr{U}=\{[0,\alpha]\times(\alpha,\omega_1]:\alpha\in[0,\omega_1)\}\cup\{[0,\omega_1)\times[0,\omega_1)\}$ 如果 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的任一开加细覆盖,用引理 6.2.18 于子空间 $[0,\omega_1)\times\{\omega_1\}$ ($\mathscr{V}$ 作为这子空间的覆盖),则存在 $c\in[0,\omega_1)$ 使 $\mathrm{st}((c,\omega_1),\mathscr{V})\supset[c,\omega_1)\times\{\omega_1\}$. 从而 $\bigcap\{V\in\mathscr{V}:(c,\omega_1)\in V\}\subset[0,\omega_1)\times\{\omega_1\}$. 所以 $\mathscr{V}$ 不能是内核保持的.

到此证明了 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的,而作为它在完备映射下的逆象 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 不是 ortho 紧的. 完成了例 6.2.16 的论断. 此外,这例也说明 ortho 紧空间与紧空间的积可以不是 ortho 紧的,这不同于其他覆盖性质(见定理 6.4.1).

这里附带地考察空间 $[0,\omega_1)$ 的拓扑属性,因为这空间在构作反例时很有用处. 空间 $[0,\omega_1)$ 不仅是正规空间(习题 3.11),而且是集态正规空间(习题 6.16),满足很强的分离公理,但 $[0,\omega_1)$ 不是仿紧空间. 下面利用引理 6.2.18 作简单的证明. 取空间 $[0,\omega_1)$ 的由形如 $\{x:x<\alpha\}(\alpha\in[0,\omega_1))$ 的开集组成的覆盖 $\mathscr{U}$. 对 $\mathscr{U}$ 的任何开加细覆盖 $\mathscr{V}$ 由引理 6.2.18 存在 $c\in[0,\omega_1)$ 使 $\mathrm{st}(c,\mathscr{V})\supset[c,\omega_1)$. 这 $\mathrm{st}(c,\mathscr{V})$ 不能包含在任何 $\{x:x<\alpha\}$ 内,所以 $[0,\omega_1)$ 不是满正规空间. 由 Stone 定理(定理 5.1.10)知 $[0,\omega_1)$ 不是仿紧空间. 更由前面的定理 6.1.16 及定理 6.1.32 知 $[0,\omega_1)$ 不是次仿紧、弱仿紧、θ 加细、弱 $\overline{\theta}$ 加细及拟仿紧空间. 其实后面将看到 $[0,\omega_1)$ 甚至不是弱 $\delta\theta$ 加细空间(定理 6.6.3 后的注记). 此外, $[0,\omega_1)$ 虽不是紧空间但是局部紧的(习题 3.10),也容易直接证明 $[0,\omega_1)$ 是可数紧的(或由习题 3.10 得到).

关于覆盖性质的映射,在前面(包括第五章)只提到闭映射. 这里统一地谈谈开映射情况. 映射 $f:X\to Y$ 称为**开紧映射**(open compact mapping),如果 f 是开映射且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$ 是紧的(事实上,完备映射是闭紧映射). 前面所涉及的许多覆盖性质都不能为开紧映射所保持,不要说是开映射了. 如更加强为有限对一开映射,目前只知道弱仿紧(meta紧)、θ 加细、ortho紧及meta-

Lindelöf 空间能为有限对一开映射所保持(见定理 6.1.19, 6.1.20,6.1.21),还不知道弱 θ 加细、弱$\overline{\theta}$加细、$\delta\theta$ 加细、弱 $\delta\theta$ 加细及弱$\overline{\delta\theta}$加细空间能否为有限对一开映射所保持?

定理 6.2.19 弱仿紧、meta-Lindelöf 空间在有限对一开映射下的象分别是弱仿紧、meta-Lindelöf 空间.

证明 证明是平凡的,读者可以自己完成.

关于 θ 加细空间为有限对一开映射所保持的证明并不平凡,要利用 Worrell[1967]关于 θ 加细空间的刻画(定理 5.3.7 的(iii)).下面的证明属于林寿.

定理 6.2.20 θ 加细空间在有限对一开映射下的象是 θ 加细空间.

证明 设 X 是 θ 加细空间,$f:X\to Y$ 是有限对一开映射.设 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的开覆盖,则 $\mathscr{U}=\{f^{-1}(V):V\in\mathscr{V}\}$ 是 X 的开覆盖.由定理 6.1.7 的(iii),存在开加细覆盖序列 $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in N}$ 加细 $\mathscr{U}$,使对每一 $x\in X$,存在 $n\in N$ 及有限族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$,如 $x\in W\in\mathscr{W}_n$,则 W 包含在 $\mathscr{U}'$ 的某些元 $f^{-1}(V)$ 内.取 $\{\mathscr{W}_n\}_{n\in N}$ 中任意有限个覆盖的交.这些有限交形成的族仍是可数的,设为 $\{\mathscr{W}'_k\}_{k\in N}$.这里每一 $\mathscr{W}'_k$ 具有形式:

$$\mathscr{W}'_k=\mathscr{W}_{n_1}\wedge\mathscr{W}_{n_2}\wedge\cdots\wedge\mathscr{W}_{n_m},$$

仍是 X 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$.因 f 是开映射,对每一 $k\in N$,

$$\mathscr{G}_k=\{f(W^1):W'\in\mathscr{W}'_k\}$$

是空间 Y 的开覆盖加细 $\mathscr{V}$.所以 $\{\mathscr{G}_k\}_{k\in N}$ 是空间 Y 的开覆盖序列.对每一 $y\in Y$,因 f 是有限对一的,设 $f^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\cdots,x_m\}$.对每一 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$,存在 $n_i\in N$ 及有限子族 $\mathscr{U}'_i\subset\mathscr{U}$,如 $x_i\in W\in\mathscr{W}_{n_i}$,则 W 包含在 $\mathscr{U}'_i$ 的某些元 $f^{-1}(V)$ 内.从而对任一 $x_i(i=1,2,\cdots,m)$,如 $x_i\in W'\in\mathscr{W}'_k=\mathscr{W}_{n_1}\wedge\mathscr{W}_{n_2}\wedge\cdots\wedge\mathscr{W}_{n_m}$,则 W' 包含在 $\bigcup_{i=1}^m\mathscr{U}'_i$ 的某些元 $f^{-1}(V)$ 内.所以对每一 $y\in Y$,存在 $k\in N$ 及有限族 $\mathscr{V}'\subset\mathscr{V}$,这里 $\mathscr{V}'=\{V\in\mathscr{V}:f^{-1}(V)\in\bigcup_{i=1}^m\mathscr{U}'_i\}$,如 $y\in f(W')\in\mathscr{G}_k$,则 $f(W')$ 包含在 $\mathscr{V}'$ 的某些元 V 内.由定理 6.1.7

的(iii),知 Y 是θ 加细空间.证完.

注记 Junnila[1978b]曾进一步证明有限对一伪开映射保持θ 加细性.

Gittings[1977]提出 ortho 紧性能为怎样的开映射所保持?Scott[1980]及张建平[1983]互相独立地解决了这问题.下面定理的证明采用张建平的证法,比较简捷.

定理 6.2.21(Scott[1980],张建平[1983]) ortho 紧空间在有限对一开映射下的象是 ortho 紧空间.

证明 设 X 是 ortho 紧空间,$f\,X\to Y$ 是有限对一开映射.设$\mathscr{V}$是空间 Y 的开覆盖,则$\{f^{-1}(V):V\in\mathscr{V}\}$是空间 X 的开覆盖.因 X 是 ortho 紧的,存在内核保持开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 加细$\{f^{-1}(V):V\in\mathscr{V}\}$.因 f 是开映射,$\{f(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是空间 Y 的开覆盖加细 $\mathscr{V}$.以下证明$\{f(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$是内核保持的.

对任意的 $A'\subset A$,如果$\bigcap_{\alpha\in A'}f(U_\alpha)\neq\varnothing$,取任意 $y\in\bigcap_{\alpha\in A'}f(U_\alpha)$,从而 $f^{-1}(y)\cap U_\alpha\neq\varnothing$,$(\alpha\in A')$.因 f 是有限对一的,设 $f^{-1}(y)=\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}$.置 $A_i'=\{\alpha:\alpha\in A',x_i\in U_\alpha\}$,$i=1,2,\cdots,k$.不失一般性,可作为每一 A_i'不空.易知 $A'=\bigcup_{i=1}^{k}A_i'$.对每一 $x_i(i=1,2,\cdots,k)$,$x_i\in\bigcap_{\alpha\in A_i'}U_\alpha$,从而 $y\in f(\bigcap_{\alpha\in A'}U_\alpha)\subset\bigcap_{\alpha\in A_i'}f(U_\alpha)$,对 $i=1,2,\cdots,k$ 成立.所以

$$
\begin{aligned}
y\in\bigcap_{i=1}^{k}f(\bigcap_{\alpha\in A_i'}U_\alpha)&\subset\bigcap_{i=1}^{k}\bigcap_{\alpha\in A_i'}f(U_\alpha)\\
&=\bigcap_{\alpha\in A'}f(U_\alpha).
\end{aligned}
$$

因$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是内核保持的,$\bigcap_{\alpha\in A_i'}U_\alpha$ 是空间X 的开集.因 f 是开映射,$\bigcap_{i=1}^{k}f(\bigcap_{\alpha\in A_i'}U_\alpha)$是空间 Y 的开集.上述关系式说明 y 是$\bigcap_{\alpha\in A'}f(U_\alpha)$的内点.由 y 的任意性知$\bigcap_{\alpha\in A'}f(U_\alpha)$是开集.所以$\{f(U_\alpha):\alpha\in A\}$是内核保持的,故 Y 是 ortho 一紧空间.证完.

问题 有限对一开映射能否保持弱 θ 加细性,弱$\overline{\theta}$加细性、$\delta\theta$加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性、弱$\overline{\delta\theta}$加细性?

关于有限对一开映射的逆象保持问题.本章所涉及的所有覆

盖性质都不能为有限对一开映射的逆象保持，见 Gittings[1977]及林寿[1989b].

§3. 遗 传 性

本章所涉及的覆盖性质，和仿紧空间一样(定理 3.5.16，定理 5.3.1)，都具有闭遗传性，且开遗传性蕴含遗传性.

定理 6.3.1 设 X 具有图 1、图 2 中的某一覆盖性质(meso 紧性、仿 Lindelöf 要加正规性)，则 X 的 F_σ 子空间也具有相应的性质(即空间 X 具有 F_σ 遗传性).

证明 先证弱仿紧性情况. 其余涉及点有限、点可数情况的覆盖性质的证明类似. 然后证 meso 紧性与仿 Lindelöf 性情况.

设 X 是弱仿紧空间，X' 是 X 的 F_σ 子集. X' 可以表为 $X' = \bigcup_{n\in N}F_n$，每一 F_n 是闭集. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族覆盖 X'. 对每一 $n\in N$，置 $\mathscr{U}_n = \{U\in\mathscr{U}: U\cap F_n\neq\varnothing\}$，$\mathscr{U}_n\cup\{X-F_n\}$ 覆盖 X 具有点有限开加细覆盖 $\mathscr{G}_n$. 置

$$\mathscr{W}_1 = \{G\cap X': G\in\mathscr{G}_1, G\cap F_1 = \varnothing\},$$

$$\mathscr{W}_n = \{G\cap X' - (\bigcup_{i<n}F_i): G\in\mathscr{G}_n, G\cap F_n = \varnothing\}, n > 1.$$

容易验证 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 是 X' 的点有限开覆盖加细 $\mathscr{U}$.

设 X 是正规 meso 紧空间(或正规仿 Lindelöf 空间). X' 是 X 的 F_σ 子集. 由于正规空间的 F_σ 子集是正规的(习题 2.10)，正规子空间 X' 可表为 $X' = \bigcup_{n\in N}F_n$，F_n 是闭集且有

$$F_n\subset \mathrm{Int}_{X'}F_{n+1}\subset F_{n+1},\quad n\in N.$$

这里 $\mathrm{Int}_{X'}F_{n+1}$ 表示关于子空间 X' 的集 F_{n+1} 的内核(习题 2.15). 对每一 $n\in N$，用上述方法得到的 $\mathscr{G}_n$ 是紧有限的，从而每一 $\mathscr{W}_n$ 也是紧有限的. 由于 $X' = \bigcup_{n\in N}\mathrm{Int}_{X'}F_n$，而 $\mathrm{Int}_{X'}F_n\subset\mathrm{Int}_{X'}F_{n+1}$，$n\in N$，子空间 X' 的紧集 C 必包含在某 $\mathrm{Int}_{X'}F_n$ 内，所以 C 与 $\mathscr{W}_m(m>n)$ 中任何元不交. 故 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 是 X' 的紧有限开覆盖加细 $\mathscr{U}$.

在仿 Lindelöf 情况. 每一 $\mathscr{G}_n$ 是局部可数的，从而每一 $\mathscr{W}_n$ 也是

局部可数的. 每一点 $x \in X'$, $x \in$ 某 $\mathrm{Int}_{X'}F_n$. $\mathrm{Int}_{X'}F_n$ 作为点 x 的开邻域(关于子空间 X')与 $\mathscr{W}_m (m > n)$ 中任何元不交. 故存在点 x 的开邻域与 $\bigcup_{n \in N}\mathscr{W}_n$ 中有限个元相交, $\bigcup_{n \in N}\mathscr{W}_n$ 是 X' 的局部可数开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 证完.

推论 6.3.2 定理 6.3.1 中的覆盖性质附加完备性后都具有遗传性.

例 6.3.3 强仿紧空间的 F_σ 子空间未必是强仿紧的(习题 6.3). 广义贝勒零维空间 $N(A)$(例 4.1.3), 当 A 是不可数集时, 是强仿紧的(习题 6.3). $N(A)$ 与 $[0,1]$ 的积 $N(A)\times[0,1]$ 也是强仿紧的. 但是作为强仿紧空间 $N(A)\times[0,1]$ 的 F_σ 子集 $N(A)\times(0,1)$ 不是强仿紧的(习题 6.3).

类似于仿紧空间的遗传性情况(定理 5.3.5), 下面给出正则次仿紧是遗传次仿紧的必要与充分条件.

定理 6.3.4(恽自求[1981]) 设 X 是正则次仿紧空间, 则下列论断等价:

(i) X 是遗传次仿紧空间,

(ii) X 的每一开集 G 是一族闭集的并, 且这集族在 G 中是 σ 局部有限的,

(iii) X 的每一开集 G 是一族 F_σ 集的并, 且这集族在 G 中是 σ 遗传闭包保持的.

证明 (ii)⇒(iii)是显然的. 下证(i)⇒(ii)与(iii)⇒(i).

(i)⇒(ii). 因 X 正则, 对开集 G 的每一点 x, 存在 x 的开邻域 $U(x)$ 使 $\overline{U}(x) \subset G$. $\mathscr{U} = \{U_x\}_{x \in G}$ 是遗传次仿紧空间的开子空间 G 的开覆盖. 从而存在由 G 中的闭集组成的在 G 中 σ 局部有限的加细闭覆盖. $\mathscr{V} = \bigcup_{n \in N}\mathscr{V}_n$, 每一 $\mathscr{V}_n$ 在 G 中局部有限. 由于 $\mathscr{V}$ 中每一闭于 G 的集 V 包含在某 $U(x)$ 内, 而 $U(x) \subset \overline{U}(x) \subset G$, 所以 V 是空间 X 中的闭集, $\mathscr{V}$ 满足(ii).

(iii)⇒(i) 设 G 是次仿紧空间 X 的任一开集. 只要证明子空间 G 是次仿紧的.

由(iii), G 可以表示为 $G = \bigcup_{i \in N}\bigcup_{\alpha_i \in A_i}X_{\alpha_i}$. 这里每一 X_{α_i} 是

X 中的F_σ 集，对每一 $i\in N$，$\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in A_i}$在$G$ 中是遗传闭包保持的. 设

$$X_{\alpha_i} = \bigcup_{j\in N} F_{\alpha_{i,j}},$$

对每一 $j\in N$，$F_{\alpha_{i,j}}$是X 中的闭集. 设 $\mathscr{U}$是 G 的开覆盖. 置

$$\mathscr{U}_{\alpha_{i,j}} = \{U \cap F_{\alpha_{i,j}} : U \in \mathscr{U}\}, j \in N, \alpha_i \in A_i,$$

$\mathscr{U}_{\alpha_{i,j}}$覆盖$F_{\alpha_{i,j}}$. $F_{\alpha_{i,j}}$. 是次仿紧空间的闭集，从而是次仿紧的（定理 6.3.1）. 存在 $\mathscr{U}_{\alpha_{i,j}}$的在$F_{\alpha_{i,j}}$中$\sigma$ 闭包保持闭加细覆盖

$$\mathscr{V}_{\alpha_{i,j}} = \bigcup_{k\in N} \mathscr{V}_{\alpha_{i,j,k}}.$$

对每一 $k\in N$，$\mathscr{V}_{\alpha_{i,j,k}}$在$F_{\alpha_{i,j}}$中闭包保持. 因 $F_{\alpha_{i,j}}$是闭集，$\mathscr{V}_{\alpha_{i,j,k}}$也在 X 中闭包保持，从而在 G 中闭包保持.

$$\mathscr{V}^*_{\alpha_{i,j,k}} = \bigcup \{V : V \in \mathscr{V}_{\alpha_{i,j,k}}\} \subset F_{\alpha_{i,j}} \subset X_{\alpha_i}.$$

而$\{X_{\alpha_i}\}_{\alpha_i\in A_i}$ 在G 中遗传性闭包保持，容易证明$\bigcup_{\alpha_i\in A_i}\mathscr{V}_{\alpha_{i,j}}$. 在 G 中闭包保持. 所以

$$\mathscr{V} = \bigcup_{i\in N} \bigcup_{j\in N} \bigcup_{k\in N} \bigcup_{\alpha_i\in A_i} \mathscr{V}_{\alpha_{i,j,k}}$$

是 G 的σ 闭包保持闭覆盖加细 $\mathscr{U}$. 子空间 G 是次仿紧的. 证完.

§4. 可 积 性

覆盖性质的可积性都是很差的（和仿紧性类似）. 要使两个具有相同覆盖性质的空间的积保持这一覆盖性质必须对其中一个空间附加条件.

仿紧空间与紧空间的积是仿紧的（定理 5.4.1）. 这定理的证明是利用完备映射逆保持仿紧性. 推论 6.2.13 指出图 1（除 ortho 紧性外）、图 2 的每一覆盖性质以及强仿紧性都能为完备映射之逆保持. 我们立得下述定理.

定理 6.4.1 设空间 X 具有图 1（除 orthr 紧性外）、图 2 的某一覆盖性质或具有强仿紧性，Y 是紧空间，则积空间 $X\times Y$ 具有相应的覆盖性质.

证明 证法与定理 5.4.1 相同.

再考察关于仿紧空间积的定理 5.4.2:“正则仿紧空间与正则 σ 紧空间的积是仿紧的”. 证明对除利用完备映射逆保持仿紧性外,还用正则仿紧空间的 F_σ 遗传性. 我们利用与之相当的推论 6.2.14 及定理 6.3.1 有下述相应结果.

定理 6.4.2 设正则空间 X 具有图 1(除 ortho 紧性外)、图 2 的某一覆盖性质(meso 紧性、仿 Lindelöf 性要加正规性), Y 是正则 σ 紧空间,则积空间 $X\times Y$ 具有相应的覆盖性质.

证明 证法与定理 5.4.2 相同.

Ortho 紧性不满足定理 6.4.1. 前面例 6.2.15 曾证明 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的,而 $[0,\omega_1)$ 与紧空间 $[0,\omega_1]$ 的积 $[0,\omega_1)\times[0,\omega_1]$ 不是 ortho 紧的、ortho 紧性不满足定理 6.4.1, 当然也不满足定理 6.4.2. 强仿紧性能满足定理 6.4.1, 但不满足定理 6.4.2, 见下面的例.

例 6.4.3 取例 6.3.3 中的广义贝勒零维空间 $N(A)$(例 4.1.3), 当 A 是不可数集时, 是强仿紧空间(习题 6.3), 而 $N(A)$ 与 σ 紧空间 $(0,1)$ 的积 $N(A)\times(0,1)$ 不是强仿紧的(见例 6.3.3, 习题 6.3).

§5. 和 定 理

容易验证,本章所涉及的覆盖性质都关于拓扑和保持. 下面就图 1、图 2 的覆盖性质及强仿紧性考察它们所满足的和定理. 先直接证明弱仿紧性满足局部有限闭和定理作为范例,然后利用映射通过一般性定理(五章 § 5)简接得出结果,以资比较.

定理 6.5.1(Hodel[1969]) 设 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖, 每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 是 X 的弱仿紧子空间, 则 X 是弱仿紧空间.

证明 把 $\mathscr{F}$ 的指标集 A 良序化, 记 $\mathscr{F}=\{F_\alpha:0\leqslant\alpha<\eta\}$(这里 α,η 是序数). 设 $\mathscr{V}=\{V_\sigma:\sigma\in B\}$ 是空间 X 的开覆盖. 由于 $\mathscr{F}$ 的局

部有限性，可以设 $\mathscr{V}$ 的每一元 V_σ 仅与有限个 F_α 相交. 下面用超限归纳法构造 $\mathscr{V}$ 的点有限开加细覆盖.

对每一序数 $\alpha(0\leqslant\alpha<\eta)$，构造如下覆盖 $\mathscr{V}_\alpha$. 首先构造 $\mathscr{V}_0$. 取 $\mathscr{V}$ 中每一元 V_σ 与闭集 F_0 的交，得关于 F_0 的开覆盖 $\{V_\sigma\cap F_0:\sigma\in B\}$. 因 F_0 是弱仿紧的，存在点有限的（关于 F_0 的）开加细覆盖 $\{U_\sigma:\sigma\in B\}$ 使 $U_\sigma\subset V_\sigma\cap F_0,(\sigma\in B)$. 置

$$V_\sigma^0=V_\sigma\cap(X-(F_0-U_\sigma)),\mathscr{V}_0=\{V_\sigma^0:\sigma\in B\}.$$

不难验证 $\mathscr{V}_0$ 具有下列性质：

(i) $\mathscr{V}_0$ 是 X 的开覆盖，

(ii) $V_\sigma^0\subset V_\sigma,(\sigma\in B)$，

(iii) 如 $x\in F_0$，则 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_0)<\omega$，

(iv) 如 $x\in V_\sigma$ 而 $x\notin F_0$，则 $x\in V_\sigma^0$.

设 α 是某固定序数 $(1\leqslant\alpha<\eta)$. 设对 $\beta<\alpha$ 已构造 $\mathscr{V}_\beta=\{V_\sigma^\beta:\sigma\in B\}$ 满足：

(Ⅰ) $\mathscr{V}_\beta$ 是 X 的开覆盖；

(Ⅱ) 对每一 $\sigma\in B$，如 $\gamma<\beta$，则 $V_\sigma^\beta\subset V_\sigma^\gamma$；

(Ⅲ) 如 $x\in\bigcup_{\gamma<\beta}F_\gamma$，则 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_\beta)<\omega$；

(Ⅳ) 如 $x\in\bigcap_{\gamma<\beta}V_\sigma^\gamma$ 及 $x\notin F_\beta$，则 $x\in V_\sigma^\beta$.

现构造集族 $\mathscr{V}_\alpha=\{V_\sigma^\alpha:\sigma\in B\}$ 使满足（Ⅰ）—（Ⅳ）. 对每一 $\sigma\in B$ 置 $W_\sigma^\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}V_\sigma^\beta$ 及 $\mathscr{W}_\sigma=\{W_\sigma^\alpha:\sigma\in B\}$. 下证 $\mathscr{W}_\alpha$ 是 X 的开覆盖. 对每一 $x\in X$，置 $\beta=\max\{\gamma<\alpha:x\in F_\alpha\}$（因 $\mathscr{F}$ 局部有限，从而点有限. 如对每一 $\gamma<\alpha$，$x\notin F_\gamma$，则置 $\beta=0$）. 由（Ⅰ）$\mathscr{V}_\beta$ 是开覆盖，$x\in$ 某 V_σ^β. 由（Ⅱ），$x\in\bigcap_{\gamma\leqslant\beta}V_\sigma^\gamma$. 因 $x\notin F_{\beta+1}$，由（Ⅳ），$x\in V_\sigma^{\beta+1}$，从而 $x\in V_\sigma^{\beta'}(\beta'>\beta)$. 所以 $x\in W_\sigma^\alpha$. $\mathscr{W}_\alpha$ 是 X 的覆盖. 下证 W_σ^α 是开集. 置 $\beta=\max\{\gamma<\alpha:V_\sigma\cap F_\gamma\neq\varnothing\}$（因 $\mathscr{V}$ 中每一元仅与有限个 F_α 相交. 如对每一 $\gamma<\alpha$，$V_\sigma\cap F_\gamma=\varnothing$，则置 $\beta=0$）. 注意如 $V_\sigma^0\cap F_1=\varnothing$，则 $V_\sigma^0=V_\sigma^1$. 依次类推，可知 $V_\sigma^0,V_\sigma^1,\cdots,V_\sigma^\beta,\cdots$ 中只有有限个是不同的. 故 $W_\sigma^\alpha=\bigcap_{\beta<\alpha}V_\sigma^\beta$ 是开集. 到此证明了 $\mathscr{W}_\alpha$ 是开覆盖. 由 $\mathscr{W}_\alpha$ 构造 $\mathscr{V}_\alpha$ 的过程完全与由 $\mathscr{V}$ 构造 $\mathscr{V}_0$ 的过程相同. 这样得到的 $\mathscr{V}_\alpha$ 不

难验证满足(Ⅰ)—(Ⅳ).到此完成了超限归纳法.

最后置 $W_\sigma=\bigcap_{\alpha<\eta}V_\sigma^\alpha$ 及 $\mathscr{W}=\{W_\sigma:\sigma\in B\}$.关于 $\mathscr{W}$ 是开覆盖的证明与证 $\mathscr{W}_\alpha$ 情况相同.显然 $\mathscr{W}$ 加细 $\mathscr{V}$,且由(Ⅲ)$\mathscr{W}$ 是点有限的,所以 X 是弱仿紧空间.证完.

上述定理可简述为"弱仿紧性满足局部有限闭和定理".下面通过映射和一般性定理所得的一系列结果也用此简述形式.

定理 6.5.2 弱仿紧性、次仿紧性及 θ 加细性都满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 因弱仿紧性、次仿紧性及 θ 加细性都关于闭映射保持(定理 6.2.2、定理 6.2.1 及定理 6.2.3),由一般性定理 5.5.6 得证.证完.

比较定理 6.5.1 与定理 6.5.2 的弱仿紧性情况,显然后者强于前者且证明简捷.这依赖于 Worrell 的精致的映射定理.同样次仿紧性及 θ 加细性情况分别依赖于 Burke 及 Junnila 的精致结果.以下定理的情况相同.

定理 6.5.3 Meso 紧性、弱 θ 加细性都满足局部有限闭和定理.

证明 因 meso 紧性、弱 θ 加细性都关于完备映射保持(推论 6.2.5、定理 6.2.8),由一般性定理 5.5.3 得证.证完.

定理 6.5.4 T_1 meso 紧性、正规 meso 紧性满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 因 T_1 meso 紧性关于闭、紧覆盖映射保持(定理 6.2.5),由一般性定理 5.5.12(这定理要求 T_1 性)得证.后面§6 将证明正规 meso 紧性关于闭映射保持(参见例 6.2.7 后的说明),由一般性定理 5.5.6 得证.证完.

定理 6.5.5 仿 Lindelöf 性满足点可数遗传闭包保持闭和定理.

证明 因仿 Lindelöf 性关于闭 Lindelöf 映射保持(定理 6.2.10),由一般性定理 5.5.8 得证.证完.

以上四定理都是借助于映射与一般性定理得到的.这方法起

一定作用.但如 ortho 紧性能否关于有限对一闭映射保持,目前尚未解决(见定理 6.2.8 后的问题),无法引用上述一般性定理,下面关于 ortho 紧性的和定理是 Scott[1977]直接证明的.证明的高度技巧性远远超过定理 6.5.1Hodel 的证明.这里不予转载,读者可读所引 Scott 的论文.

定理 6.5.6(Scott[1977]) Ortho 紧性满足局部有限闭和定理.

证明从略.

至于强仿紧性,两个强仿紧闭子空间的并可以不是强仿紧的(例 6.2.9),不满足上述任何闭和定理.

图 1、图 2 的覆盖性质中,目前尚未能解决其能否满足何种闭和定理的有:弱$\overline{\theta}$加细性、meta-Lindelöf 性、$\delta\theta$ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性及弱$\overline{\delta\theta}$加细性.

§6. iso 紧性与不可约性

在这一节里介绍与前面覆盖性质有关的两种性质:iso 紧性与不可约性.

定义 5.6.1(Bacon[1970]) 空间 X 称为 iso **紧**的(iso-compact),如果这空间的每一可数紧的闭子集是紧的.

前面图 1、图 2 和图 3 的覆盖性质(除 ortho 紧性外)及强仿紧性都是 iso 紧的.关于这些覆盖性的 iso 紧性的证明:仿紧性属于 Dioudonné[1944],次仿紧性属于 Burke[1969],弱仿紧性属于 Arens-Dugundji[1950],meta-Lindelöf 性属于 Aquaro[1966],θ 加细性属于 Worrell-Wicke[1965],$\delta\theta$ 加细性属于 Aull[1973],弱 θ 加细性、弱 $\delta\theta$ 加细性属于 Wicke-Worrell[1976],拟仿紧性属于刘应明[1977].由于图 1、图 2 和图 3 的蕴含关系,下面只要证明弱 $\delta\theta$ 加细性的 iso 紧性.

引理 6.6.2 设 $\mathscr{U}$是一开集族覆盖 S 的闭包$\overline{S}$.则存在无限集 $M\subset S$ 使 $\mathscr{U}$中没有一个开集包含 M 的两个点,从而集 M 无聚

点.

证明 把集 S 良序化.下面构造超限序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha<\eta}$.取 S 的首元素作为 $\{x_\alpha\}_{\alpha<\eta}$ 的首项 x_0.设对 $\alpha<\gamma(\gamma<\eta)$,$x_\alpha$ 已取定.置 $E_\gamma = S - \mathrm{st}(\{x_\alpha:\alpha<\gamma\},\mathscr{U})$,取 E_γ 的首元素作为 x_γ.得超限序列 $\{x_\alpha\}_{\alpha<\eta}$.置 $M=\{x_\alpha:\alpha<\eta\}$,则 $\mathscr{U}$ 中没有一个开集包含 M 的两个点.如果 M 有聚点 x,$x\in\overline{S}$.存在 $U\in\mathscr{U}$ 使 $x\in U$.U 包含 M 的两个点.矛盾.证完.

定理 6.6.3(Wicke-Worrell[1976]) 弱 $\delta\theta$ 加细空间是 iso 紧的.

证明 由于弱 $\delta\theta$ 加细空间是闭遗传的,由定义 5.6.1 只要证明弱 $\delta\theta$ 加细的可数紧空间是紧空间.

设 X 是弱 $\delta\theta$ 加细的可数紧空间,$\mathscr{U}$ 是 X 的开覆盖,存在开加细覆盖 $\mathscr{V}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$,每一 $x\in X$,存在 $n\in N$ 使 $0<\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant\omega$.置 $C_n=\{x:0<\mathrm{ord}(x,\mathscr{V}_n)\leqslant\omega\}$.显然,$X=\bigcup_{n\in N}C_n$.用 $F(\mathscr{U})$ 表示 X 的所有能为 $\mathscr{U}$ 的可数子族覆盖的闭子集所成集族.要证明 $X\in F(\mathscr{U})$.从而由 X 的可数紧性得证.

用反证法.如 $X\notin F(\mathscr{U})$,则必有某些 $C_m\notin F(\mathscr{U})$.设 n_0 是最小自然数 m 使 $C_m\notin F(\mathscr{U})$.设 $\mathscr{W}_0$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子族覆盖所有的 C_m $(m<n_0)$.置 $E_0=X-\mathscr{W}_0^*$.(如果 $C_1\notin F(\mathscr{U})$,则 $E_0=X$).这里 E_0 是 X 的闭子集,$E_0\cap C_m=\varnothing(m<n_0)$.设 $k\in N$,对所有 $j\leqslant k$,都有:(1)E_j 是 X 的闭子集,(2)n_j 是最小自然数 m 使 $E_j\cap C_m\notin F(\mathscr{U})$,(3)$E_{j+1}\subset E_j$(如 E_{j+1} 有定义),(4) $E_j\cap C_m=\varnothing(m<n_j)$.置 $B=E_k-\mathscr{V}_{n_k}^*$,$B$ 是闭集.下证 $B\notin F(\mathscr{U})$.如不然,存在 $\mathscr{U}$ 的可数子族 $\mathscr{V}$ 覆盖 B,则由引理 6.6.2,存在无限集 $M\subset B\subset E_k\subset X$,$M$ 无聚点,这与 X 的可数紧性矛盾.所以 $B\notin F(\mathscr{U})$.则必有某些 C_m 使 $B\cap C_m\notin F(\mathscr{U})$.设 n_{k+1} 是最小的自然数 m 使 $B\cap C_m\notin F(\mathscr{U})$.设 $\mathscr{W}_{k+1}$ 是 $\mathscr{U}$ 的可数子族覆盖所有 $B\cap C_m(m<n_{k+1})$.置 $E_{k+1}=B-\mathscr{W}_{k+1}^*$,则(1)—(4)对 $j=k+1$ 成立.从而存在序列 $\{E_k\}_{k\in N}$,$\{n_k\}_{k\in N}$ 满足(1)—(4).由(4),$\bigcap_{k\in N}E_k=\varnothing$.这与 X

的可数紧性矛盾. 故知 $X \in F(\mathscr{U})$. 定理得证. 证完.

注记 ortho 紧空间不是 iso 紧的. 在引理 6.2.18 后对空间 $[0,\omega_1)$ 的讨论中指出 $[0,\omega_1)$ 是 ortho 紧的, 而 $[0,\omega_1)$ 是可数紧的但不是紧的. 由定义 6.6.1 知 ortho 紧空间不是 iso 紧的. 另外, 由定理 6.6.3 知 $[0,\omega_1)$ 不是弱 $\delta\theta$ 加细的. 事实上, $[0,\omega_1)$ 不具有下述许多弱于弱 $\delta\theta$ 加细而是 iso 紧的性质.

下面学者们所引入的都是更弱的 iso 紧空间: Worrell-Wicke [1980] 引入**弱 $(\omega_1,\infty)^r$ 加细空间**作为弱 $\delta\theta$ 空间的自然推广. 从不同途径, Davis[1979] 引入具有 **θL 性质**的空间, Arhangel'skii [1980] 引入 **pure 空间**都作为弱 $\delta\theta$ 空间的推广. Sakai[1986] 引入 **neat 空间**作为上述三类空间的共同推广.

下面叙述 iso 紧空间的性质.

由定义 6.6.1 容易验证 iso 紧空间是闭遗传的. 下证 iso 紧空间也是 F_σ 遗传的.

定理 6.6.4 iso 紧空间的 F_σ 子空间是 iso 紧的.

证明 设 E 是 iso 紧空间 X 的 F_σ-子集. 记 $E=\bigcup_{n\in N}F_n$, 每一闭集 $F_n(n\in N)$ 是 iso 紧的. 设 M 是子空间 E 的可数紧闭子集. 设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开集族覆盖 M. 对每一 $n\in N$, $M\cap F_n$ 是 F_n 的可数紧闭子集, 从而是紧的, 为 $\mathscr{U}$ 的有限子族覆盖. 所以 M 为 $\mathscr{U}$ 的可数子族覆盖. 因 M 是可数紧的, 故为 $\mathscr{U}$ 的有限子族覆盖, M 是紧的. 所以 E 是 iso 紧的. 证完.

映射 $f: X\to Y$ 称为**准 k 映射**(quasi-k-mapping), 如果对 Y 中的每一可数紧集 K, $f^{-1}(K)$ 是 X 中的可数紧集(回忆定义 5.5.11 中的 k 映射及五章 §2 中的准完备映射).

定义 6.6.5 设 $f: X\to Y$ 是 iso 紧空间 X 到空间 Y 上的准 k 映射, 则 Y 是 iso 紧空间.

证明 设 K 是空间 Y 的可数紧闭子集, 则 $f^{-1}(K)$ 是空间 X 的可数紧闭子集, 从而是紧的, 所以 K 是 Y 中紧集. 证完.

由于准完备映射 $f: X\to Y$ 使 Y 中的可数紧集的原象为 X 中的可数紧集, 即准完备映射→准 k 映射(见习题 3.31), 故有下述

推论.

推论 6.6.6 准完备映射保持 iso 紧性.

定理 6.6.7 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到 iso 紧空间 Y 上的完备映射,则 X 是 iso 紧空间.

证明 设 M 是空间 X 的可数紧闭子集,则 $f(M)$ 是空间 Y 的可数紧闭子集,从而是紧的. 由于完备映射是 k 映射(习题 3.30),$f^{-1}(f(M))$ 是紧的. M 是 $f^{-1}(f(M))$ 的闭子集,M 是紧的. 证完.

定理 6.6.8(Miller[1988]) 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到 T_1 iso 紧空间 Y 上的闭映射,且对每一 $y\in Y$,$f^{-1}(y)$ 是 iso 紧的,则 X 是 iso 紧空间.

证明 设 M 是空间 X 的可数紧闭子集,则 $f(M)$ 是空间 Y 的可数紧闭子集,从而 $f(M)$ 是紧集. 考察 f 在 M 上的限制 $f|_M$: $M\to f(M)$,$f|_M$ 是闭映射. 对每 $y\in f(M)$,$f|_M^{-1}(y)$ 是 M 的闭子集,从而是可数紧的. 此外,$f|_M^{-1}(y)$ 也是 $f^{-1}(y)$ 的闭子集,从而是 iso 紧的. 所以 $f|_M^{-1}(y)$ 是紧的,$f|_M$ 是完备映射. 因 $f(M)$ 是紧的,M 是紧的(习题 3.30). 所以 X 是 iso 紧空间. 证完.

上述结果很有趣,因为对一般的覆盖性质(例如仿紧性),类似的结果不能成立(见习题 5.11,5.12).

定理 6.6.9 iso 紧空间与紧空间的积是 iso 紧的.

证明 由定理 6.6.7 及定理 3.3.1 得证.

定理 6.6.10 可数个 iso 紧闭子集的并是 iso 紧的.

证明 证明包含在定理 6.6.4 的证明中.

定理 6.6.11 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 T_1 空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖,每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 是 iso 紧的,则 X 是 iso 紧的.

证明 设 M 是 T_1 空间 X 的可数紧闭子集. 由引理 5.5.10, M 为有限个 F_α 覆盖. 设 $M\subset\bigcup_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}$. 由 定理 6.6.10, $\bigcup_{i=1}^{n}F_{\alpha_i}$ 是 iso 紧的. 从而 M 是紧的,X 是 iso 紧的. 证完.

下面利用 iso 紧性叙述两个映射间的转换定理(定理 6.6.13

及定理 6.6.16).

引理 6.6.12 正规 iso 紧空间到可数紧空间上的闭映射是边缘紧映射(即对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$的边缘 $F_rf^{-1}(y)$是紧的).

证明 由 iso 紧性的定义 6.6.1,只要证明每一闭集 $F_rf^{-1}(y)$是可数紧的. 证明仿照"正规伪紧空间是可数紧的"(定理 3.5.13)的证法,把引理 4.4.10 的结果(参见这引理后的注记)代替那里的伪紧性. 证完.

定理 6.6.13(高国士[1986 b]) 正规 iso 紧空间 X 到空间 Y 上的闭映射是紧覆盖映射.

证明 设 K 是空间 Y 的紧集. 因 X 是正规的, f 是闭映射,所以 Y 是 T_2 的. 紧集 K 闭于 Y. 从而 $f^{-1}(K)$闭于 X. f 在闭集 $f^{-1}(K)$上的限制 $g=f|_{f^{-1}(K)}$仍是闭的. 由于正规性、iso 紧性都是闭遗传的,所以 g 是正规的紧空间到紧空间 K 上的闭映射. 由引理 6.6.13, g 是边缘紧的. 由引理 4.4.11,存在闭集 $C\subset f^{-1}(K)$使 g 在 C 上的限制 $h=g|_C$ 是 C 到紧集 K 上的完备映射. 所以 C 是紧集(习题 3.31). 由于 $C\subset f^{-1}(K)\subset X$,所以 $f(C)=g(C)=h(C)=K$. 证完.

注记 作为定理 6.6.13 的应用,可以用来证明前面的定理 6.2.8(闭映射保持正规 meso 紧性). 由于闭的紧覆盖映射保持 meso 紧性(定理 6.2.4),而 meso 紧性是 iso 紧的(定理 6.6.3),故定理 6.6.13 得证.

推论 6.6.14(Michael[1964]) T_2 仿紧空间 X 到空间 Y 上的闭映射是紧覆盖映射.

引理 6.6.15 设 f 是正规空间 X 到空间 Y 上的闭映射, $\{y_n\}_{n\in N}$ 是 $Y-\{y_0\}$ 中收敛于 y_0 的点列,则 $f^{-1}(y_0)\cap\overline{\bigcup_{n\in N}f^{-1}(y_n)}$是可数紧的.

证明 令 $K=f^{-1}(y_0)\cap\overline{\bigcup_{n\in N}f^{-1}(y_n)}$. 首先,由于 f 是闭映射,

$$f(\overline{\bigcup_{n\in N}f^{-1}(y_n)})\supset\overline{\{y_n\}_{n\in N}}=\{y_1,y_2,\cdots,y_n,\cdots,y_0\},$$

所以闭集 $K\neq\varnothing$.

用反证法.如果闭集 K 不是可数紧的,则存在点列 $\{x_n\}_{n\in N}\subset K$ 在 K 中无聚点.从而集 $\{x_n:n\in N\}$ 的任何子集是闭的,所以 $\{\{x_n\}:n\in N\}$ 是由单点集组成的离散闭集族.由习题 2.28,存在离散开集族 $\{G_n\}_{n\in N}$ 使 $x_n\in G_n(n\in N)$.由于 $x_n\in K\subset f^{-1}(y_0)$ 及 $f^{-1}(y_0)\cap(\bigcup\limits_{n\in N}f^{-1}(y_n))=\varnothing$,而对每一 n,$\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(y_i)$ 是闭集,从而可取 G_n 使满足(必要时,可以 $G_n-\bigcup_{n=1}^{n}f^{-1}(y_i)$ 代 G_n)

$$G_n\cap(\bigcup_{i=1}^{n}f^{-1}(y_i))=\varnothing. \tag{1}$$

由于 $x_n\in\overline{\bigcup\limits_{n\in N}f^{-1}(y_n)}$,故 $G_n\cap(\bigcup_{n\in N}f^{-1}(y_n))\neq\varnothing$.取

$$Z_n\in G_n\cap(\bigcup_{n\in N}f^{-1}(y_n)),$$

确定 $i(n)\in N$,使 $Z_n\in f^{-1}(y_{i(n)})$.由(1)有 $i(n)>n(n\in N)$.从而可以选取 n_j 使

$$n_1<n_2<\cdots,i(n_1)<i(n_2)<\cdots.$$

由于 $Z_{n_j}\in G_{n_j}(j\in N)$,所以 $\{\{Z_{n_j}\}:j\in N\}$ 是离散闭集族.从而可数集 $\{Z_{n_j}:j\in N\}$ 是闭的.因为 f 是闭映射,所以作为它的象,也就是集 $\{y_{i(n_j)}:j\in N\}$ 是闭的.但是 $\{y_{i(n_j)}\}_{j\in N}$ 是 $\{y_n\}_{n\in N}$ 的子序列应以 y_0 为聚点.这一矛盾证明 K 是可数紧集.证完.

空间 X 称为 **Fréchet 空间**,如果对每一 $A\subset X$,每一 $x\in\overline{A}$,存在 A 中的点列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 收敛于 x.映射 $f:X\to Y$ 称为**不可约的**(irreducible),如果不存在 X 的闭的真子集 F 使 $f(F)=Y$.

定理 6.6.16(高国士[1986 b]) 设 f 是正规 iso 紧空间到 Fréchet 空间 Y 上的闭映射,则存在闭集 $X'\subset X$ 使 $f|_{X'}$ 是 X' 到 Y 上的不可约映射.

证明 对空间 Y 的每一孤立点 y,任取 $x_y\in f^{-1}(y)$.置

$X_0=\{x_y:y$ 是 Y 的孤立点$\}\cup(\bigcup\{f^{-1}(y):y$ 不是 Y 的孤立点$\})$. (2)

对每一 $x\notin X_0$,$x\in$ 某 $f^{-1}(y)$,y 是 Y 中的孤立点.从而 $f^{-1}(y)$ 是开集,而 $\{x_y\}$ 是闭集,故点 x 的开邻域 $f^{-1}(y)-\{x_y\}$ 与 X_0 不

交，X_0 是闭集．从而 $g=f|_{X_0}$ 是 X_0 到 Y 上的闭映射．如果 g 是不可约的，则已得证．如不然，则必存在子空间 X_0 的不空开集 U_0 使 $g(X_0-U_0)=Y$．下面利用 *Zorn* 引理完成证明．

设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:U_\alpha$ 是 X_0 的不空开集，$g(X_0-U_\alpha)=Y\}$．规定 $\mathscr{U}$ 中元素的次序：$U_\alpha<U_{\alpha'}$，当且仅当 U_α 是 $U_{\alpha'}$ 的真子集．任取链 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$，设 $\mathscr{U}'=\{U_\alpha:\alpha<\beta\}$，$\beta$ 是一序数，下证链 $\mathscr{U}'$ 有上界．

(i) 当 β 不是极限序数时，如 $g|_{X_0-U_{\beta-1}}$ 不是不可约的，则存在 X_0 的不空开集 $U_0\subset X_0-U_{\beta-1}$ 使 $g((X_0-U_{\beta-1})-U_0)=Y$．令 $U_\beta=U_{\beta-1}\cup U_0$，显然 $U_{\beta-1}<U_\beta$ 且 $g(X_0-U_\beta)=Y$．所以 U_β 是链 $\mathscr{U}'$ 的上界．

(ii) 当 β 是极限序数时，令 $U_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta}U_\alpha$．下证 $g(X_0-U_\beta)=Y$．设不然，存在 $y_0\in y-g(X_0-U_\beta)$ 使 $g^{-1}(y_0)\subset U_\beta$，但 $g^{-1}(y_0)\not\subset U_\alpha(\alpha<\beta)$．由(2)及 g 的定义，知 y_0 不是空间 Y 的孤立点(如 y 是孤立点，则 $g^{-1}(y_0)=x_{y_0}$．$x_{y_0}\in U_\beta=\bigcup_{\alpha<\beta}U_\alpha\Rightarrow x_{y_0}\in$ 某 U_α，这与 $g(X_0-U_\alpha)=Y$ 矛盾)．因 Y 是 Fréchet 空间，存在点列 $\{y_n\}_{n\in N}\subset Y-\{y_0\}$ 使 $\{y_n\}_{n\in N}$ 收敛于 y_0．置

$$K=g^{-1}(y_0)\cap\overline{\bigcup_{n\in N}g^{-1}(y_n)}.$$

由于正规性．iso 紧性都是闭遗传的，由引理 6.6.15，K 是可数紧的，由 X_0 的 iso 紧性知 K 是紧集．按 $K\subset g^{-1}(U_0)\subset U_\beta$．因 K 是紧集，存在 $\alpha<\beta$ 使 $K\subset U_\alpha$．因 Y 是 T_2 的，紧集 $\{y_n\}_{n\in N}\cup\{y_0\}$ 是闭集．从而 $g^{-1}(y_0)\cup(\bigcup_{n\in N}g^{-1}(y_n))$ 是闭集．令 $H=\bigcup_{n\in N}g^{-1}(y_n)$．由于 $g^{-1}(y_0)\cap H=\varnothing$，所以 $K=g^{-1}(y_0)\cap(\overline{H}-H)$．因 $g^{-1}(y_0)\cup H$ 是闭的，$\overline{H}\subset g^{-1}(y_0)\cup H$，$\overline{H}-H\subset g^{-1}(y_0)$．所以 $K=\overline{H}-H$，从而 $\overline{H}-H\subset U_\alpha$．$H-U_\alpha=(H\cup(\overline{H}-H))-U_\alpha=\overline{H}-U_\alpha$．所以 $H-U_\alpha$ 是闭集．因 g 是闭映射，闭集 $g(H-U_\alpha)\subset\{y_n\}_{n\in N}$．按 $\{y_n\}_{n\in N}$ 收敛于 y_0，闭集 $g(H-U_\alpha)$ 只能是有限集．从而存在 $m\in N$，使 $n\geqslant m$ 时，$g^{-1}(y_n)\subset U_\alpha$．这与 $g(X_0-U_\alpha)=Y$ 矛盾．这一矛盾证明了 $g(X_0-U_\beta)=Y$．所以 U_β 是这链

$\mathscr{U}'$的上界.

由 Zorn 引理,$\mathscr{U}$中有极大元 U.从而 $g|_{X_0-U}$是不可约的.置 $X'=X_0-U$.$f|_{X'}$是X'到 Y 上的不可约映射.证完.

推论 6.6.17(Lǎšnev[1965]) 设 f 是 T_2 仿紧空间 X 到 Fréchet 空间上的闭映射,则存在闭子集 $X'\subset X$ 使$f|_{X'}$是X'到 Y 上的不可约映射.

下面叙述本节的第二个内容——不可约空间.

定义 6.6.18 空间 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$称为**最小的**(minimal),如果不存在 $\mathscr{U}$的真子族覆盖 X.空间 X 称为**不可约的**(irreducible).如果 X 的每一开覆盖具有最小的加细开覆盖.

Aren-Dugundji[1950]在证明弱仿紧空间是 iso 紧时得到弱仿紧空间是不可约的.

定理 6.6.19(Aren-Dugundji[1950]) 空间 X 的每一点有限开覆盖具有最小子覆盖.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是空间$X$ 的点有限开覆盖.考察在 $\mathscr{U}$中去掉某些 U_α 后形成的 $\mathscr{U}$的子覆盖全体,记作 Φ.Φ 中的元可以看作由指标集 A 到 $\mathscr{U}\cup\{\varnothing\}$上的映射 f 满足:

$$(1) f(\alpha) = U_\alpha, \text{或 } f(\alpha) = \varnothing \text{ 及} (2) \bigcup_{\alpha\in A} f(\alpha) = X.$$

对每一 $f\in\Phi$.置 $A_f=\{\alpha:\alpha\in A, f(\alpha)=\varnothing\}$.在集 Φ 上定义序“$<$”:$f<f'$当且仅当$A_f\subset A_{f'}$.Φ 形成半序集.任取 Φ 的全序子集Φ_0.下证 Φ_0 有上界.

置 $f_0(\alpha)=\bigcap_{f\in\Phi}f(\alpha),\alpha\in A$.考察由此形成的映射 f_0.下证 $f_0\in\Phi_0$.f_0 显然满足(1).对每一 $x\in X$,x 属于有限个 U_α.置 $A_{f_0}=\{\alpha:\alpha\in A, f_0(\alpha)=\varnothing\}$.这有限个足标 α 中如有一个$\alpha\notin A_{f_0}$,则显然满足(2).从而 Φ_0 有上界.如这有限个 α 都属于A_{f_0},下证这是不可能的.这时必有一 $f\in\Phi_0$ 使这有限个 α 包含在A_f 内,从而 f 不满足(2),与 $f\in\Phi_0$ 矛盾.

由 Zorn 引理,Φ 中有极大元 f^*.$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A-A_{f^*}}$形成 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$的最小子覆盖.证完.

推论 6.6.20 弱仿紧空间是不可约的.

证明 由定义 6.6.18 及定理 6.6.19 得证.

Worrell-Wicke[1965]宣告 θ 加细空间是不可约的未给出证明. Christian[1972a,1972b]证明了次仿紧空间是不可约的. Boone[1975]给出了 θ 加细是不可约的证明,并提出弱 θ 加细空间是否不可约? Van Douwen-Wicke[1977]构造了一个正则、弱 θ 加细而非不可约的空间,否定地回答了上述问题. 弱$\overline{\theta}$加细空间是否不可约引起学者们的兴趣. Boone[1976], Smith[1976]用不同方法证明了弱$\overline{\theta}$加细是不可约的. 他们的证明技巧性很强,都很冗繁. Mashburn[1984]证明了 T_1 的 $\delta\theta$ 加细空间及 T_1 的弱$\overline{\delta\theta}$加细空间都是不可约的. 这里 T_1 不能去掉,容易构造不是 T_1 的非不可约的 Lindelöf 空间(习题 6.21). 他的证明技巧性更强,因为前面关于点有限的一些方法不适于点可数情况. 证明很冗繁,不予引载. 读者可阅所引文献. 关于不可约空间的综合介绍见高国士[1989]. 下面是不可约空间的刻画.

定理 6.6.21(Boone[1975]) 空间 X 是不可约的,当且仅当对 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 存在离散闭集族 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$,每一 $F_\beta\neq\varnothing$,使 $B\subset A$, $F_\beta\subset U_\beta(\beta\in B)$ 且 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 覆盖 X.

证明 必要性. 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是不可约空间 X 的开覆盖. 设 $\{V_\alpha:\alpha\in B\subset A, V_\alpha\neq\varnothing\}$ 是 X 的最小开覆盖精确地加细 $\mathscr{U}$. 对每一 $\beta\in B$ 置 $F_\beta=X-\bigcup\{V_\alpha:\alpha\neq\beta\}$,由覆盖的最小性知每一 $F_\beta\neq\varnothing$. 则得离散闭集族 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$ 使 $B\subset A$, $F_\beta\subset U_\beta(\beta\in B)$ 且 $\{U_\beta:\beta\in B\}$ 覆盖 X.

充分性. 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的开覆盖. 存在离散闭集族 $\{F_\beta\}_{\beta\in B}$,每一 $F_\beta\neq\varnothing$,使 $B\subset A$, $F_\beta\subset U_\beta(\beta\in B)$ 且 $\{U_\beta\}_{\beta\in B}$ 覆盖 X. 对每一 $\beta\in B$,置 $V_\beta=U_\beta-\bigcup\{F_\alpha:\alpha\neq\beta\}$,则 $\{V_\beta\}_{\beta\in B}$ 是 X 的最小开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 证完.

定理 6.6.22 在不可约空间,

(i) 可数紧性与紧性等价,

(ii) $\aleph_1$ 紧($\aleph_1$-compact)性(每一不可数子集有聚点)与 Lindelöf 性质等价.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是不可约空间 X 的开覆盖. 由定理 6.6.21,存在离散闭集族$\{F_\beta\}_{\beta\in B\subset A}$满足定理 6.6.21 的条件,易知在可数紧($\aleph_1$ 紧)空间中每一离散集族是有限的(可数的),故 $\mathscr{U}$ 具有有限(可数)子覆盖. 证完.

注记 空间$[0,\omega_1)$是可数紧而不是紧的,由定理 6.6.22 的(i)知$[0,\omega_1)$不是不可约空间. 由于$[0,\omega_1)$是 ortho 紧的,故 ortho 紧空间不是不可约的(参见定理 6.6.3 后的注记). 定理 6.6.22 给出的不可约空间的性质(i)与 iso 紧的定义(定义 6.6.1)有些类似. 可能会想到不可约性能蕴含 iso 紧,事实不然,见下面的例.

1976 年 Van Douwen 宣告"每一空间可以作为闭子集浸没于某一不可约空间",未见其构造. 下面的构造是 Davis-Smith 1979 年给出的.

例 6.6.23(Davis-Smith[1979]) 对任一空间 X 作积空间 $X\times[0,\omega]$并使 $X\times[0,\omega)$中的点都是孤立点. 把由此而得的空间记作 $\mathscr{I}(X)$. 显然 X 同胚于 $\mathscr{I}(X)$中的闭子集 $X\times\{\omega\}$. 设 $\mathscr{U}$ 是 $\mathscr{I}(X)$的任一开覆盖. 对每一 $x\in X$ 选取 $n_x\in[0,\omega)$及 U_x 开于 X 使 $U_x\times[n_x,\omega]$包含在 $\mathscr{U}$ 中的某开集内. 设 $A_n=\{x:n_x=n\}$. 令

$$V_x=(U_x\times[n_x+1,\omega])\cup\{(x,n_x)\}.$$

V_x 仍包含在 $\mathscr{U}$ 中的某开集内. 置

$$\mathscr{W}_0=\{V_x:x\in A_0\},\mathscr{W}_1=\{V_x:x\in A_1\text{ 且}(x,\omega)\notin\mathscr{W}_0^*\},$$

$$\mathscr{W}_n=\{V_x:x\in A_n\text{ 且}(x,\omega)\notin\bigcup_{i<n}\mathscr{W}_i^*\},n>1,$$

$$\mathscr{W}_\omega=\{\{p\}:p\in\mathscr{I}(X)-\bigcup_{n<\omega}\mathscr{W}_n^*\}.$$

易知 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\leqslant\omega}\mathscr{W}_n$ 是 X 的最小开覆盖加细 $\mathscr{U}$. $\mathscr{I}(X)$是不可约的.

这例说明:(1)不可约性不是闭遗传的. 可取 X 为任一非不可约空间. X 的同胚象 $X\times\{\omega\}$是不可约空间 $\mathscr{I}(X)$的闭子集. (2)不可约性$\not\Rightarrow$ iso 紧性. 可取 X 为任一非 iso 紧的空间,相应的不可约空间 $\mathscr{I}(X)$必非 iso 紧的. 不然的话,由于 iso 紧性是闭遗传的,X

也将是 iso 紧的. 矛盾.

关于不可约空间性质的研究是很不够的，有许多问题没有解决(见高国士[1979]). Boone[1975]提出："不可约空间的映射性质怎样？特别 Arhangelskii 的 MOBI 类的每一空间是否都是不可约的?"下面是朱俊[1991]的一些结果.

定理 6.6.24(朱俊[1991]) 设空间 X 是不可约的，闭集 $A \subset X$，则商空间 X/A 是不可约的.

证明 设 $\mathscr{U}$ 是 X/A 的任一开覆盖. 即 $U_0 \in \mathscr{U}$ 使点 $A \in U_0$. 令 $\mathscr{U}' = \{U - \{A\} : U \in \mathscr{U}\} \cup \{U_0\}$. 设 f 是 X 到 X/A 上的商映射. 由 X/A 上的商拓扑，X/A 中的单点集 $\{A\}$ 是闭的. 所以 $\mathscr{U}'$ 是 X/A 的开覆盖加细 $\mathscr{U}$. 从而 $f^{-1}(\mathscr{U}')$ 是 X 的开覆盖. 从而有加细 $f^{-1}(\mathscr{U}')$ 的 X 的最小开覆盖 $\mathscr{V}$. 令

$$\mathscr{V}_1 = \{V : V \in \mathscr{V}, V \cap A = \varnothing\}, \mathscr{V}_2 = \mathscr{V} - \mathscr{V}_1.$$

由于 $f: X - A \to X/A - \{A\}$ 是同胚映射，所以 $f(\mathscr{V}_1)$ 是加细 $\mathscr{U}$ 的关于 $X/A - f(\mathscr{V}_2^*)$ 的最小开集族. 因 $A \subset \mathscr{V}_2^*$，$f(\mathscr{V}_2^*)$ 是 X/A 中包含点 A 的开集. 又因每一 $V \in \mathscr{V}_2$，$V \cap A \neq \varnothing$，所以 V 必含于 $f^{-1}(U_0)$. 从而 $\mathscr{V}_2^* \subset f^{-1}(U_0)$，$f(\mathscr{V}_2^*) \subset U_0$. 所以 $f(\mathscr{V}_1) \cup \{f(\mathscr{V}_2^*)\}$ 是 X/A 的最小开覆盖加细 $\mathscr{U}$. X/A 是不可约的. 证完.

例 6.6.25(朱俊[1991]) 二对一的开映射不能保持不可约性.

设 X 是非不可约空间，令 $Z = X \times \{0,1\}$. 对 $(x,0) \in Z$，规定 $\{V_x \times \{0\} : V_x$ 是 x 在 X 中的邻域$\}$ 为 $(x,0)$ 的邻域基. 对 $(x,1) \in Z$，规定 $\{V_x \times \{0\} \cup \{(x,1)\} : V_x$ 是 x 在 X 中的邻域$\}$ 为 $(x,1)$ 的邻域基. 定义 $f: Z \to X$ 为 $f((x,i)) = x, (i = 0,1)$. 则 f 是开映射. 下证 Z 是不可约的. 因 Z 的每一开覆盖都有形如 $\{V_x \times \{0\} \cup \{(x,1)\} : x \in X\}$ 的加细开覆盖，这开覆盖是最小的. 证完.

由上述定理 6.6.24 及例 6.6.25，提如下问题.

问题 不可约空间能否为闭映射(或完备映射)保持?

Arhangel'skii[1966]定义 MOBI 类作为所有满足下列二条件的拓扑空间类的交：(1)每一度量空间属于这类. (2)这类的每一空

间在开紧映射下的象属于这类. Bennett[1970]给出如下刻画:"空间 Y 是 MOBI 中的元当且仅当存在一度量空间 M 及有限个开紧映射:$\varnothing_1,\varnothing_2,\cdots,\varnothing_n$ 使$(\varnothing_1\circ\varnothing_2\circ\cdots\circ\varnothing_n)(M)=Y$". 所谓开紧映射 $f:X\to Y$ 是指 f 是开映射,且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是紧集. Boone[1975]提出 MOBI 类的每一元是否都是不可约的?

定理 6.6.26(高国士[1995]) Arhangel'skii 的 MOBI 类的每一空间都是不可约空间.

证明从略.

上述定理的有趣在于二对一的开映射尚不能保持不可约空间,而由度量空间经任意有限回开紧映射形成的 MOBI 类的每一元却是不可约空间.

习 题 六

6.1 (Arhangel'skii[1965]) 证明:正则 k 空间 X 是仿紧的当且仅当 X 的每一开覆盖 $\mathscr{U}$ 具有紧有限的闭加细覆盖. 正规 k 空间 X 是仿紧的当且仅当 X 是 meso 紧的.

6.2 证明:弱仿紧空间是点态集态正规的. Sorgenfrey 直线与自身的积是次仿紧的,不是弱仿紧的,从而不是点态集态正规的. 点态集态正规性是 F_σ 遗传的,为闭映射保持.

6.3 证明广义贝勒零维空间 $N(A)$(例 4.1.3)当 A 是不可数集时是强仿紧空间. (Nagata[1957])证明 $N(A)\times(0,1)$当 A 是不可数集时不是强仿紧空间(这里$(0,1)$是数直线上的开区间).

6.4 (Bennet-Lutzer[1972]) 在实数集 R 上赋以如下拓扑:无理点是开的,有理点 x 的邻域基为$\{G(x,n)\}_{n\in N}$,这里 $G(x,n)=\{x\}\cup\{y:y$ 是无理点且$|y-x|<1/n\}$. 试证明 X 是 T_2 弱$\bar{\theta}$加细空间而不是 θ 加细空间.

6.5 (Gruenhage[1979]) 空间 X 称为**点星 ortho 紧的**(pointwise star-orthocompact),如对 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在内核保持开覆盖$\{V_x\}_{x\in X}$使对每一 x,满足 $x\in V_x\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U})$. 证明点星 ortho 紧性为闭映射保持.

6.6 (Junnila[1978]) 空间 X 称为**离散 ortho 紧的**(discretely orthocompact),如对 X 的任一离散闭集族$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$及任一开集族$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$使 $F_\alpha\subset$

$U_\alpha, \alpha \in A$,存在 X 的内核保持开集族 $\{V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 满足 $F_\alpha \subset V_\alpha \subset U_\alpha, \alpha \in A$. 证明离散 ortho 紧性为闭映射保持.

6.7 (周金元[1987]) 空间 X 称为**局部有限 ortho 紧的**(lccally finitely orthocompact),如把上题中的闭集族 $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 的"离散"改为"局部有限". 证明:

(i) 局部有限 ortho 紧性为闭映射保持,

(ii) 点星 ortho 紧→局部有 ortho 紧. 从而有 ortho 紧→点星 ortho 紧→局部有限 ortho 紧→离散 ortho 紧,

(iii) $[0, \omega_1) \times [0, \omega_1]$ 不是点星 ortho 紧的而是局部有限 ortho 紧的.

6.8 (戴牧民,[1983]) 空间 X 称为 ***Lindelöf 空间**如果对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$,存在可数开覆盖 $\mathscr{V}$ 加细 $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U})\}_{x \in X}$. 证明:

(i) X 是 *Lindelöf 空间的充要条件是对 X 的任一开覆盖 $\mathscr{U}$ 存在可数子集 $\{x_n\}_{n \in N}$ 使 $\bigcup_{n \in N} \mathrm{st}(x_n, \mathscr{U}) = X$,从而 *Lindelöf 空间是 Lindelöf 空间与可分空间的共同推广,

(ii) *Lindelöf 空间为连续闭映射保持,

(iii) X 是 Lindelöf 空间当且仅当 X 是 *Lindelöf 空间及 meta-Lindelöf 空间.

6.9 (高国士[1980]) 设 X 是强仿紧空间且可分解为至多可数个连通区(成分)的并,则 X 是 Lindelöf 空间,从而知连通的强仿紧空间是 Lindelöf 空间.

6.10 设 A 是不可数集. 对每一 $\alpha \in A$, I_α 是单位区间 $I = [0,1]$ 的拷贝. 在并 $\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ 中把所有的 0 叠合为一点得到集 $S(A)$. 定义度量

$$\rho(x, y) = \begin{cases} |x - y|, \text{如 } x, y \in I_\alpha, \alpha \in A, \\ x + y, \text{如 } x \in I_\alpha, y \in I_\beta, \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

则 $S(A)$ 是度量空间. 试证明 $S(A)$ 不是强仿紧空间.

6.11 (高国士-吴利生[1983]) 证明 meso 紧空间在伪开、紧映射下的象是弱仿紧空间(回答 Arhangel'skii[1976]的问题:"仿紧空间在伪开、紧映射下的象是弱仿紧空间否?")

6.12 (Chaber[1976]) 给出反例说明弱仿紧空间在开、紧映射下的象未必是弱仿紧的.

6.13 证明:强仿紧性关于拓扑和保持;(林寿[1988b])在第一可数空间,每一紧有限的集族是局部有限的.

6.14 (Ponomarev[1962]) 开、完备映射保持强仿紧性.

6.15 (高国士[1980])设 f 是正则空间 X 到强仿紧空间 Y 上的闭映射,且对每一 $y\in Y$, $f^{-1}(y)$是连通的强仿紧子空间,则 X 是强仿紧空间.

6.16 在具有线性序<的线性序集上赋以序拓扑形成的空间称为**线性序空间**(linearly ordered space). 数直线、$[0,\omega)$、$[0,\omega_1)$都是线性序空间. 证明线性序空间是集态正规的.

6.17 (Bennet-Lutzer[1972])线性序空间 X 是仿紧空间当且仅当 X 是弱 θ 加细空间.

6.18 (吴利生[1984])伪开、紧映射的任意积是伪开、紧映射. 有限个有限对一的伪开映射的积是有限对一的伪开映射. 证明有限对一伪开映射保持:完备性、可数 θ 加细性、点态集态正规性及第一可数性.

6.19 (Bacon[1970]) 证明 iso 紧空间与遗传 iso 紧空间的积是 iso 紧的.(存在 iso 紧的 Tychonoff 空间与它自身的积不是 iso 紧的(见 Eckertson 等[1992])).

6.20 (高国士[1979a]) 在可数紧空间:

(i) 每一局部有限开集族是有限的,

(ii) 每一点有限开覆盖具有有限子覆盖.

从而证明仿紧空间、弱仿紧空间是 iso 紧的.

6.21 (龙冰[1986]) 构造不是 T_1 的,非不可约的 Lindelöf 空间.

6.22 (Aren-Dugundji[1950]) 利用定理 6.6.19 证明弱仿紧空间是 iso 紧的.

6.23 (朱俊[1991]) 构造一个完备的非不可约空间. 证明完备的不可约空间是开遗传不可约的,不是闭遗传不可约的.

6.24 (朱俊[1991]) 证明 T_1 拟仿紧空间在闭映射下的象是不可约的. 从而 T_1 拟仿紧空间是不可约的.

6.25 (高国士[1995]) 证明完备的、弱 $\delta\theta$ 加细空间是 $\delta\theta$ 加细的. 从而是遗传不可约的.

6.26 (Zenor[1970]) 空间 X 称为具有**性质 B**,如果对每一良序的递减闭集族$\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$满足$\bigcap_{\alpha\in A}F_\alpha=\varnothing$,存在递减开集族$\{G_\alpha\}_{\alpha\in A}$使$F_\alpha\subset G_\alpha$, $\alpha\in A$ 且$\bigcap_{\alpha\in A}\overline{G_\alpha}=\varnothing$. 证明:

(i) 仿紧性→性质 B→可数仿紧性,

(ii) 具有性质 B 的空间与紧空间的积具有性质 B,

(iii) 具有性质 B 的 T_2 空间是正则的,

(iv) 在具有性质 B 的正则空间,可数紧性与紧性等价,$\aleph_1$ 紧性与

Lindelöf 性质等价.

6.27 (Yasui[1987]) 可数仿紧、仿 Lindelöf 空间具有性质 B.

6.28 (滕辉[1990]) 满足可数链条件(习题 2.20)具有性质 B 的空间是 Lindelöf 空间.

6.29 (葛英[1994]) 双商闭映射保持性质 B. 完备映射逆保持性质 B.

把狭义拟仿紧空间的定义(定义 6.1.27)中的"离散"换为"局部有限"得到 Chaber 意义下的**性质 $\boldsymbol{b_1}$**. 显然狭义拟仿紧→性质 $\boldsymbol{b_1}$.

6.30 (Smith[1980]) 性质 b_1→弱$\overline{\theta}$加细. 从而具有性质 b_1 的空间是不可约的.

6.31 (蒋继光[1989]) 完备映射逆保持性质 b_1.

6.32 (葛英[1993]) 闭 Lindelöf 映射逆保持性质 b_1.

第七章　广义度量空间(上)

广义度量空间顾名思义是指度量空间的推广.仿紧空间以及第六章里借助于各种不同性质的覆盖所定义的空间(除强仿紧空间外)都是度量空间的推广,但是这类空间已按其定义的独特方式(覆盖)称为覆盖性质,不属于这一章的广义度量空间的范畴.覆盖性质与广义度量空间有着密切联系.

推广度量空间可以减弱度量公理.例如前面第四章§1把度量公理(定义4.1.1)中的"$(M1)\rho(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$"减弱为"$(M1')\rho(x,y)=0$ 当 $x=y$",从而得到拟度量空间.也可以把度量公理中的$(M3)$(三角形不等式)去掉,另外补充其它各种条件,得到各种广义度量空间.

推广度量空间的主要方法是从度量化定理出发;用各种方式减弱其条件.例如由 Alexanderoff-Urysohn 度量化定理(定理4.5.16)出发,去掉其条件(i),那就得到可展空间(定义4.4.7).正则可展空间称为 Moore 空间.也可以保持(i)而致弱(ii)(见定义7.2.2)而得 M-空间.Moore 空间与 M 空间都是重要的广义度量空间.如由 Nagata-Smirnov-Bing 度量化定理(定理4.3.10,4.3.11)出发,从各方面减弱其条件可得更多更重要的广义度量空间.

§1.　Moore 空间,可展、拟可展空间与 G_δ 对角线

回忆 Alexandroff-Urysohn 度量化定理(定理4.5.16):拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是 T_1 的且存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$,满足:

(i) $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n(n\in N)$,

(ii) $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in N}$形成点$x\in X$的邻域基.

按存在上述定理中的覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$且满足(ii)的空间就是可展空间的定义(定义 4.4.7),而把覆盖序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$称这空间的展开.正则可展空间称为 **Moore 空间**.

定理 7.1.1 可展空间是次仿紧空间、完备空间.

证明 比较可展空间的定义与次仿紧空间的刻画(定理 6.1.2 的(v)),即知可展空间是次仿紧的.关于完备性,容易证明对任一闭集F,有$F=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(F,\mathscr{U}_n)$(习题 7.3). 证完.

在定理 4.5.11 后,曾称积集$X\times X$的子集$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$为$X\times X$的对角线.

定义 7.1.2 空间X称为具有 **G_δ 对角线**(G_δ-diagonal)Δ,如果Δ是积空间X^2中的G_δ集.

下面是G_δ对角线的有效刻画,由此可与其它性质联系.

定理 7.1.3 空间X具有G_δ对角线当且仅当存在X的开覆盖列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$使对任意$x,y\in X$,$x\neq y$,存在$n\in N$,使$y\notin\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$(等价地,对每一$x\in X$,$\{x\}=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$).

证明 设X具有G_δ对角线$\Delta=\bigcap_{n\in N}V_n$,$V_n$开于$X^2$,对每一$x\in X$及$n\in N$,设$U_n(x)$是$x$的开邻域使$U_n(x)\times U_n(x)\subset V_n$,置$\mathscr{U}_n=\{U_n(x):x\in X\}$,如果$\{x,y\}\subset\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$,$x\neq y$,对每一$n$,选取$z_n\in X$,使$\{x,y\}\subset U_n(z_n)$,则$(x,y)\in U_n(z_n)\times U_n(z_n)\subset V_n$,从而$(x,y)\in\bigcap_n V_n$.矛盾.

设$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足定理条件,置$V_n=\bigcup\{U\times U:U\in\mathscr{U}_n\}$.则$\Delta\subset\bigcap_{n\in N}V_n$,如果$(x,y)\in\bigcap_{n\in N}V_n$,则对每一$n\in N$,存在$U_n\in\mathscr{U}_n$,使$(x,y)\in U_n\times U_n$.从而$y\in\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}$.所以$\Delta=\bigcap_{n\in N}V_n$. 证完.

满足上述定理 7.1.3 的覆盖序列称为关于X的 **G_δ 对角线序列**.显然,T_1可展空间、Moore 空间具有G_δ对角线.

定理 7.1.4(Šneider[1945]) 具有G_δ对角线的T_2紧空间可度量化.

证明 设 X 满足定理条件,由定理 7.1.3,存在开覆盖列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$,使对每一 $x\in X$,$\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}$,由于 X 是紧且正则的,存在有限开覆盖序列 $\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$ 使 $\bar{\mathscr{V}}_n=\{\overline{V}:V\in\mathscr{V}_n\}$ 加细 $\mathscr{U}_n$,从而 $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\bar{\mathscr{V}}_n)\subset\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\{x\}$,置

$$\mathscr{B}=\{X-\overline{V}_1\cup\cdots\cup\overline{V}_k:V_1,\cdots,V_k\in\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n;k=1,2,\cdots\},$$

$\mathscr{B}$ 是可数集族,下证 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的基.

考察 $x_0\in X$ 及 x_0 的开邻域 U. 存在 $n\in N$,使 $\mathrm{st}(x_0,\bar{\mathscr{V}}_n)\subset U$,$\mathscr{V}_n$ 是覆盖,对每一 $x\in X-U$,存在 $V_x\in\mathscr{V}_n$ 使 $x\in V_x$. 易知 $x_0\notin\overline{V}_x$(不然,将有 $x\in U$,矛盾),$X-U$ 是紧的,有限个 $V_{x_1},\cdots,V_{x_k}$ 覆盖 $X-U$,则 $X-\overline{V}_{x_1}\cup\cdots\cup\overline{V}_{x_k}\in\mathscr{B}$,而

$$x_0\in X-\overline{V}_{x_1}\cup\cdots\cup\overline{V}_{x_k}\in U.$$

所以 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基,由 Urysohn 度量化定理(定理 4.3.2)得证.

定理 7.1.5(Bing[1951]) 集态正规的 Moore 空间可度量化.

证明 由引理 4.4.8 及 Nagata-Smirnov 度量化定理(定理 4.3.10)知仿紧 Moore 空间可度量化,由定理 7.1.1 及定理 6.1.14 得证.

Bing[1951]证明了上述定理 7.1.5 后提出能否将“集态正规”减弱为“正规”,这就是著名的正规 Moore 空间可度量化问题. 在我们常用的公理体系(Zemelo-Fraenkel 集论公理 + 选择公理)下尚未得任何结果.

作为可展空间的推广有拟可展空间.

定义 7.1.6 空间 X 称为**拟可展**(quasi-developable)**空间**,如果存在开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$,使对于 $x\in X$,及包含 x 的开集 U,存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\neq\varnothing$,且 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 上述开集族序列称为 X 的拟展开.

定理 7.1.7(Bennett[1971]) 拟可展空间是可展空间当且仅

当 X 是完备空间.

证明 必要性见定理 7.1.1. 下证充分性. 设 X 是拟可展空间,存在开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足定义 7.1.6,记 $\mathscr{U}_n^* = \bigcup\mathscr{U}_n = \bigcup\{U:U\in\mathscr{U}_n\}$. $\mathscr{U}_n^*$ 是开集,因 X 是完备的,置 $\mathscr{U}_n^* = \bigcup_{m\in N}F_{n,m}$, $F_{n,m}$是闭集. 置

$$\mathscr{V}_{n,m} = \mathscr{U}_n \cup \{X - F_{n,m}\}, \quad n,m \in N.$$

显然,$\mathscr{V}_{n,m}$是开覆盖. 下证$\{\mathscr{V}_{n,m}\}_{n,m\in N}$是$X$ 的展开. 对 $x\in X$ 及包含x 的开集 U,存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\neq\varnothing$且 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$, 由 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\neq\varnothing$知 $x\in\mathscr{U}_n^* = \bigcup_{m\in N}F_{n,m}$,从而 $x\in$某 $F_{n,m}\Rightarrow x\notin$某 $X-F_{n,m}$,所以存在 $n,m\in N$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_{n,m})=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$. 证完.

定理 7.1.8(Bennett-Lutzer[1972]) 拟可展空间是遗传弱 θ 加细空间.

证明 易知拟可展空间具有遗传性,只要证明拟可展空间是弱 θ 加细的. 设$\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$是空间$X$ 的一个拟可展. 设 $\mathscr{U}$是 X 的开覆盖,使 $\mathscr{U}$ 良序化,记 $\mathscr{U}=\{U_\alpha:1\leqslant\alpha<\Lambda\}$,这里 Λ 是某序数,对每一 $\alpha\in\Lambda$, $n\in N$,置

$$P(\alpha,n)= \{x \in X: x \in U_\alpha - \bigcup\{U_\beta:\beta < \alpha\} \text{ 且 } \mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n) \subset U_\alpha\},$$

$$\mathscr{P}_n= \{P(\alpha,n):1 \leqslant \alpha < \Lambda\}.$$

$\mathscr{P}=\bigcup\{\mathscr{P}_n:n\in N\}$覆盖$X$ 且加细 $\mathscr{U}$,考察 X 的子空间$\bigcup\mathscr{P}_n$. 对 $x\in\bigcup\mathscr{P}_n$,取 α 使$x\in P(\alpha,n)$,易知 $\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$是 x 的邻域正好与 $\mathscr{P}_n$ 中一个元(即 $P(\alpha,n)$)相交,所以 $\mathscr{P}_n$ 关于子空间$\bigcup\mathscr{P}_n$ 是离散的,由定理 6.1.8 的(iii)知 X 是弱θ 加细的. 证完.

定义 7.1.9 空间 X 称为具有**θ 基** $\mathscr{B}$,如果 $\mathscr{B}$ 可写作 $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_n:n\in N\}$且对空间$X$ 的每一开集 U 及点$x\in U$,存在 $n_x\in N$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_{n_x})<\infty$且有某 $B\in\mathscr{B}_{n_x}$使$x\in B\subset U$.

显然,具有 θ 基的空间是遗传弱θ 加细的,但未必是 θ 加细的.(见习题 6.4Bennett-Lutzer 的例).

定理 7.1.10(Bennett-Lutzer[1972]). 空间 X 是拟可展空间当且仅当 X 具有 θ 基.

证明 设 X 是拟可展空间，$\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$是 X 的拟展开. 由定理 7.1.8,X 是遗传性弱 θ 加细的. 所以 X 的子空间$\bigcup\mathscr{G}_n(n\in N)$是弱 θ 加细的. 开集族 $\mathscr{G}_n$（覆盖 $\bigcup\mathscr{G}_n$）具有弱 θ 加细 $\{\mathscr{B}_{n,m}:m\in N\}$. 不失一般性，$\mathscr{B}_{n,m}$中的元可作为空间 X 的开集. 下证$\{\mathscr{B}_{n,m}:n,m\in N\}$是 X 的 θ 基.

对 X 的开集 U 及 $x\in U$，因$\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$是 X 的拟展开，存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\subset U$，$x\in\bigcup\mathscr{G}_n$. 因$\{\mathscr{B}_{n,m}:m\in N\}$是 $\mathscr{G}_n$ 的弱 θ 加细，存在 $m\in N$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_{n,m})<\infty$，而 $\mathrm{st}(x,\mathscr{B}_{n,m})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\subset U$. 所以$\{\mathscr{B}_{n,m}:n,m\in N\}$是空间 X 的 θ 基.

设 X 具有 θ 基 $\mathscr{B}=\bigcup\{\mathscr{B}_n:n\in N\}$. 对 $n,k\in N$ 置

$$X(n,k)=\{x\in X:\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)=k\},$$
$$G(x,n,k)=\bigcap\{B\in\mathscr{B}_n:x\in B\},$$
$$\mathscr{G}_{n,k}=\{G(x,n,k):x\in X(n,k)\}.$$

$G(x,n,k)$ 是包含 x 的开集，$\mathscr{G}_{n,k}$ 是开集族，下证$\{\mathscr{G}_{n,k}:k,n\in N\}$是 X 的一个拟展开.

对 X 的开集 U 及 $x\in U$，因 $\mathscr{B}$ 是 θ 基，存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)<\infty$，且有某 $B\in\mathscr{B}_n$使 $x\in B\subset U$，设 $\mathrm{ord}(x,\mathscr{B}_n)=k$，即 $x\in X(n,k)$. 注意开集族 $\mathscr{G}_{n,k}$中只有一个集 $G(x,n,k)$包含点 x，所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_{n,k})=G(x,n,k)\subset B\subset U$，所以$\{\mathscr{G}_{n,k}:n,k\in N\}$是 X 的拟展开. 证完.

由定理 7.1.7 得下述推论.

推论 7.1.11 空间 X 是可展空间当且仅当 X 是具有 θ 基的完备空间.

§2. $w\Delta$ 空间、M 空间与 p 空间

作为可展空间的另一推广有 $w\Delta$ 空间.

定义 7.2.1 空间 X 称为 **$w\Delta$ 空间**,如果存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 满足:如果对某 $x\in X$, $x_n\in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, $n\in N$,则序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 有聚点.上述序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 称为 $w\Delta$ 序列.

注记 上述定义中的聚点未必就是 x,如果要求这聚点就是 x,则容易验证 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in N}$ 形成点 x 的邻域基(习题 7.6).这样又得到可展空间(定义 4.4.7),所以可展空间是 $w\Delta$ 空间.此外,易知可数紧空间也是 $w\Delta$ 空间.

Morita[1964]引入 M 空间.

定义 7.2.2 空间 X 称为 ***M* 空间**,如果存在 X 的开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 满足下列条件:

(i) $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n(n\in N)$,

(ii) 如果对某 x, $x_n\in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, $n\in N$,则序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 有聚点.

可数紧空间是 M 空间(可让每一 $\mathscr{U}_n=\{X\}$).按上述定义中的(ii)就是 $w\Delta$ 空间的定义(定义 7.2.1).所以 M-空间是 $w\Delta$ 空间.把 M-空间的条件与 Alexanderoff-Urysohn 度量化定理的条件比较,它们的差别正是 $w\Delta$ 空间与可展空间的差别.

引理 7.2.3(Frink[1937]) 设映射 $d:X\times X\to R^+$(非负实数)满足:

对每一 $\varepsilon>0$,如果 $d(x,y)<\varepsilon$, $d(y,z)<\varepsilon$,则 $d(x,z)<2\varepsilon$ (1)

则存在映射 $\rho:X\times X\to R^+$ 使对所有 $x,y,z\in Z$,有

(i) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$,

(ii) $d(x,y)/4\leqslant\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.

如果要求 d 是对称的(即 $d(x,y)=d(y,x)$),则 ρ 也是对称的.

证明 定义 ρ 如下:

$$\rho(a,b)=\inf\left\{\sum_{i=0}^{n-1}d(x_i,x_{i+1}):n\in N,x_i\in X,x_0=a,x_n=b\right\}.$$

显然,ρ 满足(i)且 $\rho(x,y)\leqslant d(x,y)$.为了完成证明,只要证对每一组 $a,b,x_1,\cdots,x_n\in X$,下式成立:

$$d(a,b)\leqslant 2d(a,x_1)+4\sum_{i=1}^{n-1}d(x_i,x_{i+1})+2d(x_n,b).\quad (2)$$

在 $n=1$ 时,令 $\max\{d(a,x_1),d(x_1,b)\}=\varepsilon$. 由(1), $d(a,b)\leqslant 2d(a,x_1)$ 或 $d(a,b)\leqslant 2d(x_1,b)$. 所以(2)式成立. 下用归纳法证. 设(2)式对所有小于 n 的正整数成立. 设 $a,b,x_1,\cdots,x_n\in X$, 由(1)对任一 x_i 有 $d(a,b)\leqslant 2d(a,x_i)$ 或 $d(a,b)\leqslant 2d(x_i,b)$. 设 k 是最小自然数使 $d(a,b)\leqslant 2d(a,x_k)$. 当 $k=1$ 时,(2)式显然得证. 当 $k>1$ 时,这时 $d(a,b)\not\leqslant 2d(a,x_{k-1})$, 从而 $d(a,b)\leqslant 2d(x_{k-1},b)$, 故有 $d(a,b)\leqslant d(a,x_k)+d(x_{k-1},b)$. 分别用归纳法假设于 $d(a,x_k)$ 及 $d(x_{k-1},b)$, 即得(2)式.　证完.

引理 7.2.4(Burke[1984a])　设空间 X 存在开覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n(n\in N)$, 则 X 上存在拟度量 ρ 满足:

(i) $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $y\in\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$,

(ii) U 是由拟度量 ρ 导出拓扑中的开集当且仅当对每一 $x\in U$ 存在 $n\in N$ 使 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$.

证明　先在 X 上定义 $d:X\times X\to R^+$, 使

$d(x,y)=1/2^n$, 当且仅当 $n=\min\{n\in N: y\notin\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}$,

$d(x,y)=0$, 当且仅当不存在上述 n, 即 $y\in\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$.

设 $d(x,y)<1/2^{n+1}$, $d(y,z)<1/2^{n+1}$, 则 $y\in\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1})$, $z\in\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_{n+1})$. 从而 $z\in\mathrm{st}(\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+1}),\mathscr{U}_{n+1})\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 所以 $d(x,z)<1/2^n$, d 满足引理 7.2.3 的(i). 从而存在 X 上的拟度量 ρ, 由 d 的定义及引理 7.2.3 的(ii)得到这里的(i), 此外由引理 7.2.3 的(ii), 对每一 $x\in X$,

$$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n+2})=S'_{1/2^{n+2}}(x)\subset S_{1/2^{n+2}}(x)\subset S'_{1/2^n}(x)=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n).$$

(这里 $S'_\varepsilon(x)=\{y\in X: d(x,y)<\varepsilon\}$). 这说明由 ρ 导出的拓扑正是以 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in N}$ 为点的邻域基形成的拓扑. 到此证明了这里的(ii).　证完.

引理 7.2.5　设 X 是 M 空间, 则 $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in N}$ 是集 $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$ 的邻域基(即对开集 $U\supset\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$, 存在某 $\mathrm{st}(x,$

$\mathscr{U}_n$)使 $U \supset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$).

证明 由于 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1}), \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$, 所以 $\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1})} \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$, 从而 $\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \overline{\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$. 如果引理不能成立,存在开集 $V \supset \bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$及点 $x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) - V$, $n \in N$. 姑设序列 $\{x_n\}_{n \in N}$有聚点 x',由于 $x' \in \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$, $n \in N$, $x' \in \overline{\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)} = \bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset V$,这不可能. 所以 $\{x_n\}_{n \in N}$无聚点,这与 M 空间定义矛盾. 证完.

注意引理 7.2.4 中的 ρ 只能是拟度量,因为$\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$未必是单点集. 如果我们引入等价关系 R 使集$\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$等同于一点$[x]$所得到的商空间 Y 将是度量空间,此外,比较引理 7.2.5 的结果与 Alexanderoff-Urysohn 度量化定理的条件(ii),同样启发我们尝试把$\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$等同于一点.

定理 7.2.6(Morita[1964]) T_1 空间 X 是M 空间当且仅当存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的准完备映射 f.

证明 设 X 是M 空间,由引理 7.2.4 存在 X 上的拟度量 ρ 满足:

(i) $\rho(x, y) = 0$,当且仅当 $y \in \bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$,

(ii) U 是由拟度量 ρ 导出拓扑中的开集当且仅当对每一 $x \in U$ 存在 $n \in N$,使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \subset U$.

在 X 上定义等价关系 R 如下: xRy 当且仅当 $\rho(x, y) = 0$. 置 $Y = X/R$,定义 $\rho': Y \times Y \to R^+$,使 $\rho'([x], [y]) = \rho(x, y)$,这里$[x]$是对应着 x 的商空间 Y 中的点,单点集$[x]$是闭集,因为它的逆象$\bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$是闭集(见下证明),所以 Y 是 T_1 空间. 容易验证 ρ'是 Y 上的度量.

现设商映射 $f: X \to Y$ 是准完备的,由于 $f^{-1}(S'_\varepsilon([x])) = S_\varepsilon(x)$. (这里 $S_\varepsilon(x) = \{y \in X: \rho(x, y) < \varepsilon\}$, $S'_\varepsilon([x]) = \{[y] \in Y: \rho'([x], [y]) < \varepsilon\}$),由(ii) $S_\varepsilon(x)$是开集,故 f 连续. 按 $f^{-1}([x]) = \{y \in X: \rho(x, y) = 0\} = \bigcap_{n \in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$. 设

$\{x_n : n \in N\} \subset f^{-1}([x]) = \bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$，则对每一 n，$x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$，因 X 是 M 空间，$\{x_n\}_{n\in N}$ 在 X 中有聚点 x'，x' 也是每一 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 的聚点，所以 $x' \in \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$，$n \in N$. 由于 $\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)} = \bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$，$x' \in \bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$，所以 $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 是闭集，是可数紧的. 下证 f 是闭的. 设 $H \subset X$ 是闭集，由于 f 是商映射，只要证明 $f^{-1}(f(H))$ 是闭集. 设 $x \notin f^{-1}(f(H))$，则 $f^{-1}(f(x)) \cap H = \varnothing$. 也就是 $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \cap H = \varnothing$. 由引理 7.2.5，存在某 $n \in N$ 使 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) \cap H = \varnothing$. 下证 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1}) \cap f^{-1}(f(H)) = \varnothing$，从而 $f^{-1}(f(H))$ 是闭集得证. 对每一 $x' \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1})$，$\mathrm{st}(x', \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{st}(\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1}), \mathscr{U}_{n+1}) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$，故 $\mathrm{st}(x', \mathscr{U}_{n+1}) \cap H = \varnothing$. 从而 $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x', \mathscr{U}_{n+1}) \cap H = \varnothing$，是即 $f^{-1}(f(x)) \cap H = \varnothing$. 故 $x' \notin f^{-1}(f(H))$. 所以 $\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n+1}) \cap f^{-1}(f(H)) = \varnothing$. 到此证明了 f 是准完备映射.

设 f 是 T_1 空间 X 到度量空间 Y 上的准完备映射. 由 Alexanderoff-Urysohn 定理，空间 Y 存在一展开 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$，使 $\mathscr{U}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{U}_n (n \in N)$. 置 $\mathscr{G}_n = \{f^{-1}(U) : U \in \mathscr{U}_n\}$，容易验证 $\mathscr{G}_{n+1}$ 星加细 $\mathscr{G}_n$. 设对某 $x \in X$，$x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)$，$n \in N$，要证 $\{x_n\}_{n\in N}$ 有聚点，从而 X 是 M 空间. 如果无限个 x_n 属于可数紧闭子集 $f^{-1}(f(x))$（因 X 是 T_1 紧的），则已得证；如果不然，不妨设 $x_n \notin f^{-1}(f(x))$，$n \in N$. 姑设 $\{x_n\}_{n\in N}$ 无聚点，则 $\{x_n : n \in N\}$ 闭，f 是闭映射，$\{f(x_n) : n \in N\}$ 是闭集. 另一方面，$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 是空间 Y 的展开，$f(x_n) \in \mathrm{st}(f(x), \mathscr{U}_n)$，$\{f(x_n) : n \in N\}$ 应以 $f(x)$ 为聚点，这一矛盾说明 $\{x_n\}_{n\in N}$ 有聚点，X 是 M 空间.　证完.

推论 7.2.7　T_1 空间 X 是 iso 紧的 M 空间当且仅当存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的完备映射.

证明　由于 iso 紧性使可数紧闭子集成为紧集（定义 6.6.1），而完备映射逆保持 iso-紧性（定理 6.6.7），由定理 7.2.6 得证.

由推论 7.2.7 更有下述结果.

推论 7.2.8 T_1 空间 X 是仿紧 M 空间当且仅当存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的完备映射.

证明 仿紧空间是 iso 紧的且完备映射逆保持仿紧性(推论 5.2.8). 证完.

定理 7.2.6 推论 7.2.8 分别用度量空间在准完备,完备映射的逆象刻画 T_1 M 空间、T_2 仿紧 M 空间是 M 空间的重要结果. 另一重要结果是下面的定理 7.2.11,是关于可数积方面的,其实这定理也是定理 7.2.6 的推论.

设有两族空间: $\{X_s\}_{s\in S}$, $\{Y_s\}_{s\in S}$ 及一族映射 $\{f_s\}_{s\in S}$ 使 $f_s: X_s\rightarrow Y_s$. 称映射 $f:\prod_{s\in S}X_s\rightarrow\prod_{s\in S}Y_s$ 是映射 $\{f_s\}_{s\in S}$ 的积(记作 $f=\prod_{s\in S}f_s$),如果 f 使 $\prod_{s\in S}X_s$ 中的点 $\{x_s\}$ 对应 $\prod_{s\in S}Y_s$ 中的点 $\{f_s(x_s)\}$.

引理 7.2.9(Frolik[1960]) 设有一族空间 $\{X_s\}_{s\in S}$, A_s 是 X_s 的紧子集, W 是积空间 $\prod_{s\in S}X_s$ 中的开集, $W\supset\prod_{s\in S}A_s$, 则存在开集 $U_s\subset X_s$, 使 $U_s\neq X_s$ 仅对有限个 s 成立, 且 $\prod_{s\in S}A_s\subset\prod_{s\in S}U_s\subset W$.

证明 这是习题 3.32 在任意多个空间的积的情况的推广. 设 $A=\prod_{s\in S}A_s\subset W\subset\prod_{s\in S}X_s$, A 是积空间 $\prod_{s\in S}X_s$ 的紧集, 对某一点 $a\in A$, 取积空间的基中的元 $\prod_{s\in S}W_s$ 使 $a\in\prod_{s\in S}W_s\subset W$,(这里 W_s 仅对有限个 s, $W_s\neq X_s$). 因 A 是紧集, A 为有限个这种元素所覆盖. 记作:

$$A\subset\prod_{s\in S}W_s^1\cup\prod_{s\in S}W_s^2\cup\cdots\cup\prod_{s\in S}W_s^k\subset W.$$

存在有限集 $S_0=\{s_1,s_2,\cdots,s_l\}\subset S$ 使 $W_s^i=X_s$ 对 $s\in S-S_0$ 成立 $(i=1,2,\cdots,k)$. 设

$$W_1=\bigcup_{i=1}^k\prod_{s\in S_0}W_s^i,\ W_2=\prod_{s\in S-S_0}X_s,\ A_2=\prod_{s\in S-S_0}A_s,$$

则有

$$\prod_{s\in S_0}A_s\times A_2\subset W_1\times W_2\subset W.$$

由习题 3.32(有限积情况), 存在开集 $U_s\subset X_s$ $(s\in S_0)$ 使 $\prod_{s\in S_0}A_s$

$\subset \prod_{s\in S_0} U_s \subset W_1$. 对 $s\in S-S_0$, 取 $U_s = X_s$, 则有 $\prod_{s\in S} A_s \subset \prod_{s\in S} U_s \subset W$. 证完.

引理 7.2.10(Frolik[1960]) 一族完备映射 $\{f_s\}_{s\in S}$ 的积 $f = \prod_{s\in S} f_s$ 是完备映射.

证明 设 $f_s: X_s \to Y_s (s\in S)$ 是完备映射, 对每一 $y = \{y_s\} \in \prod_{s\in S} Y_s$, $f^{-1}(y) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$ 显然是紧的. 要证 f 是闭映射.

对每一 $y = \{y_s\} \in \prod_{s\in S} Y_s$ 及 $\prod_{s\in S} X_s$ 中开集 $U \supset f^{-1}(y) = \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$. 由引理 7.2.9, 存在开集 $U_s \subset X_s$, 使 $X_s \neq U_s$ 仅对 S 的有限子集 $S_0 = \{s_1, \cdots, s_k\}$ 成立, 且满足 $U \supset \prod_{s\in S} U_s \supset \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$. 由于 f_{s_i} 是闭映射, $U_{s_i} \supset f_{s_i}^{-1}(y_{s_i})$, 由定理 1.5.8, 存在开集 U'_{s_i} 使 $U_{s_i} \supset U'_{s_i} \supset f_{s_i}^{-1}(y_{s_i})$, $U'_{s_i} = f_{s_i}^{-1}(f_{s_i}(U'_{s_i}))$ 且 $f_{s_i}(U'_{s_i})$ 开于 Y_s. 从而有 $\prod_{s\in S} U_s \supset \prod_{s\in S} U'_s \supset \prod_{s\in S} f_s^{-1}(y_s)$, 这里对 $s\in S-S_0$ 取 $U_s = U'_s = X_s$, 置 $U' = \prod_{s\in S} U'_s$, U' 开, $U \supset U' \supset f^{-1}(y)$, $U' = f^{-1}(f(U'))$ 且 $f(U')$ 开于 Y, 由定理 1.5.8 知, f 是闭映射. 证完.

定理 7.2.11(Morita[1964]) 设 $\{X_i\}_{i\in N}$ 是一列 T_1 仿紧 M 空间, 则积空间 $\prod_{i\in N} X_i$ 是 T_1 仿紧 M 空间.

证明 对每一 $X_i (i\in N)$, 由推论 7.2.8, 存在度量空间 Y_i 及由 X_i 到 Y_i 上的完备映射 f_i, 由引理 7.2.10, $\prod_{i\in N} f_i: \prod_{i\in N} X_i \to \prod_{i\in N} Y_i$ 是完备映射, 而 $\prod_{i\in N} Y_i$ 是度量空间(定理 4.1.19), 由推论 7.2.8 得证.

按两个仿紧空间的积未必是仿紧空间(例 2.3.9, 例 2.3.10), Suzuki[1969]给出两个完全正则的 M 空间的积不是 M 空间, 所以定理 7.2.11 显得非常奇妙.

关于仿紧空间的可数积的保持问题的研究是由覆盖性质导向广义度量空间的一个途径. 这一问题可归结为找出这样的拓扑空间类 $\mathscr{P}$(尽可能广泛些), 使 $\mathscr{P}$ 中仿紧元素序列的积是仿紧的. 对类 $\mathscr{P}$ 说也要求关于通常的拓扑运算是封闭的.

1960 年 Frolik 成功地把类 $\mathscr{P}$ 取为所有**Čech 完全**(Čech-complete)空间. 完全正则空间 X 称为Čech 完全空间,如 X 是它的 Stone-Čeche 紧化 $\beta(X)$中的 G_δ 集. 按Čech 完全空间类关于可数积是封闭的(习题 7.11). 1963 年 Arhangelskii 推广 Frolik 的结果,把 $\mathscr{P}$ 取为所有 p 空间,这 p 空间类也关于可数积是封闭的(定理 7.2.13).

定义 7.2.12 完全正则空间 X 称为 p 空间,如果存在 $\beta(X)$ 中的开集族序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足:

(i) 每一 $\mathscr{U}_n$ 覆盖 X,

(ii) 对每一 $x\in X$, $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset X$,

如果还满足:

(iii) $\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$,则称 X 为**严格 p** (Strict p)**空间**.

按 T_2 局部紧空间 X 是它的 Stone-Čech 紧化 $\beta(X)$中的开集(引理 3.6.5),显然,T_2 局部紧空间是Čech 完全空间,而Čech 完全空间是 p 空间,这是因为Čech 完全空间 $X=\bigcap_{n\in N}U_n$, U_n 开于 $\beta(X)$,定义 7.2.12 中的 $\mathscr{U}_n$ 可取为单元素集族 $\{U_n\}$.

注记 1. 定义 7.2.12 中的 Stone-Čech 紧化 $\beta(X)$可用任一紧化 $\alpha(X)$代替,因为如果 $\{\mathscr{U}_n\}$满足定义 7.2.12 关于 $\alpha(X)$情况下的所有条件,这时存在映射 $f:\beta(X)\to\alpha(X)$,使 $f|_X$ 是恒等映射. 容易验证 $f^{-1}(\mathscr{U}_n)=\{f^{-1}(U):U\in\mathscr{U}_n\}$满足定义 7.2.12 关于 $\beta(X)$情况的相同条件,由此可使下述定理 7.2.13 容易得证.

2. 可设 $\mathscr{U}_{n+1}$加细 $\mathscr{U}_n(n\in N)$,因为可用 $\mathscr{U}_1\wedge\cdots\wedge\mathscr{U}_n$代替 $\mathscr{U}_n$(符号"$\mathscr{U}\wedge\mathscr{V}$"表示集族 $\mathscr{U},\mathscr{V}$的交,即 $\mathscr{U}\wedge\mathscr{V}=\{U\cap V:U\in\mathscr{U},V\in\mathscr{V}\}$).

定理 7.2.13(Arhangelśkii[1963]) 设 $\{X_i\}_{i\in N}$是一列 p 空间,则积空间 $\prod_{i\in N}X_i$ 是 p 空间.

证明 对每一 X_i,设 $\{\mathscr{U}_{i,j}\}_{j\in N}$是 $\beta(X_i)$中的开集族序列满足定义 7.2.12 的(i),(ii). 下面对空间 $\prod_{i\in N}X_i$ 构造 $\prod_{i\in N}\beta(X_i)$中

的开集族序列：

$\mathscr{U}_1 = \{U_1 \times \prod_{i>1} X_i : U_1 \in \mathscr{U}_{1,1}\}$,

$\mathscr{U}_2 = \{U_1 \times U_2 \times \prod_{i>2} X_i : U_1 \in \mathscr{U}_{1,2}, U_2 \in U_{2,2}\}$,

$\mathscr{U}_3 = \{U_1 \times U_2 \times U_3 \times \prod_{i>3} X_i : U_1 \in \mathscr{U}_{1,3}, U_2 \in \mathscr{U}_{2,3}, U_3 \in \mathscr{U}_{3,3}\}$,

$\mathscr{U}_n = \{\prod_{i \leqslant n} U_i \times \prod_{i>n} X_i : U_i \in \mathscr{U}_{i,n}, i \leqslant n\}$.

由上述注记 1，$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足定义 7.2.12 的(i)，(ii)．证完．

下面定理 7.2.14 是严格 p 空间的有效刻画．

定理 7.2.14(Burke-Stoltenberg[1969]) 完全正则空间 X 是严格 p 空间当且仅当存在 X 的覆盖序列$\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$满足：

(i) 对每一 $x \in X$，$P_x = \bigcap_{n\in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)$是紧集．

(ii) $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in N}$是$P_x$ 的邻域基．

证明 设 X 是严格 p 空间，存在 $\beta(X)$中的开集族序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足定义 7.2.12 的(i)，(ii)及(iii)，由这定义后的注记2，可设为 $\mathscr{U}_{n+1}$加细 $\mathscr{U}_n (n \in N)$．$P_x = \bigcap_{n\in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \bigcap_{n\in N} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$是紧空间 $\beta(X)$的闭集且包含在 X 内，所以 P_x 是X 的紧集，置 $\mathscr{G}_n = \{U \cap X : U \in \mathscr{U}_n\}$，显然，$P_x = \bigcap_{n\in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)$．下证$\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in N}$是$P_x$ 的邻域基．

设 U 是X 中的开集，$U \supset P_x$，设 U'是$\beta(X)$中的开集使 $U' \cap X = U$，$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_k)} - U'$是$\beta(X)$中的闭集．如果对任何 $n \in N$，$\bigcap_{k=1}^{n} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)} - U' \neq \varnothing$，则将有 $P_x = \bigcap_{n\in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) - U' \neq \varnothing$，这是不可能的，因为 $P_x \subset U \subset U'$．所以存在 $n_0 \in N$ 使$\bigcap_{k=1}^{n_0} \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_k)} \subset U'$．由于

$$\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_{n_0}) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n_0}) \cap X = \bigcap_{k=1}^{n_0} \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_k) \cap X \subset U' \cap X = U$$

(上式中等号是因为 $\mathscr{U}_{n+1}$加细 $\mathscr{U}_n$)，所以 $P_x = \bigcap_{n\in N} \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_{n_0}) \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{G}_{n_0}) \subset U$，$\{\mathrm{st}(x, \mathscr{G}_n)\}_{n\in N}$是$P_x$ 的邻域基．

反之，设$\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$是空间$X$ 的开覆盖序列，满足本定理的(i)及(ii)，置 $\mathscr{U}_n = \{U : U$ 是$\beta(X)$中开集且 $U \cap X \in \mathscr{G}_n\}$，$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$是

$\beta(X)$中的开集族序列. 显然$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足定义 7.2.12 的(i). 下证满足这定义的(ii),(iii),从而 X 是严格 p 空间.

$P_x=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$是紧集,从而是 $\beta(X)$中的闭集,对任一 $n\in N$,$\beta(X)$中开集 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\supset\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\supset P_x$,此处,$P_x\subset X$,对任一 $y\in\beta(X)-X$,$y\notin X$,$\beta(X)-\{y\}$是含 P_x 的开集,从而 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\cap(\beta(X)-\{y\})$是包含 P_x 的开集. $\beta(X)$正规,P_x 闭,存在 $\beta(X)$中开集 O 使

$$P_x\subset O\subset\overline{O}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\cap(\beta(X)-\{y\}),\qquad(1)$$

这里$\overline{O}$是O 关于$\beta(X)$的闭包,$P_x\subset X$. 由(1),$P_x\subset O\cap X$,$O\cap X$是X 中的开集. 由本定理的(ii),存在 $n'\in N$,使 $P_x\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_{n'})\subset O\cap X\subset\overline{O}\cap X$,因 $\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_{n'})=\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})\cap X$,$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})\cap X\subset\overline{O}\cap X$. 这说明 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})$中包含于 X 中的部分包含在$\overline{O}$内,所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})-\overline{O}\subset\beta(X)-X$,$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})-\overline{O}$是$\beta(X)$中的开集. 由于$\beta(X)$中不空的开集必与 X 相交,所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})-\overline{O}=\varnothing$. 从而(由(1))$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})\subset\overline{O}\subset\beta(X)-\{y\}$. 由于 y 是$\beta(X)-X$ 中的任意点,所以 $\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})\subset X$,从而$\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset X$,满足定义 7.2.12 的(ii). 此外,由(1)式,$\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})\subset\overline{O}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$. 所以 $\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n'})}\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$. 从而容易证明$\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$,满足定义 7.2.12 的(iii). 证完.

推论 7.2.15(a) 完全正则可展空间是严格 p 空间.

(b) 严格 p 空间是$w\Delta$ 空间.

证明 (a) 在 T_1 可展空间,$P_x=\{x\}$,显然满足定理 7.2.15 的(i),(ii).

(b) 如对某 x,$x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$,不妨设 $\mathscr{G}_{n+1}$加细 $\mathscr{G}_n(n\in N)$(定义 7.2.12 后的注记 2),则$\bigcap_{k=1}^{n}\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)=\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\supset\{x_n,x_{n+1},\cdots\}$,由于 $P_x=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)$紧,易知$\{x_n\}$有聚点属于 P_x. 证完.

引理 7.2.16 设 X 是正则空间,$Y\subset X$ 是θ 加细子空间,$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$是$X$ 中的开集族序列,每一 $\mathscr{U}_n$覆盖 Y. 则存在空间 X 的

开集族序列$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$，每一$\mathscr{V}_n$覆盖$Y$使对每一$y\in Y$，

$$\bigcap_n \overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)}=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_n)\subset\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_n).$$

证明 如$\mathscr{U}$是X的子集族，记$\mathscr{U}|Y=\{U\cap Y:U\in\mathscr{U}\}$，下面利用$Y$的$\theta$加细性及$X$的正则性，对每一$m\in N$，归纳地定义开集族序列$\{\mathscr{V}_{m,n}\}_{n\in N}$，每一$\mathscr{V}_{m,n}$覆盖$Y$并满足下述(i)，(ii).

$\mathscr{U}_1$具有关于Y的θ加细序列$\{\mathscr{V}_{1,n}|Y\}_{n\in N}$($\mathscr{V}_{1,n}$是$X$中的开集族覆盖$Y$)使$\mathscr{V}_{1,n}(n\in N)$中元$V$的闭包包含在$\mathscr{U}_1$的某元中.

$\mathscr{U}_2\wedge\mathscr{V}_{1,1}$具有关于$Y$的$\theta$加细序列$\{\mathscr{V}_{2,n}|Y\}_{n\in N}$($\mathscr{V}_{2,n}(n\in N)$是$X$中的开集族覆盖$Y$)使$\mathscr{V}_{2,n}(n\in N)$中元$V$的闭包包含在$\mathscr{V}_{1,1}$的某元$W$中及$\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$中的某元$U$中.

$\mathscr{U}_3\wedge(\wedge_{i,j<3}\mathscr{V}_{i,j})$具有关于$Y$的$\theta$加细序列$\{\mathscr{V}_{3,n}|Y\}_{n\in N}$($\mathscr{V}_{3,n}(n\in N)$是$X$中的开集族覆盖$Y$)使$\mathscr{V}_{3,n}(n\in N)$中元$V$的闭包包含在$\mathscr{V}_{i,j}(i,j<3)$的某元$W$内及$\mathscr{U}_k(k\leqslant 3)$的某元$U$内.

继续下去，可得到：

(i) $\{\mathscr{V}_{m,n}|Y\}_{n\in N}$是每一$\mathscr{V}_{i,j}|Y(i,j<m)$及每一$\mathscr{U}_k|Y(k\leqslant m)$的$\theta$加细序列，

(ii) 对每一$V\in\mathscr{V}_{m,n}$，存在$W\in\mathscr{V}_{i,j}(i,j<m)$使$\overline{V}\subset W$及存在$U\in\mathscr{U}_k(k\leqslant m)$使$\overline{V}\subset U$.

设$x\in\bigcap_{i,j}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})}$，这里$y\in Y$，固定某$i,j$，让$m>\max\{i,j\}$，存在$n\in N$使$y$仅属于$\mathscr{V}_{m,n}$中有限个元，则有$\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{m,n})}=\bigcup\{\overline{V}:y\in V\in\mathscr{V}_{m,n}\}$，由(ii)，$\bigcup\{\overline{V}:y\in V\in\mathscr{V}_{m,n}\}\subset\bigcup\{W:y\in W\in\mathscr{V}_{i,j}\}=\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$，$x\in\bigcap_{i,j}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})}\Rightarrow x\in\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{m,n})}\subset\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$. 所以对每一对$i,j\in N$，$x\in\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$，$x\in\bigcap_{i,j}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$. 从而$\bigcap_{i,j}\overline{\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})}=\bigcap_{i,j}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})$.

由(ii)，显然$\bigcap_{i,j}\mathrm{st}(y,\mathscr{V}_{i,j})\subset\bigcap_n\mathrm{st}(y,\mathscr{U}_n)$，把可数个集族$\{\mathscr{V}_{i,j}\}_{i,j\in N}$重新编号为$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$，则引理得证. 证完.

定理 7.2.17(Burke[1970]) 在完全正则的θ加细空间X，下列论断等价：

(i) X 是严格 p 空间,

(ii) X 是 p 空间,

(iii) X 是 $w\Delta$ 空间.

证明 只要证明(ii)⇒(i)及(iii)⇒(i).现证(ii)⇒(i),设 X 是 θ 加细的 p 空间,$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$满足定义 7.2.12 的(i),(ii).由引理 7.2.16 可构造 X 的开覆盖序列$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$使对每一$x\in X$,$\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)}=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)\subset\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$,则$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$满足定义 7.2.12 的(i),(ii),(iii),X 是严格 p 空间.

(iii)⇒(i)设$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$是 θ 加细空间 X 的 $w\Delta$ 序列,同样由引理 7.2.16 构造开覆盖序列$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$如上,由引理 7.2.5 的证明知$\{\mathscr{V}_n\}_{n\in N}$满足定理 7.2.14 的(ii),易知 $P_x=\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{V}_n)$是可数紧的闭子集(见定理 7.2.6 的证明),因 θ 加细性是 iso 紧的(定理6.6.3),故 P_x 是紧集,满足定理 7.2.14 的(i),故 X 是严格 p 空间.证完.

推论 7.2.18 下列论断等价:

(i) X 是 T_2 仿紧 p 空间,

(ii) X 是 T_2 仿紧 $w\Delta$ 空间,

(iii) X 是 T_2 仿紧 M 空间.

证明 因为 T_2 仿紧 $w\Delta$ 空间是 M 空间(见习题).证完.

由推论 7.2.8 得以下推论.

推论 7.2.19 空间 X 是 T_2 仿紧 p 空间当且仅当 X 是某一度量空间在某一完备映射下的逆象.

更结合定理 7.2.11(这定理中的 T_1 都改为 T_0 仍成立)有下述定理.

定理 7.2.20(Arhangelśkii[1963]) 设$\{X_i\}_{i\in N}$是一列 T_2 仿紧 p 空间,则积空间$\prod_{i\in N}X_i$ 是 T_2 仿紧 p 空间.

定理 7.2.17 证明了每一 θ 加细的 p 空间是严格 p 空间.是否每一严格 p 空间是 θ 加细空间?这是著名的严格 p 空间问题,这一问题的明确的提出见Chaber-Junnila[1974],而实质上Burke

[1972]已提出.这问题的答案如果肯定的话,严格 p 空间可得一漂亮的刻画(下面推论 7.2.21).不仅如此,由 Kullman[1971]证明的"完全正则空间是可展的当且仅当 X 是 θ 加细的 p 空间且具有 G_δ 对角线",及 Willard[1970]证明的"完备映射保持 θ 加细的 p 空间",分别可得下述推论 7.2.22 及推论 7.2.23.所以这问题的解决显得非常重要,特别期待着正面的答案.关于这问题的详细叙述见 Davis[1985].有趣的是正当 Davis 论文发表时,这问题已为我国学者江守礼[1986]所正面解决.这是近年来我国学者在覆盖性质与广义度量空间方面的最好结果,也是国际上这方面最好结果之一.见 Junnila[1992]及 Gruenhage[1992].限于篇幅,这里不转录江守礼的证明,仅叙述结果.

定理 7.2.21(江守礼[1986]) 严格 p 空间是 θ 加细空间.

由定理 7.2.17 有下述推论.

推论 7.2.22 空间 X 是严格 p 空间当且仅当 X 是 θ 加细的 p 空间.

由上述 Kullman 的结果,有下述推论.

推论 7.2.23 完全正则空间 X 是可展空间当且仅当 X 是严格 p 空间且具有 G_δ 对角线.

由上述 Willand 的结果,有下述推论.

推论 7.2.24 完备映射保持严格 p 空间.

M 空间与 p 空间是由不同方式定义的,两者之间没有任何关系.Neimytzki 半平面(例 2.2.13)是 p 空间,但不是 M 空间.关于 M 空间不是 p 空间的例见 Gruenhage[1984]p.445,例 3.23.有趣的是在 T_2 仿紧空间情况两者等价(推论 7.2.18).两者对仿紧空间的可数积保持问题得到了相同的结论(定理 7.2.11,定理 7.2.20).前面曾把这问题归结为找空间类 $\mathscr{P}$ 中的仿紧元素序列的积是仿紧的.对类 $\mathscr{P}$ 说也要求对通常的拓扑运算封闭.Morita 取 $\mathscr{P}$ 为 M 空间类,Arhangelśkii 取 $\mathscr{P}$ 为 p 空间类.p 空间类关于可数积封闭,M 空间类不然.关于其它性质,两者有些类似:

M 空间	p 空间
为准完备映射的逆保持(Ishii[1969],Morita[1967])	为完备映射的逆保持(Arhangel'skii[1963])
不能为完备映射保持(Morita[1967]).	不能为完备映射保持(Chaber[1982])
正规 M 空间能为准完备映射保持(Ishii[1969],Morita[1967]).	θ 加细 p 空间(即严格 p 空间)能为完备映射保持(Willand[1970])
正规 M 空间满足局部有限闭和定理(Suzuki[1967])	?

综上,这两类空间的性质(关于通常运算封闭)未必良好.在下一节里将引入具有良好性质的空间类(σ 空间类与$\sum$空间类),更完善地解决仿紧空间的可积性问题.

§3. σ 空间与$\sum$空间

前面两节里的广义度量空间是由 Alexanderoff-Urysohn 度量化定理引入的.下面将由 Nagata-Smirnov-Bing 度量化定理引入更多的广义度量空间.首先,在这一节里,将减弱上述定理中的基的概念.

回忆 Nagata-Smirnov-Bing 度量化定理(定理 4.3.10,定理 4.3.11):拓扑空间 X 可度量化当且仅当 X 是正则的且满足下列条件之一:

(i) 具有 σ 局部有限基,

(ii) 具有 σ 离散基.

前面第三节曾引入网络概念(定义 3.1.20).拓扑空间 X 的子集族 $\mathscr{A}$ 称为这空间的网络.如果对每一开集 U 及 $x\in U$,存在 $A\in\mathscr{A}$ 使 $x\in A\subset U$.如果 $\mathscr{A}$ 是 σ 离散的、σ 局部有限、σ 闭包保持的,则这网络也分别称为 σ 离散、σ 局部有限、σ 闭包保持的.

定义 7.3.1 空间 X 称为 **σ 空间**,如果 X 具有 σ 局部有限网

络.

上述定义无非是把 Nagata-Smirnov 定理中的“基”换为“网络”.基的元素要求是开集,网络没有这一要求,当空间 X 是正则时,则网络的元素可以设定为闭集,这网络称为闭网络.具有 σ 局部有限闭网络的空间显然是次仿紧的(定义 6.1.1),且容易验证这空间的开集是 F_σ 集,所以有下述定理.

定理 7.3.2 正则 σ 空间是次仿紧的,且是完备的.

不同于前面的 M 空间、p 空间,σ 空间具有良好的拓扑属性(以下三定理都是 Okuyam[1967]得到的):

定理 7.3.3 σ 空间的任一子空间是 σ 空间(即 σ 空间具有遗传性).

证明 证明是直接的,留给读者(习题 7.17).

定理 7.3.4 可数个 σ 空间的积是 σ 空间.

证明 设 $X=\prod_{n\in N}X_n$,每一 $X_n(n\in N)$ 是 σ 空间,具有 σ 局部有限网络 $\bigcup_{m\in N}\mathscr{A}_m^n$,每一 $\mathscr{A}_m^n$ 是局部有限的.不失一般性,可设对每一 m, $X_n\in\mathscr{A}_m^n$ 及 $\mathscr{A}_m^n\subset\mathscr{A}_{m+1}^n$,对每一 $n\in N$,置

$$\mathscr{A}_n=\left\{\prod_{i=1}^{n}A^i\times\prod_{i>n}X_i\,\middle|\,A^i\in\mathscr{A}_n^i,i\leqslant n\right\}.$$

容易验证:每一 $\mathscr{A}_n$ 是 X 中的局部有限族,$\bigcup_{n\in N}\mathscr{A}_n$ 是空间 X 的 σ 局部有限网络,所以 X 是 σ 空间.证完.

注记 正则 σ 空间 X 的平方 X^2 是正则 σ 空间,是完备的(定理 7.3.2).所以正则 σ 空间具有 G_δ 对角线.

定理 7.3.5 可数个 σ 闭子空间的并是 σ 空间.

证明 证明是直接的,留给读者(习题 7.18).

度量空间具有遗传性且可数个度量空间的积是度量空间(定理 4.1.19),具有相应于上述定理 7.3.3 及定理 7.3.4 的性质,但不具有相应于定理 7.3.5 的性质.见例 4.1.21,但有下述推论:

推论 7.3.6 可数个可度量化闭子空间的并是 σ 空间.

证明 因度量空间是 σ 空间,由定理 7.3.5 得证.

下面定理 7.3.7 是 σ 空间的重要刻画.

定理 7.3.7(Siwiec-Nogata[1968]) 在正则空间 X,以下论断等价:

(i) X 具有 σ 闭包保持网络,

(ii) X 是 σ 空间(即 X 具有 σ 局部有限网络),

(iii) X 具有 σ 离散网络.

证明 显然(iii)⇒(ii)⇒(i),下证(i)⇒(iii).设 $\mathscr{A}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{A}_n$ 是 X 的网络,每一 $\mathscr{A}_n$ 是闭包保持的,因 X 是正则的,$\mathscr{A}_n$ 中元的闭包形成的集族仍是闭包保持的,故可设 $\mathscr{A}_n$ 中的元是闭集.记 $\mathscr{A}_n=\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma_n\}$,置

$$F_{\alpha,m}=\bigcup\{A\in A_m:A\cap A_\alpha=\varnothing\},\alpha\in\Gamma_n,m\in N.\quad(1)$$

$F_{\alpha,m}$ 是闭集.$\{A_\alpha,F_{\alpha,m}\}$ 是由两个不相交闭集形成的集族,作这些集族的交,记 $\mathscr{H}_{n,m}=\wedge\{\{A_\alpha,F_{\alpha,m}\}:\alpha\in\Gamma_n\}$,$\mathscr{H}_{n,m}$ 中的元 H 可以记作

$$H(\Gamma')=(\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'\})\cap(\bigcap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}).\quad(2)$$

容易验证(习题 7.3)$\mathscr{H}_{n,m}$ 是不相交的闭集族,为了证明 $\mathscr{H}_{n,m}$ 是离散的,只要证明 $\mathscr{H}_{n,m}$ 是闭包保持的.任取 $\{\Gamma'_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$,使 $\Gamma'_\lambda\subset\Gamma_n$.设 $x\in\bigcup\{H(\Gamma'_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$,则 $x\notin$ 每一 $H(\Gamma'_\lambda)(\lambda\in\Lambda)$.由(2),或者 $x\notin\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'_\lambda\}$ 或者 $x\notin\bigcap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda\}$.从而或者 $x\notin$ 某 $A_{\alpha_\lambda}(\alpha_\lambda\in\Gamma'_\lambda)$,或者 $x\notin$ 某 $F_{\alpha_\mu,m}(\alpha_\mu\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda)$.置

$$\Lambda'=\{\lambda\in\Lambda:x\notin\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'_\lambda\}\},$$
$$\Lambda''=\{\lambda\in\Lambda:x\notin\bigcap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'_\lambda\}\},$$

显然,$\Lambda'\cup\Lambda''=\Lambda$,并置

$$F_1=\bigcup_{\lambda\in\Lambda'}A_{\alpha_\lambda},\qquad F_2=\bigcup_{\mu\in\Lambda''}F_{\alpha_\mu,m}.$$

F_1,F_2 是闭集,令 $V=X-(F_1\cup F_2)$,则 V 是 x 的开邻域与 $\bigcup\{H(\Gamma'_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 不交,故 $\bigcup\{H(\Gamma'_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$ 是闭集.$\mathscr{H}_{n,m}$ 是闭包保持的,从而是离散的.

现在证明 $\mathscr{H}=\bigcup_{n,m\in N}\mathscr{H}_{n,m}$ 是网络.对 $x\in X$ 及包含 x 的开

集U,因$\mathscr{A}$是网络,存在$n\in N$,$A_{\alpha_0}\in\mathscr{A}_n$使$x\in A_{\alpha_0}\subset U$,这里$\alpha_0\in\Gamma_n$.令$\Gamma'=\{\alpha\in\Gamma_n:x\in A_\alpha\}$,则

$$x\in\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'\}\subset A_{\alpha_0}\subset U. \qquad (3)$$

$\bigcup\{A\in\mathscr{A}_n:x\notin A\}=\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}$是不包含$x$的闭集,从而$X-\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}$是包含$x$的开集.因$\mathscr{A}$是网络,存在$m\in N$,$A_{\alpha_1}\in\mathscr{A}_m$使$x\in A_{\alpha_1}\subset X-\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}$.从而$A_{\alpha_1}\cap(\bigcup\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\})=\varnothing$.由(1),$A_{\alpha_1}\subset F_{\alpha,m}$对所有$\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'$成立.故有

$$x\in A_{\alpha_1}\subset\bigcap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\}.$$

结合(3)式得$x\in(\bigcap\{A_\alpha:\alpha\in\Gamma'\})\cap(\bigcap\{F_{\alpha,m}:\alpha\in\Gamma_n-\Gamma'\})\subset A_{\alpha_0}\subset U$.由(2),$x\in H(\Gamma')\subset U$.故$\mathscr{H}$是$X$的网络. 证完.

推论 7.3.8 设f是由σ空间X到正则空间Y上的连续闭映射,则Y是σ空间.

证明 X具有σ闭包保持网络$\mathscr{A}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{A}_n$.因$f$连续闭,$f(\mathscr{A})$是空间$Y$的$\sigma$闭包保持网.因$Y$是正则的,由定理7.3.7,$Y$是$\sigma$空间. 证完.

下面将证明可数个T_2仿紧σ空间的积是T_2仿紧σ空间(定理7.3.11).为此先给出下列两引理.

引理 7.3.9(Okuyama[1967]) 设X是集态正规σ空间,Y是T_2仿紧σ空间,则$X\times Y$是T_2仿紧σ空间,从而是完备正规空间.

证明 由定理7.3.7,设$\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$是$\sigma$空间$X$的$\sigma$离散闭网络,每一$\mathscr{V}_n=\{V_\beta\}_{\beta\in B_n}$是离散闭集族,设$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是积空间$X\times Y$的开覆盖.置

$P(n,\beta,\alpha)=\bigcup\{P:P$是$Y$中的开集使$V_\beta\times P\subset U_\alpha,\beta\in B_n\}$,

$P(n,\beta)=\bigcup\{P(n,\beta,\alpha):\alpha\in A\},\beta\in B_n,n\in N.$

$\{P(n,\beta,\alpha)\}_{\alpha\in A}$是$P(n,\beta)$的开覆盖.$T_2$仿紧$\sigma$空间$Y$是完备正规空间,是遗传性仿紧的(推论5.3.3),$P(n,\beta)$是Y中的开、

F_σ 集,是仿紧的.存在 Y 中局部有限的(定理 5.3.2 后的注记)开集族 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖 $P(n,\beta)$,精确地加细 $\{P(n,\beta,\alpha)\}_{\alpha\in A}$. $\{V_\beta\}_{\beta\in B_n}$ 是 X 中的离散集族,所以 $\{V_\beta\times H_\alpha\}_{\beta\in B_n}$, $\alpha\in A$ 是 $X\times Y$ 中的局部有限集族.置 $\mathscr{H}=\{V_\beta\times H_\alpha\}_{\beta\in B_n,n\in N,\alpha\in A}$,下证 $\mathscr{H}$ 覆盖 $X\times Y$.设 $(x,y)\in X\times Y$,存在 $n\in N,\beta\in B_n$ 使 $x\in V_\beta$,存在 $\alpha\in A$ 及 Y 中的开集 $P(n,\beta,\alpha)$ 使 $(x,y)\in V_\beta\times P(n,\beta,\alpha)\subset V_\beta\times P(n,\beta)$,因 $\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 覆盖 $P(n,\beta)$,存在 $\alpha'\in A$ 使 $(x,y)\in V_\beta\times H_{\alpha'}\in\mathscr{H}$,故 $\mathscr{H}$ 覆盖 $X\times Y$.

对每一 $n\in N$, $\mathscr{V}_n=\{V_\beta\}_{\beta\in B_n}$ 是离散闭集族.空间 X 是集态正规的,存在离散开集族 $\{W_\beta\}_{\beta\in B_n}$ 使对每一 $\beta\in B_n$, $W_\beta\supset V_\beta$.从而 $\{W_\beta\times H_\alpha\}_{\beta\in B_n,\alpha\in A}$ 是 $X\times Y$ 中的局部有限开集族.置

$$\mathscr{W}=\{(W_\beta\times H_\alpha)\cap U_\alpha\}_{\beta\in B_n,n\in N,\alpha\in A}.$$

则 $\mathscr{W}$ 是空间 $X\times Y$ 的 σ 局部有限开覆盖加细 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $X\times Y$ 是正则的, $X\times Y$ 是仿紧空间(定理 5.1.1). σ 空间与 σ 空间的积是 σ 空间(定理 7.3.4), $X\times Y$ 是仿紧 σ 空间.从而是完备正规空间. 证完.

下面的引理属于 K. Morita(据 Okuyama[1967]).

引理 7.3.10 设对每一 $n\in N$, $X_1\times\cdots\times X_n$ 是 T_2 仿紧 σ 空间,则 $X=\prod_{i=1}^\infty X_i$ 是 T_2 仿紧 σ 空间.

证明 易知 X 是正则 σ 空间(定理 7.3.4),对每一 $n\in N$, $\prod_{i\leqslant n}X_i$ 是遗传仿紧的,只要证明 X 是仿紧的.

设 $\mathscr{V}$ 是 X 的开覆盖,存在开加细覆盖 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$ 使 $\mathscr{V}_n$ 中的每一元 V 具有形式: $\prod_{i\leqslant n}V_i\times\prod_{i>n}X_i$, V_i 是 X_i 中开集. X 中开集族 $\mathscr{V}_n$ 在 $\prod_{i\leqslant n}X_i$ 上的投影 $\mathscr{V}'_n$ 覆盖着 $\prod_{i\leqslant n}X_i$ 的某开子集 G_n, G_n 是仿紧的,存在 G_n 的局部有限开覆盖 $\mathscr{W}'_n$ 加细 $\mathscr{V}'_n$.置

$$\mathscr{W}_n=\left\{W'_n\times\prod_{i>n}X_i: W'_n\in\mathscr{W}'_n\right\},$$

$\mathscr{W}_n$ 是 $G_n\times\prod_{i>n}X_i$ 的局部有限开覆盖,因 $G_n\times\prod_{i>n}X_i$ 是 X 中的开集,从而是 F_σ 集.故上述局部有限性可作为关于空间 X 的(定

理 5.3.2 后的注记). 从而 $\mathscr{W}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{W}_n$ 是 X 的 σ 局部有限开覆盖加细 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$, X 是仿紧空间.(定理 5.1.1). 证完.

定理 7.3.11(Okuyama[1967]) 设 $\{X_i\}_{i\in N}$ 是一列 T_2 仿紧 σ 空间,则积空间 $\prod_{i\in N}X_i$ 是 T_2 仿紧 σ 空间.

证明 由引理 7.3.9,对 $n\in N$, $X_1\times\cdots\times X_n$ 是 T_2 仿紧 σ 空间,由引理 7.3.10 知 $\prod_{i\in N}X_i$ 是 T_2 仿紧 σ 空间. 证完.

关于 M 空间的定理 7.2.11、关于 p 空间的定理 7.2.20 和上述定理 7.3.11 都围绕着解决可数个仿紧空间的积仿紧性问题,从上文可以看到 σ 空间的属性远比 M 空间、p 空间好,但也有个别不足之处,它不同于 M 空间、p 空间能分别为准完备映射,完备映射的逆象保持,σ 空间未必能为有限对一的闭映射逆象保持(见 Mancuso[1972]).

σ 空间与 M 空间是"截然不同"的两类空间(不同于 M 空间与 p 空间),即使加上仿紧性也不能使它们有所"联系",Nagami[1969]曾给出这样的例:仿紧 M 空间不是 σ 空间,仿紧 σ 空间不是 M 空间.

下面叙述关于 σ 空间的和定理. 由 σ 空间的映射定理(推论 7.3.8)可得 σ 空间满足遗传闭包保持闭和定理如下:

定理 7.3.12 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是正则空间 X 的遗传闭包保持闭覆盖,每一 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 是 σ 空间,则 X 是 σ 空间.

证明 参考定理 5.5.3 的证明,由推论 7.3.8 及定理 5.5.6 得证. 证完.

更强于遗传性闭包保持闭和定理的是**控制闭和定理**.

定义 7.3.13 设 $\mathscr{F}$ 是空间 X 的闭集族,称 X 为闭集族 $\mathscr{F}$ 所**控制**(dominated),如果 X 的每一子集 K 是闭的当且仅当存在子集族 $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}$, $\mathscr{F}'$ 覆盖 K,且对任一 $F\in\mathscr{F}'$, $F\cap K$ 是闭集. 如果空间 X 为它的闭覆盖 $\mathscr{F}=\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 所控制,每一 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 属于某空间类,则 X 也属于这空间类,则称 X 满足控制闭和定理.

显然,空间 X 为它的遗传性闭包保持(局部有限)闭覆盖所控制.

Okuyama[1971]曾证明在假设空间是正规的情况下,σ 空间满足控制闭和定理. Burke-Lutzen[1975]早提出能否去掉"正规"这假设,直到1991年为林寿所解决. 证法与 Okuyama 不同,引入了新概念,限于篇幅,不予转载.

定理 7.3.14(林寿[1991c]) 设空间 X 为它的闭覆盖 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$所控制,每一 $F_\alpha(\alpha\in A)$是 σ 空间,则 X 是σ 空间.

证略(读者详见所引林寿论文).

下面介绍一些有关的度量化定理,首先改进上述 Šneider 度量化定理(定理 7.1.4),把"紧"减弱为"可数紧".

引理 7.3.15(Chaber[1976]) 具有 G_δ 对角线的可数紧空间是紧空间.

证明 设 X 是可数紧空间,$\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$是$X$ 的G_δ 对角线序列,设 X 不是紧的,则存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}$不具有可数子覆盖. 取 $x_0\in X$,则存在 $n_0\in N$,使 $\mathscr{U}$不包含可数子族覆盖 $X-\mathrm{st}(x_0,\mathscr{G}_{n_0})$. 不然的话,对每一 $n\in N$ 都可找到可数子族 $\mathscr{U}_n\subset\mathscr{U}$覆盖 $X-\mathrm{st}(x_0,\mathscr{G}_n)$,由于$\bigcup_{n\in N}\{X-\mathrm{st}(x_0,\mathscr{G}_n)\}=X-\bigcap_{n\in N}\mathrm{st}(x_0,\mathscr{G}_n)=X-\{x_0\}$,$\bigcup_{n\in N}\mathscr{U}_n$将是$X-\{x_0\}$的可数子覆盖,从而 $\mathscr{U}$ 具有可数子族覆盖 X.

对每一 $\alpha\in\omega_1$,可以归纳地选取点 $x_\alpha\in Z$ 及 $n_\alpha\in N$ 使

(i) $x_\alpha\notin\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$,

(ii) $\mathscr{U}$不包含可数子族覆盖 $X-\bigcup_{\beta\leqslant\alpha}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$.

对极限序数 α 情况说明如下:如果对每一 $\gamma<\alpha$,$\mathscr{U}$不包含可数子族覆盖 $X-\bigcup_{\beta\leqslant\gamma}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$,则 $\mathscr{U}$ 不包含可数子族覆盖 $X-\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$. 下面证明这一论断,从而可取 $X_\alpha\in X-\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$. 不然的话,$\{\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta}):\beta<\alpha\}\cup\mathscr{U}$将有有限子族覆盖 X(因 X 可数紧),这有限子族必包含 $\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$型的开集(因 X 不是紧的). 设有限子族所包含 $\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$型集中最大的序数 β 是 r,则 $\mathscr{U}$具有有限子族覆盖 $X-\bigcup_{\beta\leqslant\gamma}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{G}_{n_\beta})$,与论断的假设矛

盾.

综上,存在某 $n\in N$ 及不可数集 $A\subset\omega_1$ 使对每一 $\beta\in A$ 有 $n_\beta=n$,则由(i)易证 $\mathscr{G}_n$ 的每一元 G 至多与 $\{x_\beta:\beta\in A\}$ 中一个元相交.从而 $\{x_\beta:\beta\in A\}$ 是 X 中的离散闭子集,这与 X 是可数紧空间矛盾.所以 X 是紧的. 证完.

推论 7.3.16 具有 G_δ 对角线的 T_2 可数紧空间可度量化.

证明 由定理 7.1.4 及引理 7.3.15 得证.

由 G_δ 对角线的刻画定理 7.1.3,可以定义较强于 G_δ 对角线的 G_δ^* 对角线.

定义 7.3.17 空间 X 称为具有 G_δ^* **对角线**,如果存在 X 的覆盖序列 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$ 使对任意 $x,y\in X$, $x\neq y$,存在 $n\in N$ 使 $y\notin\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$(等价地,对每一 $x\in X$, $\{x\}=\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$).上述覆盖序列称为 G_δ^* 对角线序列.

由引理 7.2.16 知正则 θ 加细空间的 G_δ 对角线是 G_δ^* 对角线.

定理 7.3.18(Hodel[1971]) 具有 G_δ^* 对角线的 $w\Delta$ 空间是可展空间.

证明 设 $\{\mathscr{H}_i\}_{i\in N}$, $\{\mathscr{K}_i\}_{i\in N}$,分别是空间 X 的 $w\Delta$ 序列、G_δ^* 序列.置

$$\mathscr{G}_n=\{G:G=(\bigcap_{i=1}^n H_i)\cap(\bigcap_{i=1}^n K_i):H_i\in\mathscr{H}_i,K_i\in\mathscr{K}_i,i\in N\}.$$

则 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$ 同时是 $w\Delta$ 序列及 G_δ^* 序列,且 $\mathscr{G}_{n+1}$ 加细 $\mathscr{G}_n(n\in N)$.

设 $x_n\in\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)(n\in N)$, $\{x_n\}$ 有聚点 p, $\{\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)\}_{n\in N}$ 递减, $p\in\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)}$.因 $\{\mathscr{G}_n\}$ 是 G_δ^* 序列, $\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{G}_n)}=\{x\}$,故 $p=x$, X 是可展空间(定义 7.2.1 后注记). 证完.

下面把推论 7.3.16 的度量化定理中的可数紧空间减弱为 M 空间.

定理 7.3.19 空间 X 可度量化当且仅当 X 是 M 空间且具有 G_δ 对角线.

证明 必要性显然,仅证充分性.设 X 是 M 空间且具有 G_δ

对角线，由定理 7.2.6，存在度量空间 Y 及由 X 到 Y 上的准完备映射 f. 对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$是可数紧的，因具有 G_δ 对角线这一性质是遗传性的，由引理 7.3.15，$f^{-1}(y)$是紧的. 从而 f 是完备映射，由推论 7.2.8，知 X 是仿紧的. 由定理 7.3.18，X 是可展空间. 从而 X 可度量化(定理 4.4.8). 证完.

定理 7.3.20 Moore 空间是正则 σ 空间，正则 σ 空间具有 G_δ 对角线.

证明 设 X 是 Moore 空间具有可展列 $\{\mathscr{G}_n\}_{n\in N}$，可展空间是次仿紧的，对每一 $\mathscr{G}_n$ 存在 σ 离散闭加细覆盖 $\mathscr{F}_n$，从而易证 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 离散网，所以 X 是 σ 空间. σ 空间的平方仍是 σ 空间，仍是完备的，所以对角线是 G_δ 集(T_2 空间的对角线是闭的). 因 σ 空间是次仿紧的，所以具有 G_δ^* 对角线(引理 7.2.16). 证完.

定理 7.3.21 空间 X 可度量化当且仅当 X 是 M 空间且 σ 空间.

证明 由定理 7.3.19、定理 7.3.20 得证.

前面提到 M 空间与 σ 空间是两类"截然不同"的空间，有趣的是把两者合在一起形成可度量化，相当于把可度量化"因式分解".

推论 7.3.22 可数紧的 σ 空间可度量化.

在证明了 T_1 仿紧 M 空间的可数积保持后(定理 7.2.11)，我们曾叙述关于仿紧空间的可数积保持问题，σ 空间类也解决了这问题(定理 7.3.11)，但是仿紧 σ 空间类与仿紧 M 空间类(或仿紧 p 空间类)没有什么"联系"，更不能各自包含对方. Frolik[1960]曾证明"如果空间类 $\mathscr{P}$ 关于可数积是封闭的，则 $\mathscr{P}$ 中元素按完备映射 f 的原象所得的类 $f^{-1}(\{\mathscr{P}\})$ 关于可数积是封闭的". 用上述结果于 σ 空间类，所得的按完备映射的逆象类记作 $f^{-1}\{\sigma\}$，则 $f^{-1}\{\sigma\}$ 类关于可数积是封闭的；用上述结果于仿紧 σ 空间类，由于仿紧空间按完备映射的逆象是仿紧空间，知仿紧 $f^{-1}\{\sigma\}$ 空间类关于可数积是封闭的. 由于仿紧 M 空间(或仿紧 p 空间)可以刻画为度量空间按完备映射的逆象，而度量空间是 σ 空间，所以

仿紧 M 空间(或仿紧 p 空间)类包含于仿紧 $f^{-1}\{\sigma\}$ 空间类，因而可以取 $\mathscr{P}$ 为 $f^{-1}\{\sigma\}$ 空间类，使 $\mathscr{P}$ 的范围得到足够的扩展以统一 Frolik, Morita, Arhangelśkii, Okuyama 的结果.

Nagami[1969]引入下述空间.

定义 7.3.23 空间 X 称为 **Σ 空间(强 Σ 空间)**，如果存在 σ 局部有限闭集族 $\mathscr{F}$ 及由闭可数紧集(紧集)组成的覆盖 $\mathscr{C}$ 使对 X 中开集 $U, C\in\mathscr{C}, C\subset U$，存在 $F\in\mathscr{F}$ 使 $C\subset F\subset U$.

由定义 7.3.23，易知 σ 空间按准完备映射的逆象是Σ空间，按完备映射 f 的逆象是强Σ空间. 强Σ空间类应包含着$f^{-1}\{\sigma\}$空间类，事实正是如此，Nagami[1969]给出一强Σ空间不是某 σ 空间按完备映射的逆象，所以强Σ空间类严格地大于 $f^{-1}\{\sigma\}$空间类.

显然，正则 σ 空间是强Σ空间，由于 iso 紧性(定义 6.6.1)使可数紧闭子集成为紧集，故 iso 紧的Σ空间是强Σ空间.

定理 7.3.24 正则空间 X 是强Σ空间当且仅当 X 是次仿紧的Σ空间.

证明 充分性是显然的，因次仿紧空间是 iso 紧的(定理 6.6.3). 下证正则强Σ空间是次仿紧的，完成必要性的证明.

设 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$ 是强Σ空间 X 的 σ 局部有限闭集族，$\mathscr{C}$ 是由紧集 C 组成的覆盖满足定义 7.3.23，设 $\mathscr{U}$ 是空间 X 的开覆盖. 取 $\mathscr{F}_n$ 中某些元 F 之能被 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}$ 所覆盖者(因覆盖 $\mathscr{C}$ 的每一元(紧集)为 $\mathscr{U}$ 的有限子集族覆盖，由强Σ空间的定义知具有上述性质的 F 是存在的，且所有这些 $F\in\mathscr{F}$ 的全体覆盖 X). 记 $\mathscr{U}(F)=\{U_i(F): i\in k(F)=|\mathscr{U}(F)|\}$. 置 $H_{n,i}=F\cap U_i(F)$, $\mathscr{H}_{n,i}=\{H_{n,i}: F\in\mathscr{F}_n, i\in k(F)\}$. 因 $\mathscr{F}_n$ 局部有限，所以 $\mathscr{H}_{n,i}$ 是局部有限的，所以 $\mathscr{H}=\bigcup_{n\in N, i\in k(F)}\mathscr{H}_{n,i}$ 是 X 的 σ 局部有限开覆盖加细 $\mathscr{U}$，因 X 是正则的，X 是次仿紧空间(定理 6.1.2 及其后的注记). 证完.

定理 7.3.25(Nagami[1969]) 可数个Σ空间(强Σ空间)的并是Σ空间(强Σ空间).

证明 证明是直接的,留给读者.

引理 7.3.26(Okuyama[1967]) 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到空间 Y 上的准完备映射,$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中的局部有限集族,则 $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是空间 Y 中的局部有限集族.

证明 设 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是 X 中的局部有限集族,则 $\{\overline{U_\alpha}\}_{\alpha\in A}$ 仍是局部有限的,f 是闭映射,$\{f(\overline{U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ 是 Y 中的闭包保持闭集族.下证 $\{f(\overline{U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ 是点有限的.如不然,存在 y 属于无限个 $f(\overline{U_{\alpha'}})$,$\alpha'\in A'\subset A$,$A'$ 是 A 的无限子集,则对每一 $\alpha'\in A'$,存在 $x_{\alpha'}\in f^{-1}(y)$ 使 $x_{\alpha'}\in\overline{U_{\alpha'}}$,即 $x_{\alpha'}\in f^{-1}(y)\cap\overline{U_{\alpha'}}$.因 $\{\overline{U_{\alpha'}}\}_{\alpha'\in A'}$ 是点有限的,不失一般性,可作为这些 $x_{\alpha'}$ 是不同的.由 $\{\overline{U_{\alpha'}}\}_{\alpha'\in A'}$ 的局部有限性,易知无限集 $\{x_{\alpha'}:\alpha'\in A'\}$ 是离散的,而 $\{x_{\alpha'}:\alpha'\in A'\}\subset f^{-1}(y)$,这与 $f^{-1}(y)$ 是可数紧集矛盾.所以 $\{f(\overline{U_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ 是点有限的.从而是局部有限的.从而 $\{f(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 也是局部有限的. 证完.

定理 7.3.27(Nagami[1969]) 设 $f:X\to Y$ 是 Σ 空间(强 Σ 空间) X 到空间 Y 上的准完备(完备)映射.则 Y 是 Σ 空间(强 Σ 空间).

证明 设 X 是 Σ 空间(强 Σ 空间),$\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限闭集族.每一 $\mathscr{F}_n$ 是局部有限的,$\mathscr{C}$ 是 X 的可数紧(紧)集组成的覆盖满足 Σ 空间(强 Σ 空间)的定义(定义 7.3.23).由引理 7.3.26,对每一 $n\in N$,$f(\mathscr{F}_n)=\{f(F):F\in\mathscr{F}_n\}$ 是 Y 中的局部有限集族.此外,$f(\mathscr{C})=\{f(C):C\in\mathscr{C}\}$ 是 Y 的可数紧(紧)集组成的覆盖.容易验证 $\bigcup_{n\in N}f(\mathscr{F}_n)$ 及 $f(\mathscr{C})$ 满足 Σ 空间(强 Σ 空间)的定义. 证完.

推论 7.3.28 设 $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是空间 X 的局部有限闭覆盖,每一闭集 $F_\alpha(\alpha\in A)$ 是 X 的 Σ(强 Σ)子空间.则 X 是 Σ(强 Σ)空间.

证明 因 Σ(强 Σ)空间关于拓扑和保持,由定理 7.3.27 及一般性定理 5.5.3 得证. 证完.

定理 7.3.29(Nagami[1969]) 设 $f:X\to Y$ 是空间 X 到 Σ 空

间(强Σ空间)Y上的准完备(完备)映射,则X是Σ空间(强Σ空间).

证明 设Y是Σ空间(强Σ空间),$\mathscr{F}$是Y的σ局部有限闭集族,$\mathscr{C}$是Y的可数紧(紧)集组成的覆盖,满足Σ空间(强Σ空间)的定义. $f^{-1}(\mathscr{F})=\{f^{-1}(F):F\in\mathscr{F}\}$是空间$X$的局部有限闭集族, $f^{-1}(\mathscr{C})=\{f^{-1}(C):C\in\mathscr{C}\}$是$X$的可数紧(紧)集组成的覆盖(习题3.31,3.32). 设X中开集$U\supset f^{-1}(C)$,因f是闭映射,由定理1.5.8,存在X中的开集V使$U\supset V\supset f^{-1}(C)$, $f(V)$是Y中的开集且$V=f^{-1}(f(V))$, $f(V)\supset C$. 因Y是Σ空间(强Σ空间),存在$F\in\mathscr{F}$使$f(V)\supset F\supset C$. 从而$V=f^{-1}(f(V))\supset f^{-1}(C)$. 所以$U\supset f^{-1}(F)\supset f^{-1}(C)$, $f^{-1}(F)\in f^{-1}(\mathscr{F})$. 故$X$是$\Sigma$空间(强$\Sigma$空间). 证完.

推论 7.3.30 M空间是Σ空间,仿紧M空间是强Σ空间.

证明 M空间可以刻画为度量空间在准完备映射下的逆象,而度量空间是Σ空间,推论后半的证明类似. 证完.

推论 7.3.31 Σ空间与紧空间的积是Σ空间.

证明 Σ空间X与紧空间Y的积在X上的投影是完备映射(定理3.3.1). 证完.

定理 7.3.32(Nagami[1969]) 可数个强Σ空间的积是强Σ空间.

证明 设$X=\prod_{i\in N}X_i$每一X_i是强Σ空间, $\mathscr{F}^i=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n^i$是$X_i$中的$\sigma$局部有限闭集族,每一$\mathscr{F}_n^i$是局部有限的. 对每一$n\in N$,可设$X_i\in\mathscr{F}_n^i$及$\mathscr{F}_n^i\subset\mathscr{F}_{n+1}^i$, $\mathscr{C}^i$是X_i中的紧集组成的覆盖, $\mathscr{F}^i$, $\mathscr{C}^i$满足强Σ空间的定义,置

$$\mathscr{F}_n=\left\{\prod_{i\leqslant n}F^i\times\prod_{i>n}X_i:F^i\in\mathscr{F}_n^i,i\leqslant n\right\},$$

$\mathscr{F}_n$在X中局部有限, $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$是$X$的$\sigma$局部有限闭集族,从而容易验证$\mathscr{F}$及$\mathscr{C}=\prod_{i\in N}\mathscr{C}^i$满足强$\Sigma$空间的定义, X是强Σ空间. 证完.

定理 7.3.33(Nagami[1969]) 设$\{X_i\}_{i\in N}$是一列T_2仿紧Σ

空间,则积空间 $X=\prod_{i\in N}X_i$ 是 T_2 仿紧$\sum$空间.

证明 由定理 7.3.24,每一 X_i 是强$\sum$空间,下面证明借用上述定理 7.3.32 的假设符号及论证过程.

每一 X_i 是仿紧的,设 $\mathscr{U}$ 是 $X=\prod_{i\in N}X_i$ 的开覆盖,$\mathscr{F}_n^i$ 是X_i 中的局部有限闭集族,由 X_i 的仿紧性,存在 X_i 中的局部有限开集族 $\mathscr{V}_{i,n}$,使对每一 $F^i\in\mathscr{F}_n^i$ 存在$V(F^i)\in\mathscr{V}_{i,n}$,使 $F^i\subset V(F^i)$且 $\mathscr{V}_{i,n}\subset\mathscr{V}_{i,n+1}(n\in N)$(参见引理 4.4.2 的证明). 置

$$\mathscr{V}_n=\left\{\prod_{i\leqslant n}V(F^i)\times\prod_{i>n}X_i:V(F^i)\in\mathscr{V}_{i,n},i\leqslant n\right\}.$$

$\mathscr{V}_n$是空间X 的局部有限开集族.

取 $\mathscr{F}_n$ 中的某些元A(具有形式$\prod_{i\leqslant n}F^i\times\prod_{i>n}X_i$)之能被 $\mathscr{U}$ 的有限子族 $\mathscr{U}(A)$所覆盖者(因为 X 是强$\sum$空间(定理 7.3.32)覆盖 $\mathscr{C}$ 的每一元(紧集)为 $\mathscr{U}$ 的有限子族覆盖. 从而由强$\sum$空间的定义知具有这性质的 A 是存在的,且这些 $A\in\mathscr{F}$的全体覆盖 X),置 $\mathscr{U}(A)=\{U_j(A):j\in n(A)\}$. 取 $\mathscr{V}_n$ 中对应的元B(具有形式$\prod_{i\leqslant n}V(F^i)\times\prod_{i>n}X_i$),记为 $B(A)$,置 $W_j(A)=U_j(A)\cap B(A)$,

$$\mathscr{W}_{n,j}=\{W_j(A):A\in\mathscr{F}_n,A\text{ 能被 }\mathscr{U}\text{的有限子族覆盖}\}.$$

$\mathscr{W}_{n,j}$是局部有限开集族,$\mathscr{W}=\bigcup_{n,j\in N}\mathscr{W}_{n,j}$是$X$ 的σ 局部有限开覆盖加细 $\mathscr{U}$,因 X 是正则的,X 是仿紧空间. 证完.

引理7.3.34 紧空间 X 的G_δ^* 对角线序列是X 的一个展开.

证明 设 X 是紧空间,具有 G_δ^* 对角线序列$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$,由定义 7.3.17,有 $\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}=\{x\}$,对 $x\in X$ 成立. 下证$\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}_{n\in N}$形成点$x$ 的邻域基,从而得证(定义 4.4.7).

不失一般性,可设 $\mathscr{U}_{n+1}$加细 $\mathscr{U}_n(n\in N)$,对 $x\in X$ 及包含x 的开集U,$\{U\}\cup\{X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}:n\in N\}$覆盖$X$,因 X 是紧的,$\{U\}$及有限个$X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$型的开集覆盖 X,设这有限个开集中$\mathscr{U}_n$的足标最大者为 n_0,则 $U\cup(X-\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n_0})})=X$,从而$\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_{n_0})}\subset U$. 证完.

定理7.3.35(Burke-Lutzer[1975]) 正则空间X是σ空间当

且仅当 X 是具有 G_δ 对角线的Σ空间.

证明 必要性,正则 σ 空间是Σ空间且具有 G_δ 对角线(定理 7.3.20).

充分性.设 X 是Σ空间,$\mathscr{F}=\bigcup_{l\in N}F_l$ 是 X 中的 σ 局部有限闭集族,每一 F_l 是局部有限的.$\mathscr{C}$ 是 X 的可数紧集组成的覆盖,$\mathscr{F},\mathscr{C}$ 满足Σ空间的定义.设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$是 X 中的 G_δ 对角线序列,由引理 7.3.15,$\mathscr{C}$ 中的元(可数紧集)是紧集,所以 X 是强Σ^-空间,强Σ^-空间是次仿紧的(定理 7.3.24).从而可设 $\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$是 G_δ^* 对角线序列(引理 7.2.16),即对每一 $x\in X$, $\{x\}=\bigcap_{n\in N}\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}$.

因 X 是次仿紧的,对每一 $n\in N$,设 $\mathscr{H}_n=\bigcup_{m\in N}\mathscr{H}_{n,m}$是 X 的 σ 离散闭覆盖加细 $\mathscr{U}_n$,每一 $\mathscr{H}_{n,m}$是离散的.置

$$\mathscr{K}(n,m,l)=\{H\cap F:H\in\mathscr{H}_{n,m},F\in\mathscr{F}_l\}.$$

$\mathscr{K}(n,m,l)$是局部有限的.从而 $\mathscr{K}=\bigcup\{\mathscr{K}(n,m,l):m,n,l\in N\}$ 是 σ 局部有限闭集族,下证 $\mathscr{K}$ 是 X 的网络,从而 X 是 σ 空间.

取 $x\in X$ 及包含 x 的开集 U,并取紧集 $C\in\mathscr{C}$ 使 $x\in C$.用引理 7.3.34 于紧子空间 C(用该定理所证最后结果),存在 $n\in N$,使 $\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}\cap C\subset U\cap C$.取 $y\in C-U$,由于 $(C-U)\cap\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}=\varnothing$,存在包含 y 的开集 V_y 使 $V_y\cap\overline{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)}=\varnothing$.置 $V=\bigcup\{V_y:y\in C-U\}$,$C\subset U\cup V$,存在 $F\in\mathscr{F}_l$ 使 $C\subset F\subset U\cup V$;另一方面,$\mathscr{H}_n$ 是 X 的覆盖,点 x 属于某 $H\in\mathscr{H}_{n,m}$.因 $\mathscr{H}_n$ 加细 $\mathscr{U}_n$,H 包含在 $\mathscr{U}_n$的某元中,故有 $x\in H\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$.从而 $x\in H\cap F\in\mathscr{K}(n,m,l)$.$F\subset U\cup V$, $V\cap\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)=\varnothing$, $F\cap\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U\cap\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\subset U$,而 $H\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$.所以 $H\cap F\subset\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\cap F\subset U$.从而 $\mathscr{K}$ 是 X 的网络. 证完.

Michael[1969]给出一仿紧Σ空间在某闭映射下的象不是Σ空间的例说明Σ空间、强Σ空间不能为闭映射保持.因此,我们不能期望像 σ 空间那样的刻画定理(定理 7.3.7)利用 σ 闭包保持集族 $\mathscr{F}$ 刻画Σ空间、强Σ空间,从而 Michael 在定义 7.3.23 中把"局

部有限”代以“闭包保持”以引入 **Σ$^\#$ 空间**、**强 Σ$^\#$ 空间**，使它们能为闭映射保持，这类空间也具有相应于定理 7.3.32、推论 7.3.31 (Okuyama[1972])、定理 7.3.35 (Junnila[1978b])、定理 7.3.24 (Junnila[1978b]证明强$\Sigma^\#$空间是 θ 加细的)的性质，但是下述问题尚未解决.

问题 两个 T_2 仿紧$\Sigma^\#$空间的积是否仿紧?

(Michad[1969])指出$\Sigma^\#$空间在一般拓扑学中的应用取决于上述问题能否有正面解答.

我们自然会考虑到把定义 7.3.23 中的“局部有限”代以“遗传闭包保持”以引入新的空间，这类空间也为闭映射保持，Okuyama [1972]命名为 **Σ* 空间**、**强 Σ* 空间**，并指出如果 X 是仿紧$\Sigma^\#$空间而不是Σ空间(上述 Michael 例的象空间就是这样的空间)，则 X 与闭区间的积不是Σ^*空间，不具有相应于推论 7.3.31 的性质，因此Σ^*空间的意义不大. 利用前 Michael[1969]的例，可以间接证明存在着$\Sigma^\#$空间而不是Σ^*空间.

在这一章的最后，给出正则 σ 空间的闭象的分解定理. Lašnev [1965]证明如下定理：“设 $f: X \to Y$ 是度量空间 X 到空间 Y 上的闭映射，则 Y 可分解为 $Y = Y_0 \cup \bigcup_{n \in N} Y_n$，每一 Y_n 是离散的闭子集；对每一 $y \in Y_0$，$f^{-1}(y)$是紧集.”这一定理通常称为 Lašnev 分解定理(decomposition theorem). 下面把这一定理推广到 σ 空间.

定理 7.3.36(Chaber[1983b]) 设 f 是正则σ 空间到空间 Y 上的闭映射，则 Y 可分解为 $Y = Y_0 \cup \bigcup_{n \in N} Y_n$. 每一 $Y_n (n \in N)$ 是离散闭子集；对每一 $y \in Y_0$，$f^{-1}(y)$是紧集.

证明 设$\bigcup_{n \in N} \mathscr{P}_n$ 是正则空间 X 的 σ 局部有限闭网络，每一 $\mathscr{P}_n$ 是局部有限的且 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1} (n \in N)$，置 $\mathscr{F}_n = \{f(P): P \in \mathscr{P}_n\}$，对每一 $y \in Y$，置 $F_n(y) = \bigcap \{F \in \mathscr{F}_n : y \in F\}$. 因 f 是闭映射，$\mathscr{F}_n$，从而$\{F_n(y): y \in Y\}$都是闭包保持的. 置 $Y_n = \{y \in Y: F_n(y) = \{y\}\}$，则 Y_n 是离散闭子集(Y_n 可看作$\{F_n(y): y \in Y\}$的子族，它

的元是由单点集$\{y\}=F_n(y)$形成.从而这子族是离散的,Y_n 是离散闭子集).

置 $Y_0=Y\setminus\bigcup_{n\in N}Y_n$,要证每一 $y\in Y_0$,$f^{-1}(y)$是紧的.为此,先证 $f^{-1}(y)$是 Lindelöf 的.固定点 $y\in Y_0$,有:

(1) $\{F_n(y)\}_{n\in N}$是点 y 在 Y 中的递减网络.由于 $Y\in Y_0$,$F_n(y)$不是单点集,及 Y 是 T_1 空间,易知每一 $F_n(y)$是无限集.从而可取 Y 中不同的点形成的序列$\{y_n\}_{n\in N}$使 $y_n\in F_n(y)$,由 $F_n(y)$的定义易知:

(2) $P\in\mathscr{P}_n$ 及 $P\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing\Rightarrow$对 $n\geqslant m$,$P\cap f^{-1}(y_n)\neq\varnothing$.

下面证明:

(3) 对每一 $n\in N$,$\{P\in\mathscr{P}_n:P\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing\}$是有限的.

这样,子空间 $f^{-1}(y)$具有可数网络,从而可知 $f^{-1}(y)$是 Lindelöf 的.

如果(3)式不成立,存在 $m\in N$ 使 $\mathscr{P}_m$ 中有无限个元$\{P_n\}_{n\in N}$使$P_n\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$.由(2),对 $n\geqslant m$,$P_n\cap f^{-1}(y_n)\neq\varnothing$,取 $x_n\in P_n\cap f^{-1}(y_n)$,$\mathscr{P}_m$ 局部有限,$\{x_n:n\in N\}$是闭集,f 是闭映射,$\{y_n:n\in N\}$是闭集.但是由(1),$\{y_n\}$收敛于 y.这一矛盾证明了(3),从而 $f^{-1}(y)$是 Lindelöf 的.

下证 $f^{-1}(y)$是紧的.如不然,由 X 的正则性,可以构造 X 的递增的开集序列$\{U_k\}$覆盖$f^{-1}(y)$且 $f^{-1}(y)\cap(U_{k+1}\setminus\overline{U}_k)\neq\varnothing$.取 $x_k\in f^{-1}(y)\cap(U_{k+1}\setminus\overline{U}_k)$.因 $x_k\in X\setminus\overline{U}_k$,$\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是网络,存在 $P_k\in\mathscr{P}_{n_k}$ 使 $x_k\in P_k\subset X-\overline{U}_k$,这里 n_k 可取作 $n_k>n_{k-1}$.由于 $x_k\in f^{-1}(y)$,$x_k\in P_k$,所以 $P_k\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$,由(2),$P_k\cap f^{-1}(y_{n_k})\neq\varnothing$.取 $z_k\in P_k\cap f^{-1}(y_{n_k})$,$\{f(z_k)\}$作为$\{y_n\}$的子序列,收敛于 y.从而$\{z_k\}$有聚点 $z\in f^{-1}(y)$,$z\in$某 U_{k_0},按 z_k 的取法,$z_k\in P_k$,而 $P_k\cap\overline{U}_k=\varnothing$.所以 $z_k\notin U_k$,当 $k>k_0$ 时,$z_k\notin U_k\supset U_{k_0}$.这一矛盾证明了 $f^{-1}(y)$是紧的. 证完.

注记 Chaber[1983]更构造反例说明上述定理中如把"正则 σ"换为"$T_2\ \sigma$"则不能成立.

§4. M_i 空间($i=1,2,3$)

还是从 Nagata-Smirnov-Bing 的度量化定理说起:

"正则空间 X 可度量化当且仅当 X 满足下列条件之一:

(i) X 具有 σ 局部有限基,

(ii) X 具有 σ 离散基."

这是分别于 1950,1951 得到的,这启发了 Michael 于 1953 给出仿紧性的刻画定理(定理 5.1.1,定理 5.1.5):

"正则空间 X 是仿紧的当且仅当 X 满足下列条件之一:

(i′) X 的每一开覆盖具有 σ 局部有限开加细覆盖.

(ii′) X 的每一开覆盖具有 σ 离散开加细覆盖."此后,Michael 企图证明闭映射保持仿紧性,引入闭包保持集族概念,于 1957 证明了(定理 5.1.13):

"正则空间 X 是仿紧的当且仅当满足下列条件:

(iii′) X 的每一开覆盖具有 σ 闭包保持开加细覆盖."

并指出不能在 Nagata-Smirnov-Bing 定理中,以"σ 闭包保持基"代替"σ 局部有限基"(或 σ 离散基),给出了正则具有 σ 闭包保持基的不可度量化空间. 接着 Michael 于 1959 又引入较弱于"闭包保持"的"垫状"集族概念(定义 5.1.11),证明了(引理 5.1.14):

"T_1 空间 X 是仿紧的当且仅当满足下列条件:

(iv′) X 的每一开覆盖具有 σ 垫状加细开覆盖."Michael 关于仿紧性的后面的两个刻画((iii′),(iv′))反过来启发 Ceder 于 1961 引入垫状对基(定义 7.4.1)概念,定义广义度量空间:M_1 空间、M_3 空间如下:

"正则空则 X 称为 M_1 空间如果 X 具有 σ 闭包保持基.

T_1 空间 X 称为 M_3 空间如果 X 具有 σ 垫状对基."

这种以类推形式的相互启发、相互影响的情况是有趣的.

以上说明由度量化定理到仿紧性的刻画及由仿紧性的新的刻画引入新的广义度量空间的思路. 下面正式定义 M_i 空间($i=1,2,3$).

定义 7.4.1 空间 X 的子集族 $\mathscr{B}$ 称为 X 的**拟基**(quasi-base), 如果对每一 $x\in X$ 及 x 的开邻域 U 存在 $B\in\mathscr{B}$ 使 $x\in B^\circ\subset B\subset U$. 设有集对$(P_1,P_2)$所成的族 $\mathscr{P}=\{(P_1,P_2)\}$, 这里 P_1 是开集且 $P_1\subset P_2$. 称 $\mathscr{P}$是 X 的**对基**(pair-base), 如果对每一 $x\in X$ 及 x 的开邻域 U, 存在$(P_1,P_2)\in\mathscr{P}$使 $x\in P_1\subset P_2\subset U$. 对基 $\mathscr{P}$称为**垫状的**, 如果对任一 $\mathscr{P}'\subset\mathscr{P}$, $\overline{\bigcup\{P_1:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}'\}}\subset\bigcup\{P_2:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}'\}$.

显然, 拟基是对基, 只要取(P_1,P_2)为(B°,B).

定义 7.4.2 正则空间 X 称为 **M_1 空间**, 如果 X 具有 σ 闭包保持基; 称为 **M_2 空间**, 如果 X 具有 σ 闭包保持拟基. T_1 空间 X 称为 **M_3 空间**, 如果 X 具有 σ 垫状对基.

定理 7.4.3 $M_1\to M_2\to M_3\to$仿紧、完备正规.

证明 $M_1\to M_2$ 显然. 证 $M_2\to M_3$. 设$\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$ 是空间 X 的 σ 闭包保持拟基. 对每一 $n\in N$, 置 $\mathscr{P}_n=\{(B^\circ,\overline{B}):B\in\mathscr{B}_n\}$. 则$(\bigcup\{B^\circ:(B^\circ,\overline{B})\in\mathscr{P}_n\})^-\subset(\bigcup\{\overline{B}:(B^\circ,\overline{B})\in\mathscr{P}_n\})^-\subset\bigcup\{\overline{B}:(B^\circ,\overline{B})\in\mathscr{P}_n\}$. 显然, $\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 成为 X 的 σ 垫状对基.

证 $M_3\to$仿紧、完备正规. 由 M_3 空间的定义(定义 7.4.2)及仿紧性的刻画(引理 5.1.14)易知 M_3 空间是仿紧的, 且是正规的(定理 5.1.16). 设$\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是M_3 空间 X 的 σ 垫状对基, G 是 X 的开集. 对每一 $n\in N$, 置

$$F_n=(\bigcup\{P_1:P_2\subset G,(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_n\})^-.$$

$F_n\subset\bigcup\{P_2:P_2\subset G,(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_n\}\subset G$. 因$\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是对基, $G=\bigcup_{n\in N}F_n$ 是 F_σ 集, 所以 X 是完备正规的. 证完.

度量空间显然是 M_1 空间, 但存在不可度量化的 M_1 空间. 见下面的例.

例 7.4.4(Michael[1957]) 取自然数 N(作为数直线的子空

间)的 Stone-Čech)紧化 $\beta(N)$的子空间 $N\cup\{x\}$,这里$x\in\beta(N)-N$. $N\cup\{x\}$不是第一可数的,从而不可度量化(例 3.6.16). 包含点 x 的所有开集形成的集族是闭包保持的,连同由单点集 $\{n\}(n\in N)$形成的集族是空间 $N\cup\{x\}$的 σ 闭包保持基,所以 $N\cup\{x\}$是M_1 空间. Nagata 更给出不可度量化的第一可数的 M_1 空间,此例较复杂,参见 Ceder[1961]的例 9.2.

也存在仿紧完备正规空间而不是 M_3 空间. Sorgenfrey 线就是这样的空间,读者可以自己验证(习题 7.24).

至于是否有 $M_2\to M_1$ 及 $M_3\to M_2$,Ceder 当年未能解决. Gruenhage[1976]及 Junnila[1978]独立地证明了 $M_3\to M_2$. 下面我们将通过一系列准备工作叙述这一证明. 至于是否有 $M_2\to M_1$ 是迄今未解决的难题.

下面引入 M_3 空间的两种有效刻画:利用层对应和利用 g 函数.

引理 7.4.5 T_1 空间 X 是M_3 空间当且仅当存在函数 H 使对每一开集$U\subset X$ 及每一$n\in N$ 对应着闭集$H(U,n)$包含在 U 内,满足:

(i) $U=\bigcup_{n\in N}\ H(U,n)=\bigcup_{n\in N}\ H(U,n)^\circ$,

(ii) 对开集 $U,V,U\subset V\Rightarrow H(v,n)\subset H(V,n),n\in N$.

证明 设 X 是M_3 空间,$\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是它的σ 垫状对基. 对每一开集 U 及$n\in N$,置

$$H(U,n)=\overline{\bigcup\{P_1:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_n,P_2\subset U\}},$$

显然满足(ii). 因为每一 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的,所以上式右端$\subset\bigcup\{P_2:(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_n,P_2\subset U\}$. 所以 $H(U,n)\subset U$. 对每一 $x\in U$, 因 $\mathscr{P}$是对基,存在$(P_1,P_2)\in\mathscr{P}_n$ 使 $x\in P_1\subset P_2\subset U$,所以 $x\in P_1\subset H(U,n)$. 因 P_1 是开集,所以 $x\in P_1\subset H(U,n)^\circ$. 因此 $U=\bigcup_{n\in N}H(U,n)=\bigcup_{n\in N}H(U,n)^\circ$,满足(i).

反之,设 X 具有上述对应(满足(i),(ii)). 首先由(i)知 X 是正则的. 对每一 $n\in N$ 置

$$\mathscr{P}_n=\{(H(U,n)^\circ,U):U\in\tau,\tau\text{ 是}X\text{ 的拓扑}\}.$$

对每一开集 U 及 $x\in U$,由(i),存在 $m\in N$ 使 $x\in H(U,m)^{\circ}\subset U$,所以 $\mathscr{P}$ 是对基. 下证每一 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的. 设 $\tau'\subset\tau$. 置 $\bigcup\{U:U\in\tau'\}=V$, $U\subset V \Rightarrow H(U,n)\subset H(V,n)$. 故有 $\overline{\bigcup\{H(U,n)^{\circ}:v\in\tau'\}}\subset H(V,n)\subset V=\bigcup\{U:U\in\tau'\}$. 所以 $\mathscr{P}_n$ 是垫状的. 证完.

注记 Borges[1966]把上述定理中的对应 H 称为空间 X 的一个**层对应**(stratification). 而把这具有层对应的空间称为**层空间**(stratifiable space). 层空间是 M_3 空间的另一名称.

在上述层对应 H 中,为了证明方便可以附加条件

(iii) $H(U,n+1)\supset H(U,n)$, $\quad n\in N$.

因为如以 $H'(U,n)=\bigcup_{i\in N}H(U,i)$ 代 $H(U,n)$ 则同样满足(i),(ii). 这一层对应 H 有时简记为 $U=\{U_n\}$,这里 $U_n=H(U,n)$.

上述层对应 H 可以从它的对偶形状出现:存在函数 G 使对每一闭集 $H\subset X$ 及每一 $n\in N$ 对应着一开集 $G(H,n)$ 包含着 H,满足:

(i′) $H=\bigcap_{n\in N}G(H,n)=\bigcap_{n\in N}\overline{G(H,n)}$,

(ii′) 对闭集 $H,K,H\subset K \Rightarrow G(H,n)\subset G(K,n), n\in N$,

(iii′) $G(H,n+1)\subset G(H,n), n\in N$.

上述对应称为层对应 G. 在以下的证明中,常因方便起见,采用层对应 H 或层对应 G.

上述层对应 H(或 G)所满足的条件(i)(或(i′))如减弱为:

$$U=\bigcup_{n\in N} H(U,n) \quad (\text{或 } H=\bigcap_{n\in N}G(H,n)),$$

则相应的 H(或 G)称为**半层对应**(Semi-Stratification),具有半层对应的空间称为**半层**(Semi-Stratifiable)**空间**(Creede[1970]).

设(X,τ)是拓扑空间,函数 $g:N\times X\to\tau$ 称为 $N\times X$ 上的 g 函数,如果对 $n\in N$ 及 $x\in X$,有:

(i) $x\in g(n,x)$及(ii) $g(n+1,x)\subset g(n,x)$.

对 $N\times X$ 上的 g 函数所满足的条件:

(i) 如 $y\notin$ 闭集 F,则存在 $n\in N$ 使 $y\notin\bigcup\{g(n,x):x\in F\}$,

(ii) 对 $x\in X$,及序列$\{x_n\}$,如 $x\in g(n,x_n)$,则 $x_n\to x$.
是等价的.读者自己验证.下面常要用到.

定理 7.4.6 T_1 空间 X 是M_3 空间(即层空间)当且仅当存在 $N\times X$ 上的g 函数满足:

如 $y\notin$ 闭集 H,则存在 $n\in N$ 使$y\notin\overline{\bigcup\{g(n,x):x\in H\}}$.

证明 设 X 是层空间,具有层对应 G.置 $g(n,x)=G(\{x\},n)$,$g(n,x)$是 g 函数.设 $y\notin H$.由于层对应所满足的(i′),存在 $n\in N$ 使$y\notin\overline{G(H,n)}$.由 $g(n,x)$的定义及 G 所满足的(ii′),$G(H,n)\supset\bigcup_{x\in H}G(\{x\},n)$,所以 $y\notin\overline{\bigcup\{g(n,x):x\in H\}}$.

反之,设 $g(n,x)$是 $N\times X$ 上的g 函数.置 $G(H,n)=\bigcup_{x\in H}g(n,x)$.显然,$G(H,n)$满足(ii′)及$\bigcap_{n\in N}\overline{G(H,n)}\supset H$.如 $y\notin H$,则存在 $n\in N$ 使$y\notin\overline{\bigcup\{g(n,x):x\in H\}}=\overline{G(H,n)}$.故有 $H=\bigcap_{n\in N}\overline{G(H,n)}$,满足(i′).所以 G 是X 上的层对应,X 是层空间.证完.

类似的证法可以有:

定理 7.4.7 T_1 空间 X 是半层空间当且仅当存在$N\times X$ 上的g 函数满足:

如 $y\notin$ 闭集 H,则存在 $n\in N$ 使$y\notin\bigcup\{g(n,x):x\in H\}$.或对 $x\in X$ 及序列$\{x_n\}$,如 $x\in g(n,x_n)$,则 $x_n\to x$.

证明 同定理 7.4.6.证完.

定理 7.4.8 T_1 空间 X 是M_2 空间当且仅当存在 $N\times X$ 上的g 函数满足:

(i) 如 $y\notin$ 闭集 H,则存在 $n\in N$ 使 $y\notin\overline{\bigcup\{g(n,x):x\in H\}}$,

(ii) $y\in g(n,x)\Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$.

证明 设 X 是M_2 空间,$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$ 是X 的σ 闭包保持拟基,因 X 是正则的,$\mathscr{B}$ 的元 B 可作为闭集.置

$$g(n,x)=X-\bigcup\{B:B\in\mathscr{B}_i,i\leqslant n,x\notin B\}.\qquad(1)$$

显然 $g(n,x)$满足(ii).对 $y\notin H,y\in X-H$.因$\mathscr{B}$是 X 的拟基,存在 $B\in\mathscr{B}_n\subset\mathscr{B}$ 使 $y\in B^\circ\subset B\subset X-H$.$B\cap H=\varnothing$,每一 $x\in H$,x

$\notin B$. 由(1), $B^\circ \cap g(n,x)=\varnothing$ 对所有 $x\in H$ 成立. 故 $g(n,x)$ 满足(i).

反之, 设存在 g 函数满足(i), (ii). 由(i), X 是正则的. 置

$$\mathscr{G}_n = \{g(n,x): x \in X\}.$$

$$\mathscr{B}_n = \{X - \bigcup \mathscr{G}_n' : \mathscr{G}_n' \subset \mathscr{G}_n\}. \mathscr{B} = \bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n.$$

对开集 U 及 $x\in U$, $x\notin X-U$. 由(i), 存在 $n\in N$ 使 $x\notin \overline{\bigcup\{g(n,x): x\in X-U\}}$. 令 $\{g(n,x): x\in X-U\}=\mathscr{G}_n'\subset\mathscr{G}_n$. $x\notin\overline{\bigcup\mathscr{G}_n'}\Rightarrow x\in X-\overline{\bigcup\mathscr{G}_n'}\Rightarrow (X-\bigcup\mathscr{G}_n')^\circ\subset X-\bigcup\mathscr{G}_n'\subset U$. $X-\bigcup\mathscr{G}_n'\in\mathscr{B}_n\subset\mathscr{B}$. 所以 $\mathscr{B}$ 是拟基, 下证每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的.

为了证明 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的, 只要证明 $\{\bigcup\mathscr{G}_n':\mathscr{G}_n'\subset\mathscr{G}_n\}$ 是内核保持的. 设对每一 $\alpha\in A$, $\mathscr{G}_n(\alpha)\subset\mathscr{G}_n$, 要证明 $\{\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha):\alpha\in A\}$ 的交 $\bigcap_{\alpha\in A}(\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha))$ 是开集. 设 $y\in\bigcap_{\alpha\in A}(\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha))$. 对每一 $\alpha\in A$, $y\in\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha)\Rightarrow y\in\mathscr{G}_n(\alpha)$ 的某一元 $g(n,x)$. 由(ii), $g(n,y)\subset g(n,x)\subset\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha)$. 从而 $g(n,y)\subset\bigcap_{\alpha\in A}(\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha))$. 故 $\bigcap_{\alpha\in A}(\bigcup\mathscr{G}_n(\alpha))$ 是开集. 证完.

同样的证法对 σ 空间也成立(相应于定理 7.4.8 中的(i)可去掉闭包符号"——").

定理 7.4.9 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $N\times X$ 上的 g 函数满足:

(i) 如 $y\notin$ 闭集 H, 则存在 $n\in N$ 使 $y\notin\bigcup\{g(n,x): x\in H\}$,

(ii) $y\in g(n,x)\Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$.

证明 由于正则 σ 空间可以用 σ 闭包保持闭网络刻画(定理 7.3.7), 证法同上述定理 7.4.8. 证完.

比较定理 7.4.6 与定理 7.4.8 中对 M_2, M_3 空间的刻画, 后者比前者多一条件"(ii) $y\in g(n,x)\Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$". 为了证明 M_3 空间是 M_2 空间, 要构造 M_3 中的 g 函数, 不仅满足(i)且满足(ii). 而在定理 7.4.8 的充分性证明中要证明 $\{\bigcup\mathscr{G}_n':\mathscr{G}_n'\subset\mathscr{G}_n\}$ 是内核保持的, 所以我们要求 $\mathscr{G}_n$ 是点有限的(从而内核保持). 因此把 $g(n,x)$ 适当"扩大些"使达到要求.

设有空间(X,τ)上的函数$N:X\to\tau$对每一$x\in X$确定着x的开邻域$N(x)$.置

$$N^2(x)=\bigcup\{N(y):y\in N(x)\}.$$

$$N^3(x)=\bigcup\{N(z):z\in N^2(x)\}.$$

引理 7.4.10 设(X,τ)是弱仿紧的半层空间,$N:X\to\tau$对每一$x\in X$确定着x的开邻域$N(x)$,则存在X的点有限的开覆盖$\mathscr{V}$,使对每一$x\in X$,$\bigcap\{V\in\mathscr{V}:x\in V\}\subset N^3(x)$.

证明 因X是半层空间,由定理 7.4.7,存在g函数满足:

$$\text{对 } x\in X \text{ 及序列}\{x_n\},x\in g(n,x_n)\Rightarrow x_n\to x \tag{1}$$

让$g(1,x)\subset N(x)$.

置$\mathscr{G}_k=\{g(k,x):x\in X\}$,$\mathscr{Q}_k$是$\mathscr{G}_k$的点有限的开加细覆盖.置

$$H_k=\{x\in X:x\in g(k,y)\Rightarrow y\in N(x)\}. \tag{2}$$

由于(1)知对每一$x\in X$,$x\in$某H_k(不然的话,$x\in g(k,y)$对所有$k\in N$成立而$y\notin N(x)$,在(1)中取$\{x_n\}$为常数序列$\{y\}$,则$y=x$,矛盾).设$k(x)$是使$x\in\overline{H_n}$的最小N(易知$H_k\subset H_{k+1}$,$k\in N$).置

$$Q_n(x)=\bigcap\{Q\in\mathscr{Q}_i:i\leqslant n,x\in Q\}.$$

$$V(x)=Q_{k(x)}-\bigcup\{\overline{H_i}:i<k(x)\}.$$

易知$\mathscr{V}=\{V(x):x\in X\}$是$X$的点有限的开覆盖.下证对每一$x\in X$存在$y,z\in X$使$\bigcap\{V\in\mathscr{V}:x\in V\}\subset N(y)$,而$y\in N(z)$及$z\in N(x)$以完成证明.

设$m=k(x)$.因$x\in\overline{H_m}$,x的开邻域$g(m,x)\cap Q_m(x)$与H_m相交.故存在$z\in H_m\cap g(m,x)\cap Q_m(x)$.从而$z\in g(m,x)\subset N(x)$.由于$\mathscr{Q}_m$加细$\mathscr{G}_m$,存在$y\in X$使$Q_m(x)\subset g(m,y)\subset N(y)$,所以

$$\bigcap\{V\in\mathscr{V}:x\in V\}\subset V(x)\subset Q_m(x)\subset N(y).$$

余下来,只要证$y\in N(z)$.由于$z\in Q_{m(x)}\subset g(m,y)$,而$z\in H_m$.由(2)

$$H_m = \{z \in X : z \in g(m,y) \Rightarrow y \in N(z)\}.$$

所以 $y \in N(z)$. 证完.

定理 7.4.11(Gruenhage[1976],Junnila[1978]) M_3 空间是 M_2 空间.

证明 设 X 是 M_3 空间(即层空间),由定理 7.4.6,存在 $N \times X$ 上的 g 函数 $g(n,x)$ 满足

(i) 如 $y \notin$ 闭集 H,则存在 $n \in N$ 使 $y \notin \overline{g(n,H)}$(为以下行文方便起见,这里记 $\bigcup\{g(n,x): x \in H\} = g(n,H)$). 比较定理 7.4.6 与定理 7.4.8,只要构造 $N \times X$ 上的另一 g 函数(下文设 $g'(n,x)$)使既满足(i)又满足:

(ii) $y \in g(n,x) \Rightarrow g(n,y) \subset g(n,x)$.

固定 $n \in N$,把 g 函数 $g(n,x)$ 看成引理 7.4.10 中的 $N(x)$,类似地引入:

$$g^2(n,x) = \bigcup\{g(n,y): y \in g(n,x)\} = g(n,g(n,x)),$$

$$g^3(n,x) = \bigcup\{g(n,z): z \in g^2(n,x)\} = g(n,g^2(n,x)) = g(n,g(n,g(n,x))).$$

$g^3(n,x)$ 仍是 $N \times X$ 上的 g 函数. 下面证明 $g^3(n,x)$ 仍满足(i).

因 $g(n,x)$ 满足(i),如 $y \notin$ 闭集 H,存在 $k \in N$ 使 $y \notin \overline{g(k,H)}$,从而存在 $m \in N, m \geqslant k$ 使 $y \notin \overline{g(m,\overline{g(k,H)})}$. 从而存在 $n \in N, n \geqslant m$ 使

$$y \notin \overline{g(n,\overline{g(m,\overline{g(k,H)})})} \supset \overline{g(n,g(n,g(n,H)))} = \overline{g^3(n,H)}.$$

到此证明了 $g^3(n,x)$ 满足(i).

由引理 7.4.10,对 $n \in N$,存在 X 上的点有限开覆盖 $\mathscr{V}_n$ 使

$$\bigcap\{V \in \mathscr{V}_n : x \in V\} \subset g^3(n,H). \tag{1}$$

置

$$g'(n,x) = \bigcap\{V \in \mathscr{V}_n : x \in V\}. \tag{2}$$

易知 $g'(n,x)$ 是一 g 函数. 由(1) $g'(n,x) \subset g^3(n,x)$, $g^3(n,x)$ 满足(i),易知 $g'(n,x)$ 满足(i). 由(2)易验证:如 $y \in g'(n,x) =$

$\bigcap\{V\in\mathscr{V}_n:x\in V\}$，则$\bigcap\{V\in\mathscr{V}_n:y\in V\}\subset\bigcap\{V\in\mathscr{V}_n:x\in V\}$，是即 $g'(n,y)\subset g'(n,x)$. 所以 $g'(n,x)$又满足(ii). X 是M_2 空间. 证完.

通过证明 $M_3\Rightarrow M_2$ 的一系列工作，这里以独特的方式得到下面重要结果.

定理 7.4.12(Heath[1969]) M_3 空间(即层空间)是 σ 空间.

证明 由定理 7.4.8，定理 7.4.9 及定理 7.4.11 得证.

注记 7.4.13 M_3 空间是 σ 空间的证明是异常困难的. 首先由 Heath 证明于 1969，未公布其证法. 后 Heath-Hodel[1973]给出了 σ 空间的如下刻画：

(*)"正则空间 X 是σ 空间当且仅当存在$N\times X$ 上的g 函数满足：对 X 中的点x 及序列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$，如果 $x\in g(n,x_n)$且 $x_n\in g(n,y_n)$则 $y_n\to x$."

由此刻画(*)证明 M_3 空间是 σ 空间就比较容易(读者可自证，习题 7.25). 至于刻画(*)的证明也够困难，证法非常精致，我们放在下一节(§5)开始时叙述(见定理 7.5.1)以免冲淡本节主题.

下面叙述 M_i 空间的一些性质.

定理 7.4.14(Ceder[1961]) 可数个 M_i 空间的积分别是M_i 空间($i=1,2,3$).

证明 同 σ 空间的可数积的证法(定理 7.3.4).

以上性质(定理 7.4.14)为 M_i 空间($i=1,2,3$)所共有. 以下定理 7.4.15，7.4.17 及推论 7.4.18，7.4.19 对 M_2 空间(即 M_3 空间或层空间)成立. 下面的证明有时用 M_2 空间的定义，有时用 M_3 空间的层对应的刻画.

定理 7.4.15(Ceder[1961]) M_2 空间(即 M_3 空间或层空间)具有遗传性.

证明 下面就层空间证明. 设 X 是层空间，它的层对应是 $U\to\{U_n\}$. $A\subset X$. U_A 是关于子空间 A 的开集，存在 X 中开集 U 使 $U_A=U\cap A$. 置

$$U_A \to \{U_n \cap A\}.$$

则容易验证 $U_A \to \{U_n \cap A\}$ 是子空间 A 上的层对应，所以 A 是层空间．证完．

下面证明 M_3 空间(即层空间)为闭映射所保持，为此先引入下述引理．

引理 7.4.16(Borges[1966])　设 X 是层空间，对 X 的每一对集(A,U)，这里 A 是闭集，U 是开集，则存在开集 $U_A \subset U$ 满足：

(i) 对闭集 $A,B,A \subset B$；开集 $U,V,U \subset V$；有开集 U_A,V_B 满足 $U_A \subset V_B$，

(ii) $A \cap U \subset U_A \subset U_A^- \subset A \cup U$.

(ii′) 当 $A \subset U$ 时，有 $A \subset U_A \subset U_A^- \subset U$((ii)的特款)．

证明　设 X 上的层对应为 $U \to \{U_n\}$．对每一对闭、开集(A,U)，置

$$U_A = \bigcup_{n \in N}\{U_n - (X-A)_n^-\}.$$

立得(i)．下证 $A \cap U \subset U_A$．设 $x \in A \cap U$；则 $x \in U$，存在 k 使 $x \in U_k$．$x \in A$，$x \notin (X-A)$，所以 $x \in U_k - (X-A)_k^- \subset U_A$(由层对应，$(X-A)_k^- \subset X-A$)．下证 $U_A^- \subset A \cup U$．如 $x \notin A \cup U$，$x \notin A$，取 n 使 $x \in (X-A)_n$．则$(X-A)_n \cap (X-U_n^-)$是 x 的邻域与 U_A 不交．故得(ii)．(ii′)显然由(ii)得出．证完．

定理 7.4.17(Borges[1966])　闭映射保持层空间．

证明　设 $f: X \to Y$ 是层空间 X 到空间 Y 上的闭映射，$U \to \{U_n\}$ 是 X 上的层对应．对空间 Y 的开集 V 置：

$$T_n = [f^{-1}(V)]_n, \qquad S_n = f^{-1}(f(T_n^-)),$$
$$Q_n = [f^{-1}(V)]_{S_n}, \qquad V_n = [f(Q_n)]^\circ.$$

则有：

(a) V_n 是 $f(T_n^-)$ 的邻域：由上述引理的(ii′)的前半，开集 Q_n 包含着闭集 S_n．S_n 是饱和集．因 f 是闭映射，知 $f(Q_n)$是 $f(T_n^-)$

的邻域.

(b) $V_n^- \subset V$:因 $V_n^- \subset [f(Q_n)]^- = f(Q_n^-)$,而由上述引理的(ii′)的后半,$Q_n^- \subset f^{-1}(V)$.从而 $f(Q_n^-) \subset V$,故得 $V_n^- \subset V$.

(c) $\bigcup_{n \in N} V_n = V$:由已证(b)及(a),$V \supset V_n \supset f(T_n)$,所以

$$V \supset \bigcup_{n \in N} V_n \supset \bigcup_{n \in N} f(T_n) = f(\bigcup_{n \in N} T_n) = V.$$

故有 $\bigcup_{n \in N} V_n = V$.

设 V, W 是 X 中的开集,且 $V \subset W$.因 X 是层空间,T_n、S_n 仍保持相应的次序.Q_n 的保持相应的次序由上述引理的(i)得到,从而 V_n 保持相应次序,即 $V_n \subset W_n (n \in N)$.

综上,$V \to \{V_n\}$ 是空间 Y 的层对应,Y 是层空间.证完.

推论 7.4.18 层空间满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 利用定理 5.5.6.证完.

推论 7.4.19(Ceder[1961]) 层空间满足局部有限闭和定理.

证明 局部有限集族是遗传闭包保持的.证完.

以上的定理 7.4.15、定理 7.4.17 是否对 M_1 空间也成立?也就是 M_1 空间的任何子空间是否 M_1? M_1 空间是否为闭映射所保持?迄今尚未解决.从下文的定理 7.4.28、推论 7.4.29 可知:上述二问题中的任何一个的肯定的或否定的解决等同于是否有 $M_3 \Rightarrow M_1$?

关于 M_1 空间的子空间,显然,M_1 空间的开子空间是 M_1 的.此外,有

命题 7.4.20(Itō[1984]) M_1 空间的稠子空间是 M_1 的.从而有:M_1 空间 X 是遗传性M_1 空间当且仅当 X 的每一闭子空间是M_1 的(即对 M_1 空间说,闭遗传性⇒遗传性).

证明 设 D 是M_1 空间 X 的稠子集(即$\overline{D} = X$).易证对 X 的任一开集 B 有$\overline{B \cap D} = \overline{B}$.设 $\mathscr{B} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{B}_n$ 是M_1 空间 X 的σ 闭包保持基,每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的.置$\mathscr{B}_n | D = \{B \cap D : B \in \mathscr{B}_n\}$.由于$\overline{B \cap D} = \overline{B}$,$\mathscr{B}_n | D$ 是闭包保持的.从而$\bigcup \{\mathscr{B}_n | D : n \in N\}$是子空间

D 的 σ 闭包保持基，D 是 M_1 空间. 如果 M_1 空间的每一闭集是 M_1 的. 设 A 是 X 的任意子集，则 $\overline{A}$ 是 M_1 的，从而知 A 是 M_1 的. 证完.

关于 M_1 空间为怎样的闭映射保持，有下面的定理 7.4.22（下面述及的可数双商映射见定义 5.2.2，拟开映射及正则闭集见定理 5.5.10 及定理 5.5.9 前的有关叙述）.

引理 7.4.21（高国士[1983]） 设 $f: X \to Y$ 是拟开的、闭映射，设 $\mathscr{B}$ 是由 X 的开子集形成的闭包保持集族，则 $\mathscr{C} = \{\mathrm{Int} f(B): B \in \mathscr{B}\}$ 是由 Y 的开子集形成的闭包保持集族.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的闭包保持集族，下证 $\mathscr{C} = \{\mathrm{Int} f(B): B \in \mathscr{B}\}$ 是闭包保持的（下面记集族 $\mathscr{U}$ 的元的并为 $\mathscr{U}^* = \bigcup \{U: U \in \mathscr{U}\}$）.

设 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ 及 $y \in \overline{\bigcup \{\mathrm{Int} f(B): B \in \mathscr{B}'\}}$，由于 $f(B) \supset \mathrm{Int} f(B)$，故有

$$f(\overline{\mathscr{B}'^*}) \supset f(\mathscr{B}'^*) \supset \bigcup \{\mathrm{Int} f(B): B \in \mathscr{B}'\}.$$

因 f 是闭映射，$f(\overline{\mathscr{B}'^*})$ 是闭集，故

$$f(\overline{\mathscr{B}'^*}) \supset \overline{\bigcup \{\mathrm{Int} f(B): B \in \mathscr{B}'\}}.$$

从而 $f^{-1}(y) \cap f(\overline{\mathscr{B}'^*}) \neq \varnothing$. 由于 $\mathscr{B}'$ 是闭包保持的，存在 $B \in \mathscr{B}'$ 使 $f^{-1}(y) \cap \overline{B} \neq \varnothing$. 设 U 是 y 的任一开邻域，则 $f^{-1}(U) \cap B \neq \varnothing$. 由于 f 是拟开映射，不空开集 $f^{-1}(U) \cap B$ 的象的内核不空，由于

$$\mathrm{Int} f(f^{-1}(U) \cap B) \subset \mathrm{Int}(U \cap f(B)) = U \cap \mathrm{Int} f(B)$$

知 $U \cap \mathrm{Int} f(B)$ 不空. 这说明 y 的任开邻域 U 与 $\mathrm{Int} f(B)$ 相交，即 $y \in \overline{\mathrm{Int} f(B)}$. 这证明了 $\mathscr{C}$ 是闭包保持的. 证完.

定理 7.4.22（高国士[1983]） 拟开的、可数双商闭映射保持 M_1 空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是由 M_1 空间 X 到拓扑空间 Y 上的拟开的、可数双商闭映射. 设 $\mathscr{B} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{B}_n$ 是 M_1 空间 X 的 σ 闭包保持基，每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的. 注意，如果 $\mathscr{U}$ 是闭包保持集族，则 $\mathscr{U}$ 的

所有子族的元的并所形成的集族$\tilde{\mathscr{U}}$仍是闭包保持的．所以可以假设 B_n 的任一子族的元的并是 $\mathscr{B}_n$ 的一个元．此外，不失一般性，可设 $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}_{n+1}(n \in N)$．置 $\mathscr{C} = \{\mathrm{Int} f(B): B \in \mathscr{B}\}$，由引理 7.4.21，知 $\mathscr{C}$ 是空间 Y 的 σ 闭包保持开集族．

对每一 $y \in Y$，设 V 是 y 的开邻域，因 $\mathscr{B}$ 是 X 的基，存在 $\mathscr{B}' \subset \mathscr{B}$ 使 $f^{-1}(y) \subset \mathscr{B}'^{*} \subset f^{-1}(V)$．置 $\mathscr{B}'_n = \mathscr{B}' \cap \mathscr{B}_n$，则 $\mathscr{B}' = \bigcup_{n \in N} \mathscr{B}'_n$，$f^{-1}(y) \subset \bigcup_{n \in N} \mathscr{B}'^{*}_n \subset f^{-1}(V)$．由于 $\mathscr{B}_n \subset \mathscr{B}_{n+1}(n \in N)$，序列 $\{\mathscr{B}'^{*}_n\}$ 是递增的．因 f 是可数双商映射，存在自然数 m 使 $y \in \mathrm{Int} f(\mathscr{B}'^{*}_n) \subset V$．由假设存在 $B \in \mathscr{B}_m \subset \mathscr{B}$，使 $B = \mathscr{B}'^{*}_m$．所以 $\mathrm{Int} f(B) \in \mathscr{C}$ 及 $y \in \mathrm{Int} f(B) \subset V$．到此证明了 $\mathscr{C}$ 是空间 Y 的 σ 闭包保持基．显然 Y 是正则的，Y 是 M_1 空间．证完．

映射 $f: X \to Y$ 称为**不可约的**(irreducible)，如果 f 不能把 X 的任何闭的真子集映成整个空间 Y．这定义等价于 X 的任何不空的开集 U 总包含着某一 $y \in Y$ 的纤维，即存在 $y \in Y$ 使 $U \supset f^{-1}(y)$．

推论 7.4.23(Borges-Lutzer[1974]) 不可约完备映射保持 M_1 空间．

证明 由于完备映射→双商、闭映射→可数双商闭映射，而易证伪开的不可约映射是拟开映射(习题 7.27)．证完．

注记 存在着开(从而拟开、可数双商)、闭映射既不是不可约的，又不是完备的(设 X 是可数紧而不是紧空间，Y 是第一可数的，f 是由积空间 $X \times Y$ 到空间 Y 上的投影)．

推论 7.4.24 既开且闭映射保持 M_1 空间．

证明 由定理 7.4.22 即得．证完．

映射 $f: X \to Y$ 称为 k **对一的**(k *to* one)，如果对每一 $y \in Y$，$f^{-1}(y)$ 正好包含着 X 中 k 个点．

推论 7.4.25(Gittings[1977]) k 对一的开映射保持 M_1 空间．

证明 不难证明 T_2 空间上的 k 对一的开映射是闭的(习题 7.28)，从而由推论 7.4.24 得证．证完．

注意,有限对一开映射未必能保持 M_1 空间(见例 4.4.1).

推论 7.4.26(高国士[1983],Itō[1984]) M_1 空间满足局部有限正则闭和定理.

证明 由定理 7.4.22 及定理 5.5.9 得证.证完.

下面叙述 Heath-Junnila 定理(定理 7.4.28).由此可看到 $M_3 \Rightarrow M_1$ 联系着 M_1 空间的遗传性及映射性质.

引理 7.4.27 正则空间 X 是 M_1 空间当且仅当 X 具有由正则闭集组成的 σ 闭包保持拟基.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是 M_1 空间 X 的 σ 闭包保持基,则 $\overline{\mathscr{B}}$ 是 X 的 σ 闭包保持的正则闭拟基.反之,设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的 σ 闭包保持的正则闭拟基,则 $\mathscr{B}^\circ$ 是 X 的闭包保持基.证完.

定理 7.4.28 (Heath-Junnila[1981]) 每一 M_3 空间是某一 M_1 空间在完备映射下的象.

证明 设 X 是 M_3 空间(即 M_2 空间),$S=\{0\}\cup\{1/n:n\in N\}$ 是数直线的子空间.作 X 与 S 的积 $Z=X\times S$.在 Z 上除赋以积拓扑外,把 $X\times\{1/n:n\in N\}$ 的点都作为开集(孤立点).X 同胚于 Z 的闭子空间 $X\times\{0\}$.$X\times\{0\}$ 的点 $(x,0)$ 的邻域基取为 $X\times S$ 中相应点 $(x,0)$ 在积拓扑下的邻域基.显然 Z 是正则空间.

设 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$ 是 M_2 空间的 σ 闭包保持拟基.不失一般性,可作为 $\mathscr{B}$ 的每一元 B 是闭集.对闭集 B 考察 Z 中相应的集:$B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\})$ 及 $B^\circ\times\{1/k:k\geqslant m\}$,后者是 Z 中开集.而

$$\overline{B^\circ\times\{1/k:k\geqslant m\}}=B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\}).$$

所以 $B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\})$ 是正则闭集.置

$$\mathscr{U}_{n,m}=\{B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\}):B\in\mathscr{B}n\},m\in N,$$

$$\mathscr{V}_n=\{\{(x,1/n)\}:x\in X\}.$$

由 $\mathscr{B}_n$ 在 X 中的闭包保持性,知每一 $\mathscr{U}_{n,m}(m\in N)$ 在 Z 中是闭包保持的.所以 $\bigcup_{n,m\in N}\mathscr{U}_{n,m}$ 是 σ 闭包保持正则闭集族.$\mathscr{V}_n$ 是 Z 中的离散开、闭集族,显然是闭包保持正则闭集族.容易验证

$$(\bigcup_{n,m\in N}\mathscr{U}_{n,m})\cup(\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n)$$

是空间 Z 的 σ 闭包保持正则闭拟基. 由引理 7.4.27 知 Z 是 M_1 空间. 下面构造 Z 的子集 Z', 使 Z' 仍是 M_1 空间且 Z' 到 X 上的投影是完备映射.

因 M_2 空间是 σ 空间(定理 7.4.12). 存在 σ 离散闭网络 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$. 设离散闭集族 $\mathscr{F}_n=\{F_\alpha:\alpha\in A_n\}$. 任取点 $x_{n,\alpha}\in F_\alpha$, 则集 $E_n=\{x_{n,\alpha}:\alpha\in A_n\}$ 是离散闭集. 置 $D_n=\bigcup_{i=1}^n E_i$, $D=\bigcup_{n\in N}D_n$. 因 $\mathscr{F}$ 是 X 的网络, 易知 D 稠于 X. 置

$$Z'=(X\times\{0\})\cup(\bigcup_{n\in N}(D_n\times\{1/n\})),$$

$Z'\subset Z$. 对闭集 $B\in\mathscr{B}_n$, 由于 D 稠于 X, 仍有($^{-Z'}$ 表示关于子空间 Z' 的闭包)

$$\begin{aligned}&\overline{(B^\circ\times\{1/k:k\geqslant m\})\cap Z'}^{Z'}\\&=B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\})\cap Z'.\end{aligned}$$

所以 $B\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\})\cap Z'$ 是子空间 Z' 的正则闭集. 置

$$\mathscr{U}'_{n,m}=\mathscr{U}_{n,m}\mid Z'=\{U_{n,m}\cap Z':U_{n,m}\in\mathscr{U}_{n,m}\},$$

$$\mathscr{V}'_n=\{\{(x,1/n)\}:x\in D_n\}=\{\{(x_{n,\alpha},1/n)\}:\alpha\in\bigcup_{i=1}^nA_i\}.$$

易知 $(\bigcup_{n\in N}^m\mathscr{U}'_{n,m})\cup\{\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}'_n\}$ 是空间 Z' 的 σ 闭包保持正则闭拟基, 所以 Z' 是 M_1 空间. 下面证 Z' 到 X 上的投影 f 是完备映射.

对 $x\in X$, $f^{-1}(x)$ 显然是紧集. 下证 f 是闭的. 设闭集 $C\subset Z'$, $x\notin f(C)$, 则 $C\cap f^{-1}(x)=\varnothing$. 从而 $(x,0)\notin C$. 存在 x 在 X 中的邻域 U 及 $m\in N$ 使

$$[U\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\})]\cap C=\varnothing.$$

(照例应是 $[U\times(\{0\}\cup\{1/k:k\geqslant m\})]\cap Z'\cap C=\varnothing$, 但 $C\subset Z'$) 对每一 $n<m$, 由于 $(x,1/n)\notin C$, 而 $D=U_{i=1}^nE_i$ 是 X 中 n 个离散闭集的并. 置

$$V_n=X-\bigcup_{i=1}^n(\{x_{i,\alpha}\in E_i:(x_{i,\alpha},1/n)\in C\}).$$

由于离散闭集的任何子集是闭的, V_n 是点 x 在 X 中的开邻域使 $V_n\cap f(C\cap(X\times\{1/n\}))=\varnothing$. 所以 $U\cap(\bigcap_{n<m}V_n)$ 是 X 的开邻域与 $f(C)$ 不相交, 故 $f(C)$ 是闭集, f 是闭映射. 证完.

推论 7.4.29 下列论断等价:

(i)每一 M_3 空间是 M_1 空间，

(ii)每一 M_1 空间的每一子空间是 M_1 空间，

(iii)每一 M_1 空间的每一闭子空间是 M_1 空间，

(iv) M_1 空间在闭映射下的象是 M_1 空间，

(v) M_1 空间在完备映射下的象是 M_1 空间.

证明 由于 M_3 空间是遗传的(定理 7.4.15)及 M_3 空间为闭映射保持(定理 7.4.17)可得(i)⇒(ii)及(i)⇒(iv).(ii)⇒(iii)及(iv)⇒(v)是平凡的.(iii)⇒(i)及(v)⇒(i)由定理 7.4.28 得证.证完.

定理 7.4.30(ceder[1961]) M_2 空间 X 的每一闭集具有闭包保持邻域拟基(即对每一闭集 A,存在闭包保持集族 $\mathscr{W}$ 使对每一开集 $G\supset A$ 存在 $V\in\mathscr{W}$ 使 $A\subset V^\circ\subset V\subset G$).

证明 设 A 是 M_2 空间 X 的闭集.由 X 的完备正规性存在递减开集序列 $\{O_n\}_{n\in N}$ 使每一 $O_n\supset A$,且 $\bigcap_{n\in N}\bar{O}_n=A$.令 $\bar{O}_n=H_n$,则 $\bigcap_{n\in N}H_n=A$.设 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$ 是 X 的 σ 闭包保持拟基,每一 $B\in\mathscr{B}$ 是闭集.置 $\mathscr{U}_n=\mathscr{B}_n|H_n=\{B\cap H_n:B\in\mathscr{B}_n\}$,则 $\mathscr{U}_n$ 是闭包保持闭集族.因 $\mathscr{U}_n^*=\bigcup\{U:U\in\mathscr{U}_n\}\subset H_n$, $n\in N$.而 $\{H_n\}_{n\in N}$ 关于 $X-A$ 是局部有限的.所以 $\mathscr{U}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{U}_n$ 关于 $X-A$ 是闭包保持的.设 $\mathscr{V}$ 是 $\mathscr{U}$ 的所有子族的并所成的集族.$\mathscr{V}$ 关于 $X-A$ 闭包保持.置 $\mathscr{W}=\{V\in\mathscr{V}:A\subset V^\circ\}$,$\mathscr{W}$ 在 X 中闭包保持($\mathscr{W}$ 的每一元包含 A).

下证 $\mathscr{W}$ 是 A 的邻域拟基.设 G 是包含 A 的开集.因 $\mathscr{B}$ 是 X 的拟基,对每一 $x\in A$ 存在 $n_x\in N$, $B_x\in\mathscr{B}_{n(x)}$ 使 $x\in B^\circ{}_x\subset B_x\subset G$.置

$$V=\bigcup\{B_x\cap H_{n(x)}:x\in A\}.$$

则 $V\in\mathscr{V}$,且易知 $A\subset V^\circ\subset V\subset G$.由此得 $V\in\mathscr{W}$.$\mathscr{W}$ 是集 A 的邻域拟基.证完.

定理 7.4.31(Borges-Lutzer[1973]) 设 X 是集态正规的 σ 空间,且 X 的每一闭集具有 σ 闭包保持邻域拟基,则 X 是 M_2 空间.

证明 因 X 是σ 空间,设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是X 的σ 离散网络,每一 $\mathscr{P}_n=\{P_{\alpha,n}:\alpha\in A_n\}$是离散闭集族. 由集态正规性. 存在离散开集族$\{Q_{\alpha,n}:\alpha\in A_n\}$使 $P_{\alpha,n}\subset Q_{\alpha,n},\alpha\in A_n$. 设 $\mathscr{B}_{\alpha,n}=\bigcup_{k\in N}\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$ 是闭集 $P_{\alpha,n}$的σ 闭包保持邻域拟基,每一 $\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$是闭包保持的. 不妨设 $\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$ 的每一元包含在 $Q_{\alpha,n}$ 内. 对每一对自然数 n,k 让 $\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$按α 的指标集A_n 取和,得集族

$$\mathscr{B}_{n,k}=\bigcup_{\alpha\in A_n}\mathscr{B}_{\alpha,n,k}.$$

由于 $\mathscr{B}^*_{\alpha,n,k}\subset Q_{\alpha,n}$,而$\{Q_{\alpha,n},\alpha\in A_n\}$是离散的,所以 $\mathscr{B}_{n,k}$是闭包保持的.

下证 $\mathscr{B}=\bigcup_{n,k\in N}\mathscr{B}_{n,k}$是$X$ 的拟基. 对 $x\in X$ 及包含x 的开集 U,因 $\mathscr{P}$是 X 的网络,存在闭集 $P_{\beta,j}\in\mathscr{P}_j\subset\mathscr{P}$使 $x\in P_{\beta,j}\subset U$. 因 $\mathscr{B}_{\beta,j}$是闭集$P_{\beta,j}$的邻域拟基,存在 $V\in\mathscr{B}_{\beta,j}\subset\mathscr{B}$使

$$x\in P_{\beta,j}\subset V^\circ\subset V\subset U.$$

所以 $\mathscr{B}$ 是 X 的σ 闭包保持拟基,X 是M_2 空间. 证完.

推论 7.4.32 设 M_3 空间 X 的每一闭集具有σ 闭包保持开邻域基,则 X 是M_1 空间.

证明 因 M_3 空间是集态正规(定理 7.3.4,推论 5.1.17)、σ 空间(定理 7.4.12),在上述定理的证明中,换“拟基”为“基”,换“邻域拟基”为“开邻域基”,即得证. 证完.

至于 M_1 空间是否有相应于定理 7.4.30 的结果,也就是 M_1 空间的每一闭集具有闭包保持开邻域基否? 这问题尚未解决. 下文把每一闭集具有闭包保持开邻域基的 M_3 空间类记作 $\mathscr{P}$. 由推论 7.4.32,类 $\mathscr{P}\subset M_1$ 空间类. 在 Heath-Junnila 定理(定理 7.4.28)的证明中的空间 Z. Z'的每一闭集都具有闭包保持开邻域基,也就是 $Z,Z'\in\mathscr{P}$(作为习题,读者可自己证明).

M_1 空间的每一点具有闭包保持开邻域基否? 这问题也未解决. 下面是 Ceder[1961]的结果.

定理 7.4.33(Ceder[1961])如果存在一个 M_1 空间在某一点 p 没有闭包保持开邻域基,则:(i)存在一个不是 M_1 空间的 M_3 空

间.(ii)存在一 M_1 空间 Y 及某闭集 A 使 Y/A 不是 M_1 空间.

证明 设 M_1 空间 X 在点 $p\in X$ 没有闭包保持开邻域基.对 $n\in N$ 取 X 的同胚象 X_n.置 $Y=\bigoplus_{n\in N}X_n$ 是可数个 M_1 空间 X_n $(n\in N)$的(不相交)拓扑和(定义 3.1.21).Y 是 M_1 空间.设 p_n 是 X 中点 p 在 X_n 中的同胚象.置 $A=\{p_n:n\in N\}$,A 是 Y 的闭子集.把集 A 等同于一点得商空间 Y/A.设 Y 到 Y/A 的商映射为 i,i 是闭映射,Y/A 是 M_3 空间(定理 7.4.17).

下证 Y/A 不是 M_1 空间.如不然,设 Y/A 具有 σ 闭包保持基 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$,每一 $\mathscr{B}_n$ 是闭包保持的.则对 $n\in N$,

$$\{i^{-1}(B)\cap X_n:A\in B\in\mathscr{B}_n\}$$

(这里 A 是 Y/A 中点)是 X_n 中包含点 p_n 的闭包保持开集族.由假设,M_1 空间 X_n 中点 p_n 没有闭包保持开邻域基,所以存在 X_n 中开集 V_n 使 $p_n\in V_n$,而对满足 $A\in B\in\mathscr{B}_n$ 的 B 有

$$(i^{-1}(B)\cap X_n)\not\subset V_n. \qquad (*)$$

置 $V=\bigcup_{n\in N}V_n$, $V\subset Y$, $i(V)\subset Y/A$. Y/A 中点 $A\in i(V)$, $i(V)$是 Y/A 中的开集.因 $\mathscr{B}$ 是 Y/A 的基,存在 $B\in\mathscr{B}_k$ 使 $A\in B\subset i(V)$.从而

$$i^{-1}(B)\cap X_k\subset V\cap X_k=V_k.$$

这与(*)矛盾.所以 Y/A 不是 M_1 空间.证完.

下面叙述 Itō 的重要结果.

定理 7.4.34(Itō[1985]) 设 M_3 空间的每一点具有闭包保持开邻域基,则 X 的每一闭集具有闭包保持开邻域基,即 $X\in\mathscr{P}$.从而 X 是 M_1 空间.

证明 设 F 是 M_3 空间 X 的闭集.因 $M_3=M_2$,由 Ceder 定理 7.4.30,F 具有闭包保持邻域拟基 $\mathscr{B}=\{B_\alpha:\alpha\in A\}$.不失一般性,可作为 $\mathscr{B}$ 中元 B_α 是闭集.

因 M_3 空间是 σ 空间,如定理 7.4.28 所证,存在 σ 离散闭集 $D=\bigcup_n D_n$,每一 D_n 是离散闭集,且 D 稠于 X.离散闭集 D_n 可看作是由单点集$\{x\}$($x\in D_n$)形成的离散集族.由 X 的集态正规性

(点态集态正规已够)存在离散开集族 $\mathscr{W}=\{W_n(x):x\in D_n\}$ 使 $x\in W_n(x)$.

M_3 空间的层对应可取作:每一闭集 E 对应着可数个闭集 E_n 使 $E^\circ{}_n\supset E$, $E=\bigcap_n E_n$ 且如 $E\subset F$(闭),则 $E_n\subset F_n$, $(n\in N)$. 不妨设 $m>n$ 时, $E_m\subset E_n$.

由定理假设,每一点 $x\in D$ 具有闭包保持开邻域基 $\mathscr{U}_x$. 不失一般性,当 $x\in B_\alpha\cap D_n$ 时,可作为 $\mathscr{U}_x$ 的每一元(开集)包含在 $W_n(x)\cap B^\circ{}_{\alpha,n}\subset W_n(x)\cap B_{\alpha,n}$. 即当 $x\in B_\alpha\cap D_n$ 时,

$$\bigcup \mathscr{U}_x \subset W_n(x)\cap B_{\alpha,n},\qquad n\in N. \tag{1}$$

设 φ 是定义在 $B_\alpha\cap D$ 上的函数使对每一 $x\in B_\alpha\cap D$, $\varphi(x)\in\mathscr{U}_x$ ($\varphi(x)$ 为 x 的某开邻域). 记这些 φ 的全体为 Φ_α. 置

$$B_\alpha^\varphi = B^\circ_\alpha\cup(\bigcup\{\varphi(x):x\in B_\alpha\cap D\}),\varphi\in\Phi_\alpha. \tag{2}$$

B_α^φ 是开集. 置 $\mathscr{B}^\#=\{B_\alpha^\varphi:\alpha\in A,\varphi\in\Phi_\alpha\}$. 下证 $\mathscr{B}^\#$ 是 F 的邻域基.

对开集 $G\supset F$,因 $\mathscr{B}$ 是 F 的邻域拟基,存在 $B_\alpha\in\mathscr{B}$ 使 $F\subset B^\circ{}_\alpha\subset B_\alpha\subset G$. 对每一点 $x\in B_\alpha\cap D$, $x\in G$ 存在 $U_x\in\mathscr{U}_x$ 使 $x\in U_x\subset G$. 故存在 $\varphi\in\Phi_\alpha$ 使 $B^\circ{}_\alpha\subset B_\alpha^\varphi\subset G$. 所以 $\mathscr{B}^\#$ 是 F 的邻域基. 下证 $\mathscr{B}^\#$ 是闭包保持的.

任取 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}^\#$. 设

$$x\notin\bigcup\{\overline{B_\alpha^\varphi}:B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\}. \tag{3}$$

置 $A'=\{\alpha\in A$:对某些 $\varphi\in\Phi_\alpha, B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\}$ 及

$$\Phi'_\alpha=\{\varphi\in\Phi\alpha:B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\},\alpha\in A.$$

设 $H=\bigcup\{B_\alpha:\alpha\in A'\}$. 由(2), $B_\alpha\cap D\subset B_\alpha^\varphi$, $\overline{B_\alpha\cap D}\subset\overline{B_\alpha^\varphi}$. 由于 D 稠于 X(从而稠于 B_α), $B_\alpha=\overline{B_\alpha\cap D}$. 所以 $B_\alpha\subset\overline{B_\alpha^\varphi}$. 由(3) $x\notin H$. 从而存在 n 使 $x\notin H_n$.

置 $C=\bigcup\{B^\circ{}_\alpha\cup(\bigcup\{\varphi(x):x\in B_\alpha\cap(\bigcup_{k\geqslant n}D_k)\}):B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\}$. 设 $x\in B_\alpha\cap D_m$, 这里 $\alpha\in A'$, $m\geqslant n$ 及 $\varphi\in\Phi'_\alpha$. 按 $\varphi(x)\in\mathscr{U}_x$, 由(1) $\bigcup\mathscr{U}_x\subset B_{\alpha,m}$ 而 $B_\alpha\subset H$, 故有 $\varphi(x)\subset B_{\alpha,m}\subset B_{\alpha,n}\subset H_n$. 从而 $C\subset H_n$. H_n 闭, $\bar{C}\subset H_n$. 因 $x\notin H_n$, 故有 $x\notin\bar{C}$.

置 $\mathscr{D}=\{\varphi(x):x\in B_\alpha\cap(\bigcup_{1\leqslant k<n}D_k),B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\}$. 每一 $\varphi(x)$

$\in \mathscr{U}_x$. 由(1)当 $x\in B_\alpha\cap D_k$ 时, $\bigcup\mathscr{U}_x\subset W_k(x)\in\mathscr{W}_k$. 每一 $\mathscr{W}_k(1\leqslant k<n)$是离散集族. 从而 $\mathscr{W}=\bigcup_{k=1}^{n-1}\mathscr{W}_k$ 是局部有限集族, $\mathscr{U}_x$ 是闭包保持集族,而 $\bigcup\mathscr{U}_x$ 包含在 $\mathscr{W}$ 的某一元中. 所以 $\mathscr{D}$ 是闭包保持集族. 对 $\mathscr{D}$ 中的每一元 $\varphi(x)$,由 (3) $x\notin\overline{\varphi(x)}$,由 $\mathscr{D}$ 的闭包保持性, $x\notin\overline{\bigcup\mathscr{D}}$. 由 (2), $C\cup(\bigcup\mathscr{D})=\bigcup\{B_\alpha^\varphi: B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\}$, 故得 $x\notin\overline{\bigcup\{B_\alpha^\varphi:B_\alpha^\varphi\in\mathscr{B}'\}}$, $\mathscr{B}^\#$ 是闭包保持的. 所以 $X\in\mathscr{P}$, 由推论 7.4.32 X 是 M_1 空间. 证完.

推论 7.4.35 第一可数的 M_3 空间(称为 Nagata 空间)是 M_1 空间.

证明 每一点的可数开邻域基可作为递减的,从而是闭包保持的. 证完.

命题 7.4.36(Borges-Lutzer[1974]) 设 X 是 M_1 空间, A 是闭子集. 则商空间 X/A 是 M_1 空间当且仅当 A 具有 σ 闭包保持开邻域基.

证明留给读者.

定理 7.4.37(夏省祥[1990]) 设 $f:X\to Y$ 是 M_1 空间 X 到空间 Y 上的拟开、闭映象射,则 Y 是 M_1 空间当且仅当 Y 的每一点具有 σ 闭包保持开邻域基.

证明 只要证明充分性. 因 M_1 空间是 σ 空间(定理 7.4.12), f 是闭映射. 由 σ 空间闭象的分解定理(定理 7.3.35), Y 可分解为 $Y=Y_0\cup\bigcup_{n\in N}Y_n$, 每一 Y_n 是 Y 的离散闭集;对每一 $y\in Y_0$, $f^{-1}(y)$是 X 中紧集.

设 $\mathscr{P}=U_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是 M_1 空间 X 的 σ 闭包保持基,每一 $\mathscr{P}_n$ 是闭包保持开集族且关于有限并封闭的. 并设 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$, $n\in N$. 置 $\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}f(\mathscr{P}_n)^\circ$. 由引理 7.4.21, $\mathscr{B}$ 是 Y 的 σ 闭包保持开集族. 对 $y\in Y_0$, 因 $f^{-1}(y)$是 X 中紧集及 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$且每一 $\mathscr{P}_n$ 关于有限并封闭的,知$(\mathscr{B})_y=\{B\in\mathscr{B}: y\in B\}$是点 y 在 Y 中的邻域基.

每一 Y_n 是 Y 中的离散闭集. 记 $Y_n=\{y_{\alpha,n}:\alpha\in A_n\}$. 因 Y 是仿紧的,从而是集态正规的(下仿定理 7.4.31 的证法),存在离散

开集族$\{Q_{\alpha,n}:\alpha\in A_n\}$使$y_{\alpha,n}\in Q_{\alpha,n},\alpha\in A_n$.设

$$\mathscr{B}_{\alpha,n}=\bigcup_{k\in N}\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$$

是点$y_{\alpha,n}$在Y中的σ闭包保开邻域基.并设$\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$的每一元包含在$Q_{\alpha,n}$内.对每一对自然数$n,k\in N$,让$\mathscr{B}_{\alpha,n,k}$按α的指标集A_n取和,得集族

$$\mathscr{B}_{n,k}=\bigcup_{\alpha\in A_n}\mathscr{B}_{\alpha,n,k}.$$

则$\mathscr{B}_{n,k}$是闭包保持的(参见定理7.4.31的证明).从而

$$\mathscr{B}\cup\bigcup_{n,k\in N}\mathscr{B}_{n,k}$$

是空间Y的σ闭包保持基,Y是M_1空间.证完.

定理7.4.38(夏省祥[1988]) 下列论断等价:

(i)M_1空间的每一闭集具有闭包保持开邻域基,

(ii)M_1空间的每一闭集具有σ闭包保持开邻域基,

(iii)M_1空间的拟开、闭象是M_1空间.

证明 .(i)⇒(ii),显然.证(ii)⇒(i).由命题7.4.36,对M_1空间的每一闭集A,X/A是M_1空间.由定理7.4.33,M_1空间的每一点具有闭包保持开邻域基.由定理7.4.34得证.

(i)⇒(iii).设$f:X\to Y$是M_1空间X到Y上的拟开、闭映射.由(i),对每$y\in Y$,$f^{-1}(y)$在X中具有闭包保持开邻域基$\mathscr{P}$.由引理7.4.21,$\mathscr{B}=f(\mathscr{P})^\circ$是点$y$在$Y$中的闭包保持开邻域基.由定理7.4.37,$Y$是$M_1$空间.

(iii)⇒(ii).设X是M_1空间.A是X的任一闭集.要证A具有σ闭包保持开邻域基.设$f:X\to X/\mathrm{Fr}A$是商映射.因$\mathrm{Fr}A$(A的边缘)是闭集,f是闭映射.由于$(\mathrm{Fr}A)^\circ=\varnothing$,对任意非空开集$U$,$U\not\subset\mathrm{Fr}A$.取$x\in U-\mathrm{Fr}A$.则$f^{-1}(f(x))=\{x\}\subset U$.所以$f$是不可约的,从而是拟开的.由(iii),$X/\mathrm{Fr}A$是$M_1$空间.由命题7.4.36,$\mathrm{Fr}A$具有$\sigma$闭包保持开邻域基$\mathscr{B}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}_n$.由于$A$是闭集,$A=\mathrm{Fr}A\cup A^\circ$.置$\mathscr{B}'_n=\{A^\circ\cup B:B\in\mathscr{B}_n\}$.容易验证$\mathscr{B}'=\bigcup_{n\in N}\mathscr{B}'_n$是闭集$A$的$\sigma$闭包保持开邻域基.证完.

注记 由上述定理7.4.38可看到:如果去掉定理7.4.22中

的条件"可数双商",则拟开、闭映射的能否保持 M_1 空间取决于 M_1 空间是否属于类 $\mathscr{P}$. 后者尚未解决.

下面是 Itō 另一重要结果(定理 7.4.43).

引理 7.4.39 设 U 是空间 X 的既开且闭集. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 中的闭包保持集族,则 $\mathscr{B}|U=\{B\cap U:B\in\mathscr{B}\}$ 是闭包保持的.

证明 取 $\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$. 设 $x\notin\bigcup\{\overline{B\cap U}:B\in\mathscr{B}'\}$. 由于 U 是闭集, $\overline{\bigcup\{B\cap U:B\in\mathscr{B}'\}}=\overline{U\cap(\bigcup\{B:B\in\mathscr{B}'\})}\subset\bar{U}=U$, 当 $x\notin U$ 时, $x\notin\overline{\bigcup\{B\cap U:B\in\mathscr{B}'\}}$. 当 $x\in U$ 时,由于 U 是开集,对每一 $B\in\mathscr{B}'$,易知如 $x\in\bar{B}$,则 $x\in\overline{B\cap U}$,所以 $x\notin\overline{B\cap U}\Rightarrow x\notin\bar{B}$. 由于 $\mathscr{B}$ 是闭包保持的, $x\notin\overline{\bigcup\{B:B\in\mathscr{B}'\}}\supset\overline{\bigcup\{B\cap U:B\in\mathscr{B}'\}}$ 证完.

引理 7.4.40 设 $\mathscr{U}=\bigcup\{\mathscr{U}_n:n\in N\}$ 是空间 X 的闭集 F 的 σ 闭包保持邻域基. 设 $\{G_n:n\in N\}$ 是 X 中的既开且闭集组成的递减序列满足 $F=\bigcap\{G_n:n\in N\}$,则 $\bigcup\{\mathscr{U}_n|G_n:n\in N\}$ 是 F 的闭包保持邻域基.

证明 由引理 7.4.39,每一 $\mathscr{U}_n|G_n(n\in N)$ 是闭包保持开集族. 记 $\mathscr{U}_n|G_n$ 中的元为 U_α. 记 $\mathscr{D}=\{U_\alpha:\alpha\in D\}=\bigcup\{\mathscr{U}_n|G_n:n\in N\}$. 下证 $\mathscr{D}$ 是闭包保持的.

取 $\mathscr{D}'\subset\mathscr{D}$. 记 $\mathscr{D}'=\{U_\alpha:\alpha\in D'\}$, $D'\subset D$. 设 $x\notin\bigcup\{\bar{U}_\alpha:\alpha\in D'\}$,则 $x\notin F$. 存在 $n\in N$,当 $m>n$, $x\notin G_m=\bar{G}_m$. 设

$$\begin{aligned}\mathscr{D}'_1&=\{U_\alpha:\alpha\in D'_1\subset D'\}\\&=\{U_\alpha:\alpha\in D' \text{ 且 } U_\alpha\in U\{\mathscr{U}_m\mid G_m:m>n\}\}.\end{aligned}$$

则 $G_m\supset\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in D'_1\}$. 因此 $x\notin\overline{\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in D'_1\}}$. 而 $\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in D'-D'_1\}\subset\bigcup\{\mathscr{U}_i|G_i:i\leqslant n\}$. $\bigcup\{\mathscr{U}_i|G_i:i\leqslant n\}$ 是闭包保持的, $x\notin\bar{U}_\alpha(\alpha\in D'-D'_1)\Rightarrow x\notin\overline{\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in D'-D'_1\}}$, 故 $x\notin\overline{\bigcup\{U_\alpha:\alpha\in D'\}}$, $\mathscr{D}$ 是闭包保持的. 证完.

引理 7.4.41 设 S 是空间 X 的正则闭集, T 是子空间 S 的正则闭集,则 T 是空间 X 的正则闭集. 从而每一由 S 中正则闭集组成的在 S 中闭包保持的集族也是由 X 中正则闭集组成的在 X

中闭包保持的集族.

证明留给读者.

定理 7.4.42 (Itō[1984]) 设 X 是 M_1 空间,且 X 的每一正则闭集是 M_1 的,则 X 的每一闭集具有闭包保持开邻域基.从而遗传 M_1 空间类 $\subset \mathscr{P}$ 类.

证明 由前面定理 7.4.34,只要证明 X 的每一点具有闭包保持邻域基.下面构造 X 的两个正则闭集 H_1 及 H_2 使满足:

(i) $x \in X = H_1 \cup H_2$,

(ii) 对每一 $i=1,2$,如 $x \in H_i$,则存在子空间 H_i 的既开且闭集形成的序列 $\{H_{i,n}: n \in N\}$ 使 $\{x\} = \bigcap \{H_{i,n}: n \in N\}$.

利用空间 X 的完备正规性,可以取 X 的正则开集的序列 $\{G_n: n \in N\}$ 使

$$X = G_1 \supset \bar{G}_2 \supset G_2 \supset \bar{G}_3 \supset \cdots, x = \bigcap \{G_n: n \in N\}.$$

置

$$H_1 = \overline{\bigcup \{(G_{2n-1} - G_{2n}): n \in N\}},$$

$$H_2 = \overline{\bigcup \{(G_{2n} - G_{2n+1}): n \in N\}}.$$

由于 $G_k (k \in N)$ 是正则开集,可以证明,对每一 k,$\overline{G_k - G_{k+1}} = \overline{G_k - \overline{G_{k+1}}}$,且容易证明:

$$H_1 = \overline{\bigcup \{(G_{2n-1} - \overline{G_{2n}}): n \in N\}},$$

$$H_2 = \overline{\bigcup \{(G_{2n} - \overline{G_{2n+1}}): n \in N\}}.$$

所以 H_1, H_2 是正则闭集,满足(i).置

$$H_{1,n} = H_1 \cap \overline{G_{2n-1}} = H_1 \cap G_{2n-2},$$

$$H_{2,n} = H_2 \cap \overline{G_{2n}} = H_2 \cap G_{2n-1}.$$

$H_{1,n}, H_{2,n}$ 分别关于子空间 H_1, H_2 是既开且闭的.显然满足:如 $x \in H_i$ 则 $\{x\} = \bigcap \{H_{i,n}: n \in N\}$,所以 H_1, H_2 满足(ii).

由假设,正则闭子空间 H_1, H_2 是 M_1 空间,对 X 的每一点 $x \in H_i$,存在关于子空间 H_i 的 σ 闭包保持邻域拟基 $\mathscr{U}_i = \bigcup \{\mathscr{U}_{i,n}: n \in N\}$,$\mathscr{U}_i$ 中的每一元是 H_i 中的正则闭集.序列 $\{H_{i,n}: n \in N\}$ 满足(ii),故由引理 7.4.40 知 $\bigcup \{\mathscr{U}_{i,n} | H_{i,n}: n \in N\}$ 是子空间 H_i 的

闭包保持邻域拟基，记作 $\mathscr{C}_i$. $\mathscr{C}_i$ 中的每一元是 H_i 中的正则闭集（因正则闭集与既开且闭集的交是正则闭集，见习题 7.23）. 由引理 7.4.41，$\mathscr{C}_i$ 是由 X 中的正则闭集组成的 X 中的闭包保持集族. 定义当 $x \notin H_i$ 时 $\mathscr{C}_i=\varnothing$，置 $\mathscr{C}=\{C_1 \cup C_2: C_i \in \mathscr{C}_i, i=1,2\}$.

由(i)知 $\mathscr{C}$ 中的每一元是 x 在 X 中的邻域，仍是 X 中的正则闭集（二个正则闭集的并是正则闭集，见习题 7.23）. $\mathscr{C}$ 仍是 X 中的闭包保持集族，所以 $\mathscr{C}$ 是由 X 中正则闭集组成的点 x 的闭包保持邻域拟基. 从而 $\mathscr{C}^\circ=\{C^\circ: C \in \mathscr{C}\}$ 是点 x 的闭包保持邻域基. 证完.

Itō[1984]为了证明该文的主要结果（定理 7.4.43），需要引入下述 Gruenhage 的结果：

定理（Gruenhage[1980]） 设 M_1 空间 X 具有下列性质：

(*)对空间 X 的任意两个闭集 H, K，设 $H \subset K$，则 H 在子空间 K 中具有 σ 闭包保持开邻域基.

则 X 的闭象是 M_1 空间.

这定理的证明复杂冗长，这里只能略去，有兴趣的读者可参阅所引 Gruenhage 的论文.

易知具有性质(*)的 M_1 空间的任何闭集是 M_1 空间，因此 Gruenhage 提出问题："是否具有闭遗传性的 M_1 空间的闭象是 M_1 空间？"由定理 7.4.20，下面的定理（7.4.43）正面回答了 Gruenhage 问题.

定理 7.4.43（Itō[1984]）遗传 M_1 空间的闭象是遗传 M_1 空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是遗传 M_1 空间 X 到空间 Y 上的闭映射. 设 H, K 是 X 的两个闭集，且 $H \subset K$. 子空间 K 是遗传性 M_1 的，H 是 K 中的闭集，由定理 7.4.42，H 在 K 中具有闭包保持开邻域基，所以 X 满足 Gruenhage 定理的条件(*)，故由这定理知 Y 是 M_1 空间. 从而易证 Y 是遗传性 M_1 空间. 证完.

推论 7.4.44 Nagata 空间的闭象是遗传 M_1 空间.

证明 由推论 7.4.35、定理 7.4.15 及第一可数性是遗传的，

所以 Nagata 空间是遗传 M_1 空间,由定理 7.4.43 得证.证完.

推论 7.4.45 (Slaughter[1973]) 度量空间的闭象(即 Lašnev 空间)是遗传 M_1 空间.

下面概略地叙述 $M_3 \Rightarrow M_1$ 问题以结束 M_i 空间.

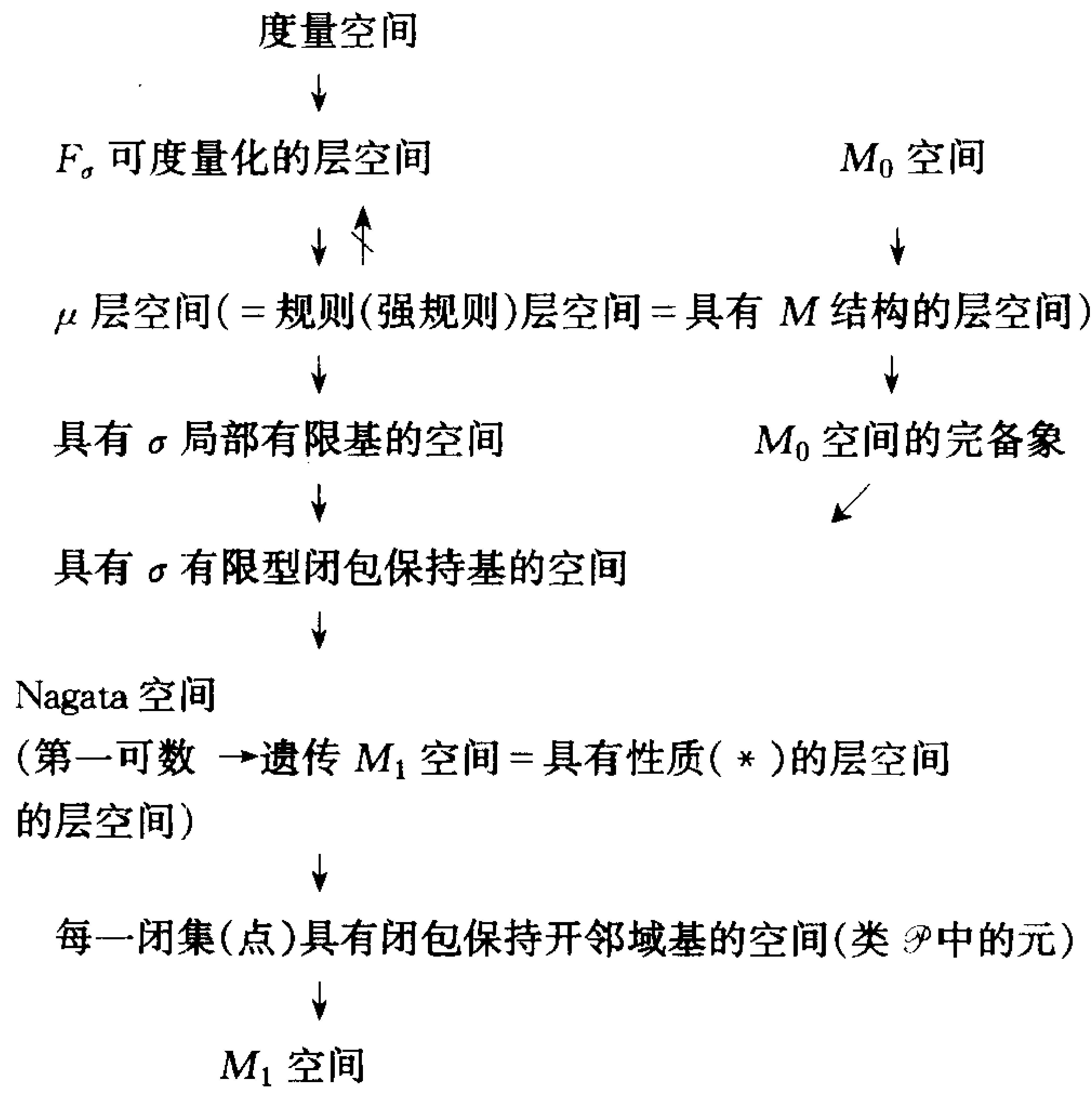
Heath-Junnila[1981]曾引入 **M_0 空间**(具有 σ 闭包保持既开且闭基的空间),显然 M_0 空间是 M_1 空间.Gruenhage[1980]引入性质(*)及 **F_σ 可度量化空间**(可表示为可数个可度量化闭子空间的并的空间)并证明 F_σ 可度量化的层空间及其闭象均具有性质(*),从而是 M_1 的.此后,许多日本学者引入一些空间类:Mizokami[1982]的 **μ 层空间**类,Tainano[1983]的**规则**(regularly)层空间,**强规则**(strongly regularly)**层空间**及 Mizokami[1984]的具有 **M 结构的层空间**类.Junnila-Mizokami[1985]证明上述四类空间是重合的.下面只介绍其中定义较简的 **μ 空间**.空间 X 称为 μ 空间如果它可以嵌入到仿紧 F_σ 可度量化空间的可数积中,显然 μ 空间是 F_σ 可度量化的层空间的推广.Mizokami[1984]证明 μ 层空间是 M_1 空间,且是 M_0 空间的完备象,而 M_0 空间等价于零维的 μ 层空间.存在着度量空间的闭象(称为 Lašnev 空间)不是 F_σ 可度量化的(见 Fitzpatrik[1971]的例 2),故 F_σ 可度量化不能为闭映射所保持.而 Junnila-Mizokami[1985]证明了 F_σ 可度量化的层空间的闭象是 μ 层空间,所以存在着 μ 层空间而不是 F_σ 可度量化的.

Itō-Tamano[1983]引入几乎局部有限集族概念.空间 X 的集族 $\mathscr{A}$ 称为关于点 $x \in X$ 是**几乎局部有限的**(almost locally finite),如果存在点 x 的邻域 U 及有限集族 $\mathscr{B}$ 使 $\mathscr{A}|U = \{A \cap U : A \in \mathscr{A}\} \subset \{B \cap V : B \in \mathscr{B}, V$ 是 x 的邻域$\}$.$\mathscr{A}$ 称为在 X 中是几乎局部有限的,如果对 X 的每一点,$\mathscr{A}$ 是几乎局部有限的.他们研究了具有 σ 几乎局部有限基的空间,证明了这类空间是 M_1 的,而包含着 μ 层空间类.

Ohta[1989]引入有限型闭包保持概念,空间 X 的集族 $\mathscr{A}$ 称为关于点 $x \in X$ 是**有限型闭包保持的**(finitely closure-preserving),如

果对每一 $\mathscr{A}'\subset\mathscr{A}$,存在 x 的开邻域 U 及 $\mathscr{A}'$ 的有限子族 $\mathscr{B}$,使 $(\mathscr{A}')^*\cap U\subset \mathrm{C}|_X\mathscr{B}^*$,$\mathscr{A}$ 称为在 X 中是有限型闭包保持的,如果对 X 的每一点是有限型闭包保持的. Ohta 研究了具有 σ 有限型闭包保持基的空间,证明这类空间包含着具有 σ 几乎局部有限基的空间类及 M_0 空间的完备象,而包含在遗传性 M_1 空间类内.

上述空间类间的关系如下图所示:



上述空间类关于子空间、闭象或完备象及可数积的保持情况见下表.

度量空间	子空间保持	闭象不保持,完备象保持	可数积保持
M_1 空间	闭子空间?	闭象或完备象?	可数积保持
F_σ 可度量化的层空间	子空间保持	闭象不保持,完备象保持	有限积保持,可数积?

续表

M_0 空间的完备象	闭子空间保持	闭象？完备象保持	可数积保持
μ 层空间	子空间保持	闭象？完备象保持	可数积保持
具有 σ 局部有限基的空间	子空间保持	完备象？有限对-闭象保持	可数积保持
具有有限型闭包保持基的空间	子空间保持	闭象？完备象保持	可数积保持
遗传 M_1 空间	子空间保持	闭象保持	可数积？
$\mathscr{P}$类中元	闭子空间？	闭象或完备象？	可数积保持

（上图及上表参见高国士[1988]）

学者们似乎都有这样的想法：加强 M_3 空间使能蕴含 M_1 而具有比 M_1 较好的性质.所加强的内容逐步减弱（如上图所示）以"逼近"M_1，总希望 M_1 能满足相应的加强内容（例如 Mizokami 希望每一 M_1 空间具 M 结构.Itō 希望每一 M_1 空间具有 σ 几乎局部有限基）.这样 $M_3 \Rightarrow M_1$ 问题可解决了.但是从图上看，最接近 M_1 空间的是每一点具有闭包保持开邻域基的 M_3 空间（即类 $\mathscr{P}$ 中的元）.M_1 空间的每一点能具有闭包保持开邻域基否？这又回到 Ceder 当年（1961）提出的问题（参见定理 7.4.33）.而 $\mathscr{P}$类中的元在闭子空间、闭象的保持方面与 M_1 空间一样差（见上表）且有与推论 7.4.29 相同的结论（见习题 7.33）.所以这种逐步"逼近"的办法很难说有成功的可能.对于这方面的内容详见 Gruenhage [1980]，Tamano[1989]、高国士[1988].$M_3 \Rightarrow M_1$ 这一至今无法解决的问题很具魅力，著名拓扑学家 Mary Rudin[1990]对此也感兴趣，重又提出这问题.按她的猜测，答案可能是正面的.究竟如何，尚未可知.

§5. 半层、k 半层空间，单调正规空间，对称度量与半度量空间

正则 σ 空间的刻画有著名的 Siwiec-Nagata 定理(定理 7.3.7).证法很别致.由此容易得到关于 σ 空间为闭映射保持的结果(推论 7.3.8).那时尚未引入 g 函数,不能利用 g 函数得到正则 σ 空间的另一类型的刻画.在第七章§4 开始引入 g 函数,充分利用它刻画 M_2 空间与 M_3 空间,从而证明了 $M_3=M_2$ 这一重要结果,并指出用类似的证法可以得到(不必先在§3 叙述致重复)用 g 函数刻画正则 σ 空间(定理 7.4.9)的类似于 M_2 空间的刻画(定理 7.4.8):

正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $N\times X$ 上的 g 函数满足:

(i)如 $y\notin$ 闭集 H,则存在 $n\in N$,使 $y\notin\bigcup\{g(n,x):x\in H\}$ (或(i′)对 $x\in X$ 及序列 $\{x_n\}$,如 $x\in g(n,x_n)$,则 $x_n\to x$).

(ii)$y\in g(n,x)\Rightarrow g(n,y)\subset g(n,x)$.

比较 M_2 空间与正则 σ 空间的刻画(定理 7.4.8 与定理 7.4.9),由于已证 $M_3\Rightarrow M_2$,我们轻易得到 $M_3\Rightarrow\sigma$(定理 7.4.12).这一结果是 Heath-Hodel 用 g 函数精致地刻画正则 σ 空间(见注记 7.4.13 中述及的刻画(*))而得到的.刻画(*)的证明异常困难,需要较多篇幅,不论放在定理 7.3.7 一起或紧接定理 7.4.9 后叙述都难免冲淡该节主题,故在本节开端时叙述.接着用它证明较近代的结果(定理 7.5.11).

定理 7.5.1 (Heath-Hodel[1973]) 正则空间 X 是 σ 空间当且仅当存在 $N\times X$ 上的 g 函数满足:

(*)对于 X 中的点 x 及序列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,如果 $x\in g(n,x_n)$,且 $x_n\in g(n,y_n)$,则 $y_n\to x$.

证明 首先证明正则 σ 空间满足条件(*),这里利用定理 7.4.9 的条件(i),(ii),设 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$ 是正则空间 X 中的序列,而 $x\in g(n,x_n)$,$x_n\in g(n,y_n)$,用定理 7.4.9 的条件(ii)于 $x_n\in g$

(n,y_n)，得 $g(n,x_n)\subset g(n,y_n)$. 从而 $x\in g(n,y_n)$，由定理7.4.9的(i′)得 $y_n\to x$.

下面证明具有 g 函数满足(∗)的正则空间是 σ 空间. 这一证明异常困难，我们将利用条件(∗)构造 X 的 σ 离散网络，从而由定理7.3.7的(iii)得证.

注意到定理7.4.9中的(i′)可以作为(∗)的特例(在(∗)中取 y_n 为 x_n)，所以在下面构造中可以引用定理7.4.9的(i′)或(i).

设正则空间 X 具有 g 函数满足(∗)，把 X 良序化"<"，对每一 $x\in X$ 及 $i,n\in N$ 置

$$H(x,i,n)=X-[(\bigcup\{g(i,y):y<x\})\cup(\bigcup\{g(n,y):y\notin g(i,x)\})]. \qquad (1)$$

显然 $H(x,i,n)\subset g(i,x)$，置

$$\mathscr{H}(i,n)=\{H(x,i,n):x\in X\}.$$

下证 $\mathscr{H}(i,n)$ 是离散集族. 设 $z\in X$，y 是 X 中的最小元素之使 $z\in g(i,y)$ 者. 显然，当 $y<x$ 时，$g(i,y)\cap H(x,i,n)=\varnothing$(由(1)式右端减数的第一部分)，当 $x<y$ 时，由所取 y 的最小性，$z\notin g(i,x)$. 从而 $g(n,z)\cap H(x,i,n)=\varnothing$(由(1)式右端减数的第二部分). 所以 $g(i,y)\cap g(n,z)$ 是包含 z 的开集至多与 $\mathscr{H}(i,n)$ 中一个集 $H(y,i,n)$ 相交，所以 $\mathscr{H}(i,n)$ 是离散集族.

对 $m\in N$，置

$$F(x,i,n,m)=\{y\in H(x,i,n):x\in g(m,y)\}, \qquad (2)$$

$$\mathscr{F}(i,n,m)=\{F(x,i,n,m):x\in X\}.$$

对每一 $m\in N$，$\mathscr{F}(i,n,m)$ 中的元(由(2)式)分别是 $\mathscr{H}(i,n)$ 中的元 $H(x,i,n)$ 的子集，故由于 $\mathscr{H}(i,n)$ 是离散集族，知 $\mathscr{F}(i,n,m)$ 是离散集族.

下面证明 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}(i,n,m):i,n,m\in N\}$ 是空间 X 的网络. 设 $p\in U$，U 是开集. 对每一 $i\in N$，x_i 是 X 中的最小元素使 $p\in g(i,x_i)$ 者，$p\notin$ 闭集 $X-g(i,x_i)$. 由定理7.4.9的(i)(见上述注意)，存在 $n(i)\in N$ 使 $p\notin\bigcup\{g(n_i,y):y\notin g(i,x_i)\}$，由 x_i 的最小性及(1)式，知 $p\in H(x_i,i,n(i))\subset g(i,x_i)$. 此外，由于对

每一 $i\in N$,有 $p\in g(i,x_i)$,由定理 7.4.9 的(i′)(见上述注意)知 $x_i\to p$.从而对 p 的每一开邻域 $g(m,p)$,存在 $i(m)\geqslant m$ 使 $x_{i(m)}\in g(m,p)$.由(2)式及已知 $p\in H(x_i,i,n(i))$ 对每一 $i\in N$ 成立.故有

$$p\in F(x_{i(m)},i(m),n(i(m)),m).$$

记上式右端为 F_m.

下面证明存在某些 m 使 $F_m\subset U$.如不然,选取 $y_m\in F_m-U$,按 $p\in g(i(m),x_{i(m)})$,$i(m)\geqslant m$,故 $p\in g(m,x_{i(m)})$.而 $y_m\in F_m$,由(2)式,$x_{i(m)}\in g(m,y_m)$.故由(*)得 $y_m\to p$.这与 $p\in U$,$y_m\notin U$ 矛盾.所以到此证明了 $\mathscr{F}$ 是 X 的 σ 离散网络.由定理 7.3.7 的(iii)知 X 是 σ 空间.证完.

上述条件(*)构造 σ 离散网络的过程构思神妙,天衣无缝.利用(*)不仅可以证明层空间⇒σ 空间,还可证明弱于层空间的正则 k 半层空间(定义 7.5.8)⇒σ 空间(定理 7.5.12).

在前一节(§4)里曾引入半层空间(引理 7.4.4 后).限于这节的主题(M_i 空间),未能涉及半层空间的性质.下面补充阐述.为便利起见,把半层对应记为 $U\to\{U_n\}$,这里 U 是开集,U_n 是闭集,满足 $U=\bigcup_n U_n$.对开集 $V\subset U$ 有 $V_n\subset U_n$(V_n 是闭集),且可设 $n<m$ 时,$U_n\subset U_m$.

以下定理 7.5.2 到 7.5.7 均属于 Greede[1970].

定理 7.5.2 半层空间是遗传的,且是可数可积的.

证明 关于遗传性是显然的(参见定理 7.4.15).关于可数积保持,可利用半层空间的 g 函数刻画(定理 7.4.7),设 $X_i(i\in N)$ 是半层空间.记 X_i 上的 g 函数为 g_i,满足定理 7.4.7 的条件,设 $x=(x_n)\in\prod_{n\in N}X_n$.置 $g(n,x)=\prod_{i\leqslant n}g_i(n,x_i)\times\prod_{i>n}X_n$,则 g 是 $\prod_{n\in N}X_n$ 上的 g 函数满足定理 7.4.7 的条件.证完.

定理 7.5.3 半层空间为连续闭映射所保持.

证明 设 $f:X\to Y$ 是半层空间 X 到空间 Y 上的连续闭映射,设 G 开于 Y,$f^{-1}(G)$ 开于 X,X 是半层空间,有半层对应

$f^{-1}(G)\to\{f^{-1}(G)_n\}$.则 $G\to\{f(f^{-1}(G))_n\}$是空间 Y 上的半层对应,Y 是半层空间.证完.

推论 7.5.4 半层空间满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 由一般性定理 5.5.6 得证.证完.

引理 7.5.5 设 Y 是半层空间 X 的闭子空间,Y 上的半层对应为 $U\to\{U_n\}$,则存在 X 上的半层对应 $V\to\{V_n\}$使$(V\cap Y)_n=V_n\cap Y$.

证明 设 $W\to\{W_n\}$是 X 上的任一半层对应,置

$$V_n=(V\cap Y)_n\cup(V-Y)_n,\tag{1}$$

这里 V 是X 中开集,$(V\cap Y)_n$ 是开于Y 的集在子空间Y 上的半层对应(按 $U\to\{U_n\}$),$(V-Y)_n$ 是X 中开集$(V-Y)$(因 Y 闭)在 X 中的半层对应(按 $W\to\{W_n\}$),则 $V\to\{V_n\}$是 X 上的半层对应.(1)式两端分别与 Y 相交,得 $V_n\cap Y=(V\cap Y)_n$.证完.

定理 7.5.6 两个半层的闭子空间的并是半层空间.

证明 设 $X=Y_1\cup Y_2$,Y_1,Y_2 闭于 X,且都是半层空间.记 $Y_1\cap Y_2=A$,A 是 Y_1(或 Y_2)的闭子空间,是半层的.分别用引理 7.5.4 于 Y_1,Y_2 的闭子空间 A 有:(记 A 上半层对应的足标为 N)

存在 Y_1 上的半层对应(记其足标为 n_1)使

$$V_{n_1}\cap A=(V\cap A)_N\tag{2}$$

存在 Y_2 上的半层对应(记其足标为 n_2)

$$\text{使 } V_{n_2}\cap A=(V\cap A)_N.\tag{3}$$

V 是X 中开集.由(2),(3),$V_{n_1}\cap A=V_{n_2}\cap A$.这说明在 Y_1,Y_2 的相交部分 A 上取 Y_1 上的半层对应与取 Y_2 上的半层对应是一致的.所以对 X 中的开集 V,$V=(V\cap Y_1)\cup(V\cap Y_2)$,置

$$V_n=(V\cap Y_1)_{n_1}\cup(V\cap Y_2)_{n_2}.$$

则 $V\to\{V_n\}$是 X 上的半层对应,X 是半层空间.证完.

定理 7.5.7 半层空间是次仿紧空间.

证明 设 $\mathscr{U}$是半层空间 X 的开覆盖,设 X 上的半层对应为

$U \to \{U_n\}$. 把集族 $\mathscr{U}$ 按序"<"良序化,设 $\mathscr{U} = \{O_\alpha : \alpha \in I\}$,$I$ 是良序集,置

$$F_{1,n} = (O_1)_n,$$
$$F_{\alpha,n} = (O_\alpha)_n - \bigcup \{O_\beta : \beta \in I, \beta < \alpha\}, \alpha > 1,$$
$$\mathscr{F}_n = \{F_{\alpha,n} : \alpha \in I\}, \mathscr{F} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{F}_n.$$

下证 $\mathscr{F}$ 是覆盖,对 $x \in X$,设 $\mathscr{U}$ 中元之包含 x 的最小者为 O_α,存在 $n \in N$ 使 $x \in$ 某$(O_\alpha)_n$,由最小性,$x \in F_{\alpha,n}$.

下证每一 $\mathscr{F}_n$ 是离散闭集族. 每一 $F_{\alpha,n}$ 是闭集,对 $x \in X$,仍取 $\mathscr{U}$ 中元之包含 x 的最小者 O_α,对 $\beta > \alpha$ 的 $F_{\beta,n}$,O_α 已被减去,故 $O_\alpha \cap F_{\beta,n} = \varnothing$. 对 $\beta < \alpha$ 的 O_β,由最小性,$x \notin O_\beta$,$O_\beta \subset X - \{x\}$,$(O_\beta)_n \subset (X - \{x\})_n$

$$X - (X - \{x\})_n \cap (O_\beta)_n = \varnothing, \beta < \alpha.$$

$X - (X - \{x\})_n$ 是包含 x 的开集,故 x 的开邻域 $O_\alpha \cap (X - (X - \{x\})_n)$ 至多与 $\mathscr{F}_n$ 中一个元 $F_{\alpha,n}$ 相交.

综上,$\mathscr{F}$ 是 σ 离散闭覆盖,显然加细 $\mathscr{U}$,由定义 6.1.1,半层空间 X 是次仿紧的. 证完.

由半层空间的定义,知它是完备的(每一闭集是 G_δ 集),由定理 7.5.2,二个半层空间的积是半层空间,从而也是完备的. 当 T_2 完备空间 X 的平方 X^2 是完备时(一般说未必成立),易知 X 具有 G_δ 对角线,所以 T_2 半层空间具有 G_δ 对角线,又由定理 7.5.7,半层空间是次仿紧的. 故知正则半层空间具有 G_δ^* 对角线(定义 7.3.17,引理 7.2.16).

定义 7.5.8 (Lutzer[1971]) T_1 空间 X 称为 k **半层**(k-semistratifiable)**空间**,如果存在半层对应 $U \to \{U_n\}$,且对紧集 $k \subset$ 开集 U,存在 $n \in N$,使 $k \subset U_n$. 上述对应称为 k **半层对应**(k-semistratification).

显然,k 半层空间是半层空间,且易知层空间是 k 半层空间.

下面证明第一可数的 k 半层空间是层空间. 易证下述引理.

引理 7.5.9 (Lutzer[1971]) 设空间 X 具有半层对应且有如

$x\in V$，V 是 X 中开集．则存在 $n\in N$ 使 $x\in V^{\circ}_{n}$，则 X 是层空间．

读者自证(习题 7.34)．

定理 7.5.10 (Lutzer[1971]) 第一可数的 k 半层空间是层空间，从而是 M_1 空间．

证明 设 $U\to\{U_n\}$ 是空间 X 的 k 半层对应，设 $x\in V$，V 是空间 X 的开集，设 $\{W_n(x)\}$ 是点 x 的可数开邻域基，使 $V\supset W_1(x)\supset W_2(x)\supset\cdots$．如对每一 $n\in N$，$W_n(x)\not\subset V_n$，选取 $y_n\in W_n(x)-V_n$，序列 $\{y_n\}$ 收敛于 x．从而 $K=\{x\}\cup\{y_n:n\in N\}$ 是紧集，$K\subset V$．因 X 是 k 半层的，存在 $m\in N$ 使 $K\subset V_m$．从而 $y_m\in V_m$，这与 y_m 的取法矛盾．所以存在某 $W_n(x)\subset V_n$，显然 $x\in V^0_n$．由引理 7.5.9，知 X 是层空间，由推论 7.4.35，V 是 M_1 空间．证完．

定理 7.5.11(高智民[1986]，林寿[1988a]) 正则空间 X 是 k 半层空间，当且仅当存在 $N\times X$ 上的 g 函数 $g(n,x)$ 满足对 $x\in X$ 及 X 中的序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，如 $x_n\in g(n,y_n)$，且 $x_n\to x$，则 $y_n\to x$．

证明 设 $U\to\{U_n\}$ 是 X 上的 k 半层对应，定义 $N\times X$ 上的 g 函数 $g(n,x)=X-(X-\{x\})_n$．设 $x\in X$ 及 X 中序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，如 $x_n\in g(n,y_n)$．且 $x_n\to x$，要证 $y_n\to x$．

设 U 是 X 中任一开集，$x\in U$，因 $x_n\to x$，不失一般性，可作为紧集 $(\{x\}\cup\{x_n:n\in N\})\subset U$，由 k 半层对应，存在 $m\in N$ 使

$$(\{x\}\cup\{x_n:n\in N\})\subset U_m.$$

由于 $x_n\in g(n,y_n)=X-(X-\{y_n\})_n$，当 $n\geqslant m$ 时，有

$$x_n\in U_n\cap(X-(X-\{y_n\})_n)=U_n-(X-\{y_n\})_n. \tag{1}$$

下证 $y_n\in U$，从而 $y_n\to x$．如不然，$y_n\notin U$，则 $U\subset X-\{y_n\}$，$U_n\subset(X-\{y_n\})_n$，与(1)式矛盾．

反之，设 $g(n,x)$ 是 X 上的 g 函数满足定理的条件，对 X 中开集 U，$n\in N$，置

$$U_n=X-\bigcup\{g(n,x):x\in X-U\}. \tag{2}$$

为了证明 $U \to \{U_n\}$ 是 k 半层对应，只要证明对紧集 $K \subset U$，存在 $n \in N$ 使 $K \subset U_n$.

如不然，对每一 $n \in N$，$K \not\subset U_n$，则存在 K 的子集 $\{x_n : n \in N\}$ 使(由(2)式)

$$x_n \in K - U_n = K \cap (\bigcup \{g(n,x) : x \in X - U\}).$$

由 $x_n \in \bigcup\{g(n,x) : x \in X - U\}$，知 $x_n \in$ 某 $g(n,y_n)$，$y_n \in X - U$. 所以存在两个序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，满足 $\{x_n\} \subset K$，$\{y_n\} \subset X - U$ 及 $x_n \in g(n,y_n)$. 因半层空间是遗传的，任何子空间具有 G_δ 对角线，由 Sneider 定理(定理 7.1.4)知 K 是紧度量子空间，从而是序列式紧空间(定理 3.5.9)，$\{x_n\}$ 具有收敛子序列. 不失一般性，作为 $x_n \to x_0 \in K \subset U$，从而由定理的假设，$y_n \to x_0$. 这与 $\{y_n\} \subset X - U$ 矛盾. 证完.

定理 7.5.12 (高智民[1986]，林寿[1988a]) k 半层空间是 σ 空间.

证明 设 X 是 k 半层空间，设 X 上的 g 函数满足 $x \in g(n, x_n)$，$x_n \in g(n,y_n)$，要证 $y_n \to x$.

因 X 是半层空间，由 $x \in g(n,x_n)$ 可得 $x_n \to x$，由定理 7.5.11 得 $y_n \to x$. 由 Heath-Hodel 定理(定理 7.5.1)得 X 是 σ 空间. 证完.

综上，有如下蕴含关系：

层空间⇒正则 k 半层空间⇒σ 空间⇒半层空间

上述蕴含关系均不可逆，存在完全正则 s/s 空间(从而 k 半层(推论 8.2.4))，而非正规空间(O'Meara[1966]). 存在仿紧 cosmic 空间(定义 8.1.10，从而是 σ 空间)，半可度量化(即第一可数、半层(定理 7.5.22)而非层空间(Heath[1966])，由定理 7.5.10，知也非 k 半层空间. 存在半可度量化(从而半层)而非 σ 空间(Gruenhage[1984p. 485，例 9.10]).

k 半层空间和层空间，半层空间一样都是遗传的，可数可积的，下面是映射性质.

定理 7.5.13 (高国士[1986]) 正规 k 半层空间为连续闭映

射保持.

证明 设 X 是正规 k 半层空间, $f: X \to Y$ 是 X 到 Y 上的连续闭映射, k 半层空间是次仿紧的(定理 7.5.7),从而是 iso 紧的(定义 6.6.1、定理 6.6.3).由定理 6.6.13 知 f 是紧覆盖的(定义 5.5.12),设 X 上的 k 半层对应为 $U \to \{U_n\}$,设 V 开于 Y, $f^{-1}(V)$ 开于 X,则 $V \to \{f(f^{-1}(V)_n)\}$ 是 Y 上的半层对应(见定理 7.5.3).对 Y 中的紧集 K,因 f 是紧覆盖映射,存在 X 中紧集 C,使 $f(C)=K$,设 $K \subset V$,则 $C \subset f^{-1}(V)$,因 X 是 k 半层的,存在 $n \in N$,使 $C \subset f^{-1}(V)_n$,从而 $K \subset f(f^{-1}(V)_n)$.所以 $V \to \{f(f^{-1}(V)_n)\}$ 是 Y 上的 k 半层对应.证完.

下面引进一种很强的正规性——单调正规性(定义 7.5.14).主要用以(连同半层空间)刻画层空间(定理 7.5.15).容易证明闭映射保持单调正规性(定理 7.5.16),从而得到闭映射保持层空间,比 Borges 的直接证明(定理 7.4.17)简单得多.

以前接触到的最强的正规性是集态正规性,由定理 7.5.17 看到单调正规性更强于集态正规性.

以下定理均由 Heath-Lutzer-Zener[1973]得到.关于单调正规性的其他性质参见上引论文.

定义 7.5.14 空间 X 称为**单调正规**(monotonically normal)**空间**,如果对 X 的每一对不相交闭子集 H, K,可使对应着开集 $D(H,K)$ 使满足:

(i) $H \subset D(H,K) \subset \overline{D(H,K)} \subset X-K$,

(ii) 如 $H \subset H'$, $K \supset K'$, H', K' 是不相交的闭集,则 $D(H,K) \subset D(H',K')$.

这对应的 D 称为 X 上的**单调正规算子**(monotone normal operator).通常可以假设 $D(H,K) \cap D(K,H)=\varnothing$,如不然的话,可用 $D'(H,K)=D(H,K) \cap (X-\overline{D(K,H)})$ 代 $D(H,K)$.

定理 7.5.15 空间 X 是层空间当且仅当 X 是半层空间和单调正规空间.

证明 设 X 是层空间,取层对应 $H \to \{H_n\}$, H_n 是包含闭集

H 的开集,满足 $H=\bigcap_{n\in N}\bar{H}_n$, $K\subset K\Rightarrow H_n\subset K_n$,且 $H_n\supset H_{n+1}$, $n\in N$.设 H,K 是X 的不相交闭集,置

$$D(H,K)=\bigcup_{n\in N}\{(H_n-\bar{K}_n)\}.$$

显然开集 $D(H,K)\supset H$,对每一 $y\in K$, $y\notin H$,存在 $m\in N$,使 $y\notin\bar{H}_m$.所以$(X-\bar{H}_m)\cap K_m=K_m-\bar{H}_m$ 是 y 的开邻域与 $D(H,K)$不交.从而 $D(H,K)\subset X-K$. D 的单调性可由层对应的单调性得到.

设 X 是半层空间及单调正规空间,具有半层对应 $H\to\{H_n\}$, H_n 是包含闭集 H 的开集,及单调正规算子 D,置 $H'_n=D(H,X-H_n)$,显然 H'_n 是包含 H 的开集,要证 $H=\bigcap_{n\in N}\bar{H}'_n$.由单调正规性,

$$H\subset D(H,X-H_n)\subset\overline{D(H,X-H_n)}\subset H_n.$$

所以

$$H\subset\bigcap_{n\in N}\bar{H}'_n=\bigcap_{n\in N}\overline{D(X-H_n)}\subset\bigcap_{n\in N}H_n=H.$$

更由 D 的单调性,知 $H\to\{H'_n\}$是 X 的层对应.证完.

定理 7.5.16 单调正规空间为连续闭映射保持.

证明 设 H,K 是空间 Y 的不相交闭集, $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K)$ 是空间 X 的不相交闭集,由于 X 是单调正规空间,有 X 中开集 $D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))$满足

$$\begin{aligned}f^{-1}(H)&\subset D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))\\&\subset\overline{D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))}\\&\subset X-f^{-1}(K).\end{aligned}\tag{1}$$

取 U 为包含在$D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))$内的最大饱和集(关于 f),即

$$U=\{x\in X:f^{-1}(f(x))\subset D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))\}.\tag{2}$$

下证 $f(U)=D_Y(H,K)$是 Y 上的单调正规算子.

显然 $H\subset f(U)$,($f(U)$是开集参见定理 1.5.8).下证$\overline{f(U)}\subset Y-K$.由(1)

$$f(\overline{D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))})\subset f(X-f^{-1}(K))=Y-K.$$

$Y-f(\overline{D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))})\supset K$,所以对每一 $y\in K$, $Y-f(\overline{D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K))})$是 y 的开邻域与 $f(U)$不交(由(2), $f(U)\subset f(D_X(f^{-1}(H),f^{-1}(K)))$,从而$\overline{f(U)}\subset Y-K$.

容易证明 D_Y 满足定义 7.5.14 的(ii),所以 D_Y 是 Y 上的单调正规算子. 证完.

由定理 7.5.15,7.5.16 及定理 7.5.3 重又得到闭映射保持层空间(定理 7.4.17),这里看到通过单调正规空间以证明层空间为闭映射保持简捷得多.

定理 7.5.17 单调正规空间是集态正规的.

证明 设$\mathscr{H}$是单调正规空间 X 的离散闭集族,设 X 上的单调正规算子D 满足$D(H,K)\cap D(K,H)=\varnothing$,对每一 $H\in\mathscr{H}$,令 $H^*=\bigcup\{H'\in\mathscr{H}: H'\neq H\}$. 置 $U_H=D(H,H^*)$. 则 $H\subset U_H$,对 $H_0,H_1\in\mathscr{H}, H_0\neq H_1$, $U_{H_0}\cap U_{H_1}=D(H_0,H_0^*)\cap D(H_1,H_1^*)\subset D(H_0,H_1)\cap D(H_1,H_0)=\varnothing$. 证完.

推广度量空间也可以从减弱度量公理(定义 4.1.1)入手.

定义 7.5.18 设 X 是一集,如果对任意两点 $x,y\in X$ 可以定义一个非负值函数$d(x,y)$满足:

(i)$d(x,y)=0$ 当且仅当 $x=y$,

(ii)$d(x,y)=d(y,x)$.

则称 $d(x,y)$是 X 上的**对称度量**(或**对称距离** symmetric).

与度量公理比较,这里缺少三角形不等式,从而通常的 ε 球$B(x,\varepsilon)=\{y\in X: d(x,y)<\varepsilon\}$不能形成拓扑的基. 这是因为缺少了三角形不等式,我们不能象定理 4.1.4 一样证明:“对每一 $y\in B(x,\varepsilon)$,存在 $\delta>0$ 使 $B(y,\delta)\subset B(x,\varepsilon)$”,因此为了使带有对称度量的集 X 成为拓扑空间,增加如下定义 7.5.19 中的条件.

定义 7.5.19 空间 X 称为**可对称度量化的**(symmetrizable)如果 X 上存在对称度量d 满足条件:“$U\subset X$ 是开集当且仅当对每一$x\in U$,存在 $\varepsilon>0$ 使 $B(x,\varepsilon)\subset U$”.

由定义 7.5.19 结合这定义前的讨论,这里的 ε 球未必是开

集，从而不能把定义 7.5.19 中的条件换为"U 是开集当且仅当 U 是某些 ε 球的并".

定义 7.5.19 中的条件可以它的对偶形式表述："$H\subset X$ 是闭集当且仅当对每一 $x\in H, d(x,H)>0$".

定义 7.5.20 空间 X 称为**可半度量化的**(Semi-metrizable)，如果 X 上存在对称度量 d 满足定义 7.5.19 的条件及"对每一 $x\in X, \varepsilon>0$，有 $x\in B(x,\varepsilon)^{\circ}$."

由上述定义知：可半度量化空间是可对称度量化的. 所以"对 $x\in$ 开集 U，存在 $\varepsilon>0$，使 $x\in B(x,\varepsilon)^{\circ}\subset B(x,\varepsilon)\subset U$"(结合定义 7.5.19 的条件)，也可以说 $\{B(x,\varepsilon):\varepsilon>0\}$ 形成点 x 的邻域基(但这邻域基未必是开的). 如果把"ε"换为"$1/n$"，则 $\{B(x,1/n)\}_{n\in N}$ 形成点 x 的可数邻域基，从而可半度量化空间是第一可数的.

定理 7.5.21 下列论断等价：

(i) X 是可半度量化的，

(ii) X 是第一可数的可对称度量化空间，

(iii) X 是 Fréchet*) 的可对称度量化空间.

证明 由上述定义后的讨论，只要证明(iii)⇒(i). 设 X 是 Fréchet 的可对称度量化的空间，要证对 $x\in X, \varepsilon>0, x\in B(x,\varepsilon)^{\circ}$. 如不然，$x\notin B(x,\varepsilon)^{\circ}=\overline{X-B(x,\varepsilon)}$. 因 X 是 Fréchet 空间，存在 $X-B(x,\varepsilon)$ 中的点列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\to x$. 由于 $\{x_n:n\in N\}\subset X-B(x,\varepsilon)$，与 $x_n\to x$ 矛盾. 证完.

定理 7.5.22 T_1 空间 X 是可半度量化空间当且仅当 X 是第一可数的半层空间.

证明 必要性. 由定理 7.5.21 之(ii)，可半度量化空间 X 是第一可数的，下证 X 是半层空间.

对闭集 $H\subset X$，置 $G(H,n)=\{y:d(y,H)<1/2^n\}^{\circ}$，由于 $x\in B(x,\varepsilon)^{\circ}$(定义 7.5.20)，$H\subset G(H,n)$. 显然 $H=\bigcap_{n\in N}G(H,$

---

*)参见定理 2.3.2 的(i)

n)且 $H \subset K \Rightarrow G(H,n) \subset G(K,n)$，$H \to G(H,n)$是 X 上的半层对应.

充分性.设 X 是第一可数的半层空间,具有可数递减的开邻域基$\{b(n,x)\}$及存在 X 上的g 函数$g(n,x)$满足 $x \in g(n,y_n)$ 则 $y_n \to x$.置 $h(n,x) = b(n,x) \cap g(n,x)$,定义:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, \text{当且仅当 } x = y, \\ 1/2^n, \text{当 } x \neq y, \text{这里 } n \text{ 是使} x \notin h(n,y) \\ \qquad \text{及 } y \notin h(n,x) \text{都成立} \\ \qquad \text{的最小自然数} \end{cases}$$

也可记作 $d(x,y) = \sup\{1/2^n : x \notin h(n,y)\text{及 } y \notin h(n,x)\}$(这里 sup 是对 $1/2^n$ 说).显然 d 是X 上的对称度量.

注意 $y \in h(n,x) \Rightarrow d(x,y) < 1/2^n$,所以 $h(n,x) \subset B(x, 1/2^n)^\circ$,下证$\{B(x,1/2^n): n \in N\}$是点 x 的邻域基.如不然,存在包含点 x 的开集U 不能包含任一$B(x,1/2^n)$,即对任一 $n \in N$, $B(x,1/2^n) - U \neq \varnothing$,取 $y_n \in B(x,1/2^n) - U$.由于 $d(x,y_n) < 1/2^n$,无论 $y_n \in h(n,x) \subset b(n,x)$或 $x \in h(n,y_n) \subset g(n,x)$出现无限次,由前者 $y_n \in b(n,x)$,则因第一可数性,得 $y_n \to x$,或者由后者 $x \in g(n,y_n)$,则因半层性而得 $y_n \to x$,所以存在$\{y_n\}$的子序列收敛于 x.但这是矛盾的,因这些 y_n 都处于开集 U 之外,而 U 包含x.证完.

定理 7.5.23 T_1 可展空间是可半度量化的.

证明 设$\{\mathscr{U}_n\}$是可展空间 X 的开覆盖序列,不妨设 $\mathscr{U}_{n+1}$加细 $\mathscr{U}_n(n \in N)$,置

$$d(x,y) = \inf\{1/n : y \in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)\}$$

(这里"inf"是对 $1/n$ 说).显然 $d(x,y) = d(y,x)$,如果对任何 $n \in N$, $y \in \mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$,即 $y \in \bigcap_{n \in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$,因 X 是T_1 的,$\{x\} = \bigcap_{n \in N}\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n)$.从而 $y = x$, $\inf\{1/n\} = 0$.所以 $d(x,y) = 0$ 当且仅当 $x = y$, d 是X 上的对称度量,由于$\{\mathrm{st}(x,\mathscr{U}_n): n \in N\}$是 x 的邻域基,易证$\{B(x,\varepsilon):\varepsilon > 0\}$是点 x 的邻域基.证完.

§6. 具有点可数基的空间

推广度量空间也可以把 Nagata-Smirnov 度量化定理中的“σ 局部有限基”减弱为“σ 点有限基”、“σ 局部可数基”、“点可数基”，三者之中以“点可数基”在广义度量空间理论及度量化理论中最有用处.

关于具有点可数基的空间的度量化定理，最著名的是 Miščenko[1962]的“具有点可数基的 T_2 紧空间可度量化”. 这定理的证明依赖于更著名的 Miščenko 引理. 从而证明命题“T_1 紧的点可数基是可数的”. 然后由 Urysohn 度量化定理得 Miščenko 定理.

Miščenko 引理的原证思路晦涩难懂，通常不证而直接引用. 它的重要性远超过上述度量化定理. 因此我们还是把原证写出. 下文用到的是上述命题，这里用 M. E. Rudin 的思路与方法（比较自然简捷）绕过 Miščenko 引理直接证明上述命题（录自 Corson-Michael [1964]）.

引理 7.6.1(Miščenko[1962]) 设 κ 是无限基数，E 是一集，设 $\mathscr{A}$ 是 E 的子集所成的集族，使对每一 $p\in E$，$\operatorname{ord}(p,\mathscr{A})\leqslant\kappa$（表示 $\mathscr{A}$ 中元之包含点 p 者的势 $\leqslant\kappa$），则由 $\mathscr{A}$ 中元构成的 E 的有限最小覆盖至多 κ 个（最小覆盖是指不包含真子覆盖者）.

证明 记 $\mathscr{V}_n(n\in N)$ 为 $\mathscr{A}$ 中正好 n 个元构成的 E 的有限最小覆盖所成集族（所有由 $\mathscr{A}$ 中有限个元构成的最小覆盖当为 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{V}_n$）. 设引理不真，则存在 $\mathscr{V}_{n_0}$ 使 $\left|\mathscr{V}_{n_0}\right|>\kappa$，对 $k\leqslant n_0$ 及 $\mathscr{A}$ 中任意个（不同）元 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 置 $\mathscr{S}_{A_1A_2\cdots A_k}$ 为 $\mathscr{V}_{n_0}$ 中的覆盖之包含 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 者所成族，任取 $p\in E$，置 $\mathscr{A}_p=\{A:A\in\mathscr{A},p\in A\}$（由假设 $|\mathscr{A}_p|\leqslant\kappa$）. 则有

$$\mathscr{A}_{n_0}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}_p}\mathscr{S}_A.\tag{1}$$

如 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 $\mathscr{A}$ 中任意（不同）元之包含点 p 者，则有

$$\mathscr{S}_{A_1,A_2\cdots A_k}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}_p}\mathscr{S}_{A_1A_2\cdots A_kA}.\tag{2}$$

任取 $p_1 \in E$,由(1),存在 $A_1 \in \mathscr{A}_{p_1}$ 使 $\left|\mathscr{S}_{A_1}\right| > \kappa$(因 $\left|\mathscr{A}_{p_1}\right| \leqslant \kappa$). 类似地对 $k < n_0$,存在 $\mathscr{A}$ 中不同元 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 使 $\left|\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_k}\right| > \kappa$,因 $k < n_0$,存在点 $p_{k+1} \notin A_i (i = 1, \cdots, k)$,由(2)知存在 $A_{k+1} \in \mathscr{A}_{p_{k+1}}$ 使 $\left|\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_k A_{k+1}}\right| > \kappa$. 显然,$A_{k+1}$ 不同于 $A_1, \cdots, A_k$ 中任一元,所以对 $k \leqslant n_0$ 总可构造 $\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_k}$ 使 $\left|\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_k}\right| > \kappa$,特别

$$\left|\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_{n_0}}\right| > \kappa.$$

但是 $\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_{n_0}} \subset \mathscr{V}_{n_0}$,从而 $\mathscr{S}_{A_1 A_2 \cdots A_{n_0}}$ 只能是由单元素的一个覆盖($\{A_1, A_2, \cdots, A_{n_0}\}$)构成的族. 这是矛盾的. 证完.

引理 7.6.2 (Rudin) 可分空间的点可数基可数.

证明 设 X 具有点可数基 $\mathscr{A}$, C 是 X 的可数稠子集,则 $\mathscr{A}$ 中任一元(开集)必与 C 相交,由于 $\mathscr{A}$ 的点可数性及 C 是可数集知 $\mathscr{A}$ 是可数的. 证完.

引理 7.6.3 (Rudin) 具有点可数基的 T_1 可数紧空间是可分的.

证明 设 X 是 T_1 可数紧空间具有点可数基 $\mathscr{B}$, 下面构造可数集的序列 $\{C_n\}_{n \in N}$ 使 $C_n \subset C_{n+1}$ 且 $C = \bigcup_{n \in N} C_n$ 稠于 X.

任取 $x \in X$,令 $C_1 = \{x\}$,如可数集 C_n 已取得,置

$$\mathscr{B}_n = \{B : B \in \mathscr{B}, B \cap C_n \neq \varnothing\}.$$

对 $\mathscr{B}_n$ 的每一有限子族 $\mathscr{F}$ 之满足 $X - \bigcup \mathscr{F} \neq \varnothing$ 者,任取点 $x_{\mathscr{F}} \in X - \bigcup \mathscr{F}$. 令 C_{n+1} 为 C_n 与这些 $x_{\mathscr{F}}$ 所成集的并. 由于 C_n 可数,$\mathscr{B}_n$ 也可数(因 $\mathscr{B}$ 是点可数的),它的有限子族也仅可数个. 所以 C_{n+1} 是可数集,置 $C = \bigcup_{n \in N} C_n$,则 C 是可数集,下证 C 稠于 X(即 $\bar{C} = X$).

如不然,存在 $x_0 \in X - \bar{C}$,因 X 是 T_1 的,$X - \{x_0\}$ 是包含 $\bar{C}$ 的开集,而 $\mathscr{B}$ 是 X 的基,故可取 $\mathscr{U}$ 为 $\mathscr{B}$ 中元(开集)之与 $\bar{C}$ 相交而不包含 x_0 者所成集族. $\mathscr{U}$ 形成 $\bar{C}$ 的开覆盖,$\mathscr{U}$ 中元(开集)与 $\bar{C}$ 相交,也与 C 相交,C 是可数集,$\mathscr{U} \subset \mathscr{B}$ 是点可数的,故 $\mathscr{U}$ 可数. $\mathscr{U}$ 覆盖可数紧集 $\bar{C}$,故 $\mathscr{U}$ 具有有限子覆盖 $\mathscr{F}_0$. 由于 $\mathscr{U}$ 中元均与 C 相

交,从而分别与某些 C_n 相交. 因 $\mathscr{F}_0$ 包含 $\mathscr{U}$ 中有限个元,而 $C_n \subset C_{n+1}$,故存在 $n_0 \in N$ 使 $\mathscr{F}_0$ 中每一个元均与 C_{n_0} 相交,所以 $\mathscr{F}_0 \subset \mathscr{B}_{n_0}$. 但 $\mathscr{U}$ 中元都不包含 x_0,所以 $X - \bigcup \mathscr{F}_0 \neq \varnothing$. 这样,$C_{n_0+1}$ 应包含 $X - \bigcup \mathscr{F}_0$ 的一个点 $\mathscr{F}_0^x$,这与 $\mathscr{F}_0$ 覆盖 C_{n_0+1}($\mathscr{F}_0$ 覆盖 $\bar{C}$)矛盾,故 C 稠于 X,X 是可分空间. 证完.

结合引理 7.6.2 得如下命题.

命题 7.6.4(Miščenko[1962]) T_1 可数紧空间的点可数基是可数的.

和 Miščenko 原命题比较,这里把"紧"减弱为"可数紧".

定理 7.6.5 (Miščenko[1962]) 具有点可数基的 T_2 紧空间可度量化.

证明 用命题 7.6.4, T_2 紧空间是正规的,由 Urysohn 度量化定理(定理 4.3.2)得证. 证完.

从上面论证可以看到 Rudin 的思路是突出可分性.

定义 7.6.6 空间 X 到空间 Y 上的映射 $f: X \to Y$ 称为 s 映射(s-mapping),如果对每一 $y \in Y$, $f^{-1}(y)$ 是可分的.

定理 7.6.7 (Ponomarev[1960]) 开、s 映射保持具有点可数基的空间.

证明 设 $f: X \to Y$ 是由具有点可数基的空间 X 到空间 Y 上的开、s 映射,设 $\mathscr{B}$ 是 X 的点可数基,因 f 是开映射,$f(\mathscr{B})$ 是 Y 的基. 由于每一 $f^{-1}(y)$($y \in Y$)是可分的,$f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{B}$ 中可数个元相交,所以 $\{f(\mathscr{B})\}$ 是点可数的. 证完.

这里看到开、s 映射保持点可数基是最自然的.

度量空间具有点可数基,由定理 7.6.7,"度量空间在开、s 映射下的象具有点可数基". 下面的定理 7.6.8 是上述论断的逆.

定理 7.6.8(Ponomarev[1960]) 每一个具有点可数基的 T_1 空间是某一度量空间在连续开、s 映射下的象.

回忆前面的定理 4.5.15, Ponomarev 在证明"每一个满足第一可数公理的 T_1 空间是某一度量空间在连续开映射下的象"时构

造了一个广义贝勒零维空间 $N(A)$(是一度量空间),具有点可数基满足第一可数公理,可以借用那里的证法,读者可参考.

证明 设 $\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是 T_1 空间 X 的点可数基,利用指标集 A 构造广义贝勒零维空间$N(A)$,取 $N(A)$的子集

$$S=\{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots):\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots\}\text{ 形成点 } x\in X \text{ 的邻域基}\}.$$

定义映射 $f:S\to X$ 使 $f(\alpha)=x$,这里 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$,而$\{U_{\alpha_1},U_{\alpha_2},\cdots\}$形成点 x 的邻域基.在定理4.4.15中已证明 f 是连续开映射,这里只要证明 f 是s 映射,即证 $f^{-1}(x)$是可分的.

按 $N(A)$可记作 $N(A)=\prod_{n\in N}A_n$,每一 $A_n=A$,A 是指标集可赋以离散拓扑,所以 $N(A)$是离散空间的可数积,S 是$N(A)$的子集.这里 $\mathscr{U}$是点可数的,每一 $x\in X$ 属于 $\mathscr{U}$中可数个元,所以 $f^{-1}(x)$是可数离散空间的可数积的子空间,是可分的.证完.

Filipov[1969]证明:“双商、s 映射保持点可数基”改进定理7.6.7,原证较繁,Burke-Michael[1972]提供一引理使证明较易,这引理本身很有用,证明也不简单.

引理 7.6.9 (Burke-Michael[1972]) 空间 Y 具有点可数基当且仅当 Y 具有点可数覆盖 $\mathscr{P}$使对每一 $y\in Y$ 及包含点y 的开集V,存在 $\mathscr{P}$的有限子族 $\mathscr{P}'$使$y\in(\bigcup\mathscr{P}')^\circ$,且对每一 $P\in\mathscr{P}'$有$y\in P\subset V$.

证明 必要性显然.下证充分性.设空间 Y 具有点可数覆盖 $\mathscr{P}$满足定理条件,要证 Y 具有点可数基.

令 $\Phi=\{\mathscr{F}\subset\mathscr{P}:\mathscr{F}\text{是有限集族}\}$,为后面要用,先指出 Y 是第一可数的,这是因为由定理条件,对每一 $y\in Y$,

$$\{(\bigcup\mathscr{F})^\circ:\mathscr{F}\in\Phi,y\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ,y\in\bigcap\mathscr{F}\}$$

是点 y 的可数邻域基.显然,$\{(\bigcup\mathscr{F})^\circ:\mathscr{F}\in\Phi\}$是 Y 的基,但未必是点可数的,下面使集$(\bigcup\mathscr{F})^\circ$作适当收缩.

对每一有限集 $\mathscr{F}\in\Phi$,置

$\mathscr{M}(\mathscr{F})=\{A\subset Y:A\subset(\bigcup\mathscr{F})^\circ,A\not\subset(\bigcup\mathscr{E})^\circ,\text{当 }\mathscr{E}\subsetneq\mathscr{F}\}$.

$V(\mathscr{F})=(\bigcup(\mathscr{M}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}))^\circ$.

下证 $\mathscr{V}=\{V(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\Phi\}$ 是 Y 的点可数基.

先证 $\mathscr{V}$ 是 Y 的基,设 $y\in W$,W 是 Y 中的开集.由定理条件,存在 $\mathscr{F}\in\Phi$ 使 $y\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ\subset W$.可以假设:如果 $\mathscr{E}\subsetneqq\mathscr{F}$,$y\notin(\bigcup\mathscr{E})^\circ$,显然,$V(\mathscr{F})\subset\bigcup(\mathscr{M}(\mathscr{F}))\subset(\bigcup\mathscr{F})^\circ\subset W$.下证 $y\in V(\mathscr{F})$.对 $y\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ$,再一次引用定理条件,取 $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}$ 使 $y\in(\bigcup\mathscr{S})^\circ$,对每一 $P\in\varphi$,$y\in P\subset(\bigcup\mathscr{F})^\circ$,由 $y\in P\subset(\bigcup\mathscr{F})^\circ$ 及 $y\notin(\bigcup\mathscr{E})^\circ$,如 $\mathscr{E}\subsetneqq\mathscr{F}$,知 $P\not\subset(\bigcup\mathscr{E})^\circ$.由 $\mathscr{M}(\mathscr{F})$ 的定义,$P\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$.所以 $\mathscr{S}\subset(\mathscr{M}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P})$.从而 $(\bigcup\mathscr{S})^\circ\subset V(\mathscr{F})$,$y\in V(\mathscr{F})$.

下证 $\mathscr{V}$ 是点可数的,即证 $y\in V(\mathscr{F})$ 仅对可数个 $\mathscr{F}\in\Phi$ 成立.按 $y\in V(\mathscr{F})$,则 $y\in$ 某些集 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{F})\cap\mathscr{P}$,由于 $\mathscr{P}$ 是点可数的,$y\in A$ 仅对可数个 $A\in\mathscr{P}$ 成立.所以只要证明:

(*)如 $A\subset Y$,则 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$ 仅对可数个 $\mathscr{F}\in\Phi$ 成立.

对 $n\in N$,置 $\Phi_n=\{\mathscr{F}\in\Phi:|\mathscr{F}|=n\}$.只要证 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$ 仅对可数个 $\mathscr{F}\in\Phi_n$ 成立.如不然,$A\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$ 对 Φ_n 中不可数个 $\mathscr{F}$ 成立,这不可数个 $\mathscr{F}$ 所成族记作 Ψ,$\Psi\subset\Phi_n$,取极大族 $\mathscr{R}\subset\mathscr{P}$ 使 $\mathscr{R}\subset\mathscr{F}$,对不可数个 $\mathscr{F}\in\Psi$ 成立.置 $\Psi^*=\{f\in\Psi:\mathscr{R}\subsetneqq\mathscr{F}\}$,显然 $0\leqslant|\mathscr{R}|<n$,如 $\mathscr{F}\in\Psi^*$,则 $A\in\mathscr{M}(\mathscr{F})$ 及 $\mathscr{R}\subsetneqq\mathscr{F}$.所以由 $\mathscr{M}(\mathscr{F})$ 的定义,$A\not\subset(\bigcup\mathscr{R})^\circ$,可取 $y\in A$ 而 $y\notin(\bigcup\mathscr{R})^\circ$.令 $E=Y-\bigcup\mathscr{R}$,则 $y\in\bar{E}$.由于 Y 是第一可数的,存在可数集 $Z=\{z_n:n\in N\}\subset E$.使 $z_n\to y$.放 $y\in\bar{Z}$.如 $\mathscr{F}\in\Psi^*$,则 $y\in(\bigcup\mathscr{F})^\circ$(因 $y\in A\subset(\bigcup\mathscr{R})^\circ$).所以 Z 与某些 $P\in\mathscr{F}$ 相交,因 $\mathscr{P}$ 是点可数的,Z 只能与可数个 $P\in\mathscr{P}$ 相交.所以 Z 必与某些 $P_0\in\mathscr{P}$ 相交,而这 P_0 属于 Ψ^* 中不可数个 $\mathscr{F}$.注意 $P_0\notin\mathscr{R}$,因为 P_0 与 Z 相交而 $\bigcup\mathscr{R}$ 与 Z 不相交,令 $\mathscr{R}'=\mathscr{R}\cup\{P_0\}$,则 $\mathscr{R}'\supsetneqq\mathscr{R}$ 及 $\mathscr{R}'\subset\mathscr{F}$ 对不可数个 $\mathscr{F}\in\Psi$ 成立,这与 $\mathscr{R}$ 的极大性矛盾.从而证明了(*),到此证明了 $\mathscr{V}$ 是空间 Y 的点可数基.证完.

定理 7.6.10 (Fihpov[1969]) 双商、s 映射保持具有点可数基的空间.

证明 设 $f:X\to Y$ 是由具有点可数基的空间 X 到空间 Y 上的双商、s 映射,设 $\mathscr{B}$ 是 X 的点可数基,置 $\mathscr{P}=f(\mathscr{B})$,因 f 是 s 映

射，和定理 7.6.7 一样知 $\mathscr{P}$ 是空间 Y 的点可数覆盖.

对 $y\in Y$，W 是 Y 中包含 y 的开集，取 $\mathscr{B}$ 中元之使 $B\subset f^{-1}(W)$ 且 $B\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$ 者所成族 $\mathscr{B}'$，$\mathscr{B}'\subset\mathscr{B}$，$\mathscr{B}'$ 覆盖 $f^{-1}(y)$，因 f 是双商的，存在有限集族 $\mathscr{E}\subset\mathscr{B}'$，使 $y\in(\bigcup f(\mathscr{E}))^{\circ}$，对每一 $B\in\mathscr{E}$，$f(B)\in f(\mathscr{E})$，由 $B\subset f^{-1}(W)$ 及 $B\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing$ 得 $y\in f(B)\subset W$，由引理 7.6.9 知 $\mathscr{P}$ 是 Y 的点可数基. 证完.

定理 7.6.11 下列论断等价：

(i) X 是具有点可数基的空间，

(ii) X 是度量空间在开 s 映射下的象，

(iii) X 是度量空间在双商、s 映射下的象.

证明 (i)$\Leftrightarrow$(ii) 见 Ponomarev 定理(定理 7.6.7，7.6.8)，(ii)$\Rightarrow$(iii) 显然(定义 5.2.2)，(iii)$\Rightarrow$(i)，由 Fihpov 定理(定理 7.6.10) 证完.

在例 6.6.22 后面曾引入 Arhangel'skii 的 MOBI 类，空间 Y 是 MOBI 中的元当且仅当存在一度量空间 M 及有限个开紧映射：$\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_n$ 使 $(\phi_1\circ\phi_2\circ\cdots\circ\phi_n)M=Y$. 下面证明开、紧映射保持点可数基，这是能为开、紧映射保持的极少数的一类空间.

定理 7.6.12 (高国士[1995]) 设 f 是由具有点可数基的空间 X 到空间 Y 上的开映射，且对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是可数紧的，则 Y 具有点可数基.

证明 设 $\mathscr{B}$ 是空间 X 的点可数基，$f:X\rightarrow Y$ 是开映射，且对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 是可数紧的. 因 f 是开映射，易知 $f(\mathscr{B})$ 是空间 Y 的基，下证 $f(\mathscr{B})$ 在 Y 中是点可数的. 为此，只要证明对每一 $y\in Y$，$f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{B}$ 中可数个元相交，也就是证明 $\mathscr{B}_y=\{B\in\mathscr{B}: B\cap f^{-1}(y)\neq\varnothing\}$ 是可数的，由于具有点可数基的子空间具有点可数基及 $f^{-1}(y)$ 是 T_1 可数紧的，由引理 7.6.3，子空间 $f^{-1}(y)$ 是可分的，由引理 7.6.2 的证明知 $\mathscr{B}_y$ 是可数的. 证完.

推论 7.6.13 MOBI 类的每一元是具有点可数基的空间.

证明 因为开、紧映射是开、可数紧映射，由定理 7.6.12 及 MOBI 类的定义得证. 证完.

顺便指出:“度量空间在开、紧映射下的象正好是 meta 紧的可展空间”(Hanai[1961],Arhangel śkii[1966]),由定理 7.6.12 知这样的空间具有点可数基.

下面附带地证明:闭、可数紧映射(即准完备映射,见定义 5.2.2)也保持点可数基.

定理 7.6.14 (高国士[1995]) 设 f 是由具有点可数基的 T_1 空间 X 到空间 Y 上的闭映射,且对每一 $y\in Y$,$f^{-1}(y)$是可数紧的,则 Y 具有点可数基.

证明 这里除设 f 是闭映射外,其它条件与定理 7.6.12 相同,由定理 7.6.12 的证明,每一 $f^{-1}(y)$仅与空间 X 的点可数基 $\mathscr{B}$ 中可数个元相交,置 $\mathscr{P}=f(\mathscr{B})$,$\mathscr{P}$是空间 Y 的点可数覆盖.

对每一 $y\in Y$ 及 Y 中包含点 y 的开集 V,$y\in V$,$f^{-1}(y)\subset f^{-1}(V)$,$f^{-1}(V)$是 X 中的开集,因 $\mathscr{B}$ 是 X 的基及每一 $f^{-1}(y)$ 仅与 $\mathscr{B}$ 中可数个元相交,存在 $\mathscr{B}$ 的可数子族 $\mathscr{B}_y$($\mathscr{B}_y$ 中每一元都和 $f^{-1}(y)$相交)使 $f^{-1}(y)\subset\bigcup\mathscr{B}_y\subset f^{-1}(V)$. 因 $f^{-1}(y)$是可数紧的,存在 $\mathscr{B}_y$ 的有限子族 $\mathscr{B}'_y$ 覆盖 $f^{-1}(y)$. $\bigcup\mathscr{B}'_y$ 是开集,因 f 是闭映射,存在 X 中开集 U_y 使 $f^{-1}(y)\subset U_y\subset\bigcup\mathscr{B}'_y\subset f^{-1}(V)$,且 $f(U_y)$是 Y 中开集(定理 1.5.8). 所以 $y\in f(U_y)\subset(f(\bigcup\mathscr{B}'_y))^\circ=(\bigcup f(\mathscr{B}'_y))^\circ$,$f(\mathscr{B}'_y)$是 $\mathscr{P}$ 的有限子族,且对每一 $P=f(B)\in f(\mathscr{B}'_y)$,$y\in f(U)\subset V$. 到此证明了 $\mathscr{P}$ 满足引理 7.6.9 的所有条件. 所以空间 Y 具有点可数基. 证完.

推论 7.6.15 (Filipov[1968]) 完备映射保持 T_1 具有点可数基的空间.

Mišenko 定理(定理 7.6.5)中的“基”并非必要,可代以(在 T_1 意义下)能分离点的覆盖.

定义 7.6.16 空间 X 的覆盖 $\mathscr{U}$ 称为 **T_1 可分离的**(T_1-separating),如果对任意 $x,y\in X(x\neq y)$,存在 $U\in\mathscr{U}$ 使 $x\in U$ 而 $y\notin U$(即 $x\in U\subset X-\{y\}$).

引理 7.6.17 $\aleph_1$ 紧空间的点可数开覆盖具有可数子覆盖.

(这里$\aleph_1$紧是指每一离散闭子集的势$<\omega_1$,也就是每一不可数子集有聚点).

证明 设$\mathscr{U}$是$\aleph_1$紧空间X的点可数开覆盖可以归纳地定义$\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}$使$x_\alpha\notin\bigcup_{\beta<\alpha}\mathrm{st}(x_\beta,\mathscr{U})$及$X=\bigcup_{\alpha<\kappa}\mathrm{st}(x_\alpha,\mathscr{U})$,则$\{x_\alpha:\alpha<\kappa\}$是离散闭集($\mathscr{U}$中包含点$x_\alpha$的开集$U$不包含$x_\beta(\beta\neq\alpha)$).因$X$是$\aleph_1$紧的,$|\kappa|=W_1$,又因$\mathscr{U}$是点可数的,所以

$$\{U\in\mathscr{U}:存在\ \alpha<\kappa\ 使 x_\alpha\in U\}$$

是$\mathscr{U}$的可数子覆盖.证完.

定理 7.6.18 具有点可数的T_1可分离开覆盖的T_2可数紧空间X是紧度量空间.

证明 只要证明X具有G_δ-对角线,就由推论7.3.16得证.

所谓X具有G_δ对角线是指X^2的对角线$\Delta=\{(x,x):x\in X\}$是X^2中的G_δ集.注意X^2也具有点可数的T_1可分离开覆盖,记为$\mathscr{U}$.置

$$\mathscr{V}=\{\bigcup\mathscr{U}':\mathscr{U}'\subset\mathscr{U}是\ \Delta\ 的最小有限覆盖\}.$$

由Miščenko引理(引理7.6.1),$\mathscr{V}$是可数的,只要证$\Delta=\bigcap\mathscr{V}$.显然,$\Delta\subset\bigcap\mathscr{V}$.下证$\Delta\supset\bigcap\mathscr{V}$.设$p\in X^2$,$p\notin\Delta$.下证$p\notin\mathscr{V}$中某一元$\bigcup\mathscr{U}'$,从而$p\notin\mathscr{V}$得证.

对每一$q\in\Delta$,由$\mathscr{U}$的T_1可分离性,可取$U_q\in\mathscr{U}$,使$q\in U_q\subset X^2-\{p\}$,$\{U_q:q\in\Delta\}$是$\Delta$的点可数开覆盖不包含点$p$,$\Delta$同胚于$X$,$\Delta$也是可数紧的(从而$\aleph_1$紧的).由引理7.6.17,$\{U_q:q\in\Delta\}$具有可数子覆盖.从而具有最小有限覆盖$\mathscr{U}'$(因$\Delta$可数紧).所以$\Delta\subset\bigcup\mathscr{U}'$,而$p\notin\bigcup\mathscr{U}'$,$\bigcup\mathscr{U}'\in\mathscr{V}$,$p\notin\bigcap\mathscr{V}$.证完.

习 题 七

7.1 证明Lindelöf Moore空间可度量化.

7.2 (Jones[1937])$\aleph_1$紧Moore空间可度量化.

7.3 证明在可展空间,闭集$F=\bigcap_n\mathrm{st}(F,\mathscr{U}_n)$,这里$\{\mathscr{U}_n\}_{n\in N}$是这空间的展开,从而可展空间是完备的.

7.4　证明:如果 X^2 是完备的,则 X 具有 G_δ 对角线,具有 G_δ 对角线这一性质是遗传的且为可数积保持.

7.5　验证 Bennett-Lutzer[1972]的例(习题 6.4)具有 θ 基.

7.6　证明:如果 $W\Delta$ 空间的定义(定义 7.2.1)中,当 $x_n \in \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$ 时,$\{x_n\}$ 的聚点就是 x,则 $\{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)\}_{n\in N}$ 形成点 x 的邻域基,从而这空间是可展空间.

7.7　证明局部紧的 θ 加细空间是 $W\Delta$ 空间.

7.8　证明 M 空间是闭遗传的.

7.9　(Nagata[1969]) T_2 空间 X 是仿紧 M 空间当且仅当 X 同胚于 T_2 紧空间与度量空间的积中的闭集.

7.10　证明可数个 Čech 完全空间的积是 Čech 完全的.

7.11　证明定义 7.2.12 中的(iii) $\bigcap_n \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n) = \bigcap_n \overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)}$ 可改为(iii′)对每一 $n \in N$ 存在 $n' \in N$ 使 $\overline{\mathrm{st}(x, \mathscr{U}_{n'})} \subset \mathrm{st}(x, \mathscr{U}_n)$.

7.12　设 A 是某度量空间 X 的 Čech 完全子集,则 A 是 X 中的 G_δ 集.

7.13　Čech 完全空间的 G_δ 子集是 Čech 完全的.从而 X 是 Čech 完全的当仅当它同胚于某一 T_2 紧空间的 G_δ 集.

7.14　度量空间与可数紧空间的积的闭子集是 M 空间.度量空间与 T_2 紧空间的积的 G_δ 子集是 p 空间.

7.15　证明 T_2、仿紧 $W\Delta$ 空间是 M 空间.

7.16　证明正则 θ 加细空间的 G_δ 对角线是 G_δ^* 对角线(用引理 7.2.16).

7.17　(Okuyama[1967])证明:(i)具有 σ 局部有限网络的空间的任一子空间具有 σ 局部有限网络.(ii)具有 σ 闭包保持网络的正则空间的任一子空间具有 σ 闭包保持网络.

7.18　设 X 是可数个闭子空间 $X_n (n \in N)$ 的并.证明:如每一 X_n 具有 σ 局部有限(σ 闭包保持)网络,则 X 具有 σ 局部有限(σ 闭包保持)网络.

7.19　证明在正则空间,Moore 空间 = σ 空间 + $W\triangle$ 空间(或 p 空间).

7.20　(Michael[1972])设 $\{A_n\}$ 是 X 的递减闭集序列,考察下列情况:(i) $\bigcap A_n$ 是可数紧集,且 $\{A_n\}$ 是 $\bigcap A_n$ 的邻域基.(ii)如 $x_n \in A_n (n \in N)$,则 $\{x_n\}$ 在 $\bigcap A_n$ 中有 ω 聚点.(iii)如 $x_n \in A_n (n \in N)$,则 $\{x_n\}$ 在 X 中有 ω 聚点.(iv)如 $\{K_n\}$ 递减,$K_n \subset A_n (n \in N)$,则 $\bigcap \bar{K}_n \neq \varnothing$.试证明:(i)⇒(ii)⇒(iii)⇒(iv).如更有 $\bigcap A_n = \bigcap \bar{A}_n$,则四者等价.

Nagami[1969]关于 Σ 空间的原始定义是:空间 X 的 Σ 网是可数个局部

有限闭覆盖序列$\{\mathscr{F}_i\}$满足下列条件者：如$K_1\supset K_2\supset\cdots$是一列不空的闭集序列，且对$x\in X$，$K_i\subset C(x,\mathscr{F}_i)=\bigcap\{F:x\in F\in\mathscr{F}_i\}$，$i\in N$，则有$\bigcap K_i\neq\varnothing$. 如置$C(x)=\bigcap_{i\in N}C(x,\mathscr{F}_i)$，则$C(x)$是可数紧闭集. 空间$X$是$\Sigma$空间如果$X$具有$\Sigma$网. 试利用 Michael 的上述结果证明 Nagami 的原始定义等价于定义 7.3.22.

7.21　证明定理 7.3.23 对强Σ^*空间也成立.

7.22　(Junnila[1978b])证明强$\Sigma^\#$空间是θ加细的.

7.23　**正则开**(regular open)**集与正则闭**(regular closed)**集**. 开集U称为正则开集，如$U=U^{-\circ}$. 闭集F称为正则闭集，如$F=F^{\circ-}$. 证明：

(i)如F是闭集，则F°是正则开集；如U是开集，则U^-是正则闭集，

(ii)正则开(闭)集的补集是正则闭(开)集，

(iii)如U,V是正则开集，则$U\subset V$当且仅当$U^-\subset V^-$，

(iv)如F,H是正则闭集，则$F\subset H$当且仅当$F^\circ\subset H^\circ$，

(v)二个正则闭集的并是正则闭集，二个正则开集的交是正则开集，

(vi)正则闭集与开闭集的交是正则闭集；正则开集与开闭集的并是正则开集.

7.24　证明 Sorgenfrey 直线是完备正规的，但不是M_3空间.

7.25　用注记 7.4.13 中的(*)证明$M_3\Rightarrow\sigma$.

7.26　证明定理 7.4.9 的(i)及(ii)⇒注记 7.4.13 中的(*).

7.27　证明伪开的不可约映射是拟开映射.

7.28　设f是空间X到空间Y上的映射，如果存在X的开覆盖$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$，使对每一$\alpha\in A$，$U_\alpha$同胚于$Y$中的开集$f(U_\alpha)$，则称$f$是**局部同胚映射**(Locally homeomorphic mapping). 证明：设f是T_2空间X到空间Y上的k对一的开映射，则(i)f是局部同胚映射，(ii)f是闭映射.

7.29　(高国士，[1983])设X是正规空间，$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$是$X$的局部有限开覆盖，每一$U_\alpha(\alpha\in A)$是$M_1$空间，则$X$是$M_1$空间.

7.30　(Borges-Lutzer[1974])设X是M_1空间，A是闭子集，则商空间X/A是M_1空间当且仅当A具有σ闭包保持开邻域基.

7.31　(朱俊[1983])设X是M_1空间，F是X的具有可数紧边缘的闭集，则商空间X/F是M_1空间.

7.32　(朱俊[1983])如果闭映射$f:X\to Y$满足：对每一$y\in Y$，$f^{-1}(y)$的边缘是可数紧的，则f是可数双商映射.

7.33　验证 Heath-Junnila 定理(定理 7.4.28)证明中的空间Z,Z'的每

一闭集都具有闭包保持开邻域基，即 $Z, Z' \in$ 类 $\mathscr{P}$. 从而证明 $\mathscr{P}$ 类具有推论 7.4.29 的类似结果. 即证下列论断等价：(i) M_3 空间类 $=\mathscr{P}$ 类，(ii) $\mathscr{P}$ 类具有遗传性，(iii) $\mathscr{P}$ 类具有闭遗传性，(iv) $\mathscr{P}$ 类关于闭映射封闭，(v) $\mathscr{P}$ 类关于完备映射封闭.

7.34 (Lutzer[1971]) 设空间 X 具有半层对应 $U \to \{U_n\}$，且如 $x \in V$，V 是空间 X 的开集，则存在 $n \in N$ 使 $x \in V^\circ_n$. 证明 X 是层空间.

7.35 证明可对称度量化空间是序列型的.

7.36 (Corson-Michael[1964]) 证明：具有点可数基的正则空间如存在 σ 紧稠子集，则可度量化(用引理 7.6.3)

7.37 具有点可数基的 T_2 局部紧空间可度量化.

7.38 验证 Michael 直线(例 5.4.3)具有点可数基但不是可展空间.

7.39 (Heath-Lutzer-Zenor[1973]) 证明 T_1 空间 X 是单调正规空间当且仅当存在有序对 (p, C) 上的函数 H，这里 C 是闭集及 $p \in X \setminus C$，使 $H(p, C)$ 是开集满足：

(i) $p \in H(p, C) \subset X \setminus C$，

(ii) 如 D 是闭集及 $p \notin C \supset D$，则 $H(p, C) \subset (p, D)$，

(iii) 如 $p, q \in X$ 而 $p \neq q$，则 $H(p, \{q\}) \cap H(q, \{p\}) = \varnothing$.

7.40 验证可用 g 函数刻画：

(i) 可展空间：对每一 $n \in N$，$\{p, x_n\} \subset g(n, y_n)$，则 $\{x_n\}$ 以 p 为聚点，

(ii) $W\Delta$ 空间：对每一 $n \in N$，$\{p, x_n\} \subset g(n, y_n)$，则 $\{x_n\}$ 有聚点.

7.41 空间 X 称为 **β 空间**，如果存在 g 函数使对每一 $n \in N$，$p \in g(n, x_n)$，则 $\{x_n\}$ 有聚点. 比较上题 $W\Delta$ 空间的刻画知 $W\Delta \to \beta$. 比较半层空间的 g 函数的刻画(定理 7.4.7)，知半层 $\to \beta$. 试证明下列 β 空间的刻画(滕辉-夏省祥-林寿，[1984])：

(i) X 是 β 空间，

(ii) 对 X 的每一开集 U，存在 X 的闭集序列 $\{F_n(U)\}$ 使：(1) $F_n(U) \subset U$，(2) 如 V 是开集，$U \subset V \Rightarrow F_n(U) \subset F_n(V)$，(3) 如果 $\{U_n\}$ 是 X 的递增开集序列使 $\bigcup_n U_n = X$，则 $\bigcup_{n \in N} F_n(U_n) = X$，

(iii) 对 X 的每一闭集 F，存在 X 的开集序列 $\{U_n(F)\}$ 使：(1) $U_n(F) \supset F$，(2) 如 H 是闭集，$F \subset H \Rightarrow U_n(F) \subset U_n(H)$，(3) 如果 $\{F_n\}$ 是 X 的递减闭集序列使 $\bigcap_{n \in N} F_n = \varnothing$，则 $\bigcap_{n \in N} U_n(F_n) = \varnothing$.

由上述刻画，知 β 空间是可数弱仿紧空间(定理 6.1.37).

7.42 (滕辉-夏省祥-林寿，[1989]) 证明 β 空间为闭映射保持.

7.43　证明 β 空间为准完备映射的逆象保持.

7.44　(Hodel,[1972])证明Σ空间是 β 空间.

7.45　(Hodel,[1971])证明在正则空间,半层 $=\beta+$ 具有 G_δ^* 对角线.

由上述习题 7.40—7.45 可看到 β 空间与其它广义度量空间的联系很广泛.但 β 空间不是第一可数的,甚至不是 q 空间.

7.46　(Hodel[1972])空间 X 称为 **γ 空间**,如果存在 g 函数使对每一 $n \in N, y_n \in g(n,p), x_n \in g(n,y_n)$,则 $\{x_n\}$ 以 p 为聚点.试证明:γ 空间是第一可数的.β,γ 空间是可展空间.

第八章　广义度量空间(下)

§1.　$\aleph_0$ 空间

第七章的§3的 σ 空间(定义 7.3.1)是把 Nagata-Smirnov 度量化定理中的“基”换为“网络”,“基”必须是开集族,“网络”没有这限制(定义 3.1.20).下面要引进 k 网络,把网络定义中的“点”推广为“紧集”(见下定义 8.1.1),k-网络可简称为 k-网,而网络不简称为网的原因是恐怕这里的 Network 与第一章§4的 Net 混淆.

定义 8.1.1　空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 上的 **k 网络**(或 **k 网**,k-network).如果对 X 的紧集 K 及开集 U 满足 $K\subset U$,存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset U$.正则空间 X 称为 **$\aleph_0$ 空间**(**$\aleph$ 空间**)如果 X 具有可数 k 网(σ 局部有限 k 网).

在正则空间,k 网的元可设为闭的,称为闭 k 网.

注记　由于对可数集族 $\mathscr{P}$,可以假设关于有限并封闭的,所以上述 $\aleph_0$ 空间的定义可简化为“存在 $P\in\mathscr{P}$ 使 $K\subset P\subset U$”,Michael [1966]引入 $\aleph_0$ 空间时,称具有上述性质的 $\mathscr{P}$ 为**伪基**(pseudo-base),称具有可数伪基的正则空间为 $\aleph_0$ 空间.

下面叙述 $\aleph_0$ 空间的性质,显然可分度量空间(具有可数基)是 $\aleph_0$ 空间.

定理 8.1.2　$\aleph_0$ 空间是可分的,具有 Lindelöf 性质,(从而是仿紧的),完备的(即每一闭集是 G_δ 集),且具有 G_δ 对角线(从而具有 G_δ^* 对角线).

证明　作为习题,读者自证.

定理 8.1.3　$\aleph_0$ 空间是遗传的,可数可积的.

证明　遗传性显然,可数可积性的证明同 σ 空间情况(定理

7.3.4).

引理 8.1.4 (Michael[1966]) 紧覆盖映射保持可数 k 网.

证明 设 $f:X\to Y$ 是由具有可数k 网 $\mathscr{P}$的空间到空间 Y 上的紧覆盖映射,下证 $f(\mathscr{P})=\{f(P):P\in\mathscr{P}\}$是空间 Y 的可数k 网.

设 C,U 分别是 Y 中的紧集、开集,且 $C\subset U$. 因 f 是紧覆盖的,存在 X 中紧集K 使$f(K)=C$,则 $K\subset f^{-1}(U)$,存在 $\mathscr{P}$的有限子族 $\mathscr{P}'$使 $K\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset f^{-1}(U)$,从而 $C\subset f(\bigcup\mathscr{P}')\subset U$,这里 $f(\bigcup\mathscr{P}')=\bigcup f(\mathscr{P}')$, $f(\mathscr{P}')=\{f(P):P\in\mathscr{P}'\}$是 $f(\mathscr{P})$的有限子族. 证完.

定理 8.1.5 (Michael[1966]) 闭映射保持$\aleph_0$ 空间.

证明 设 $f:X\to Y$ 是由$\aleph_0$ 空间到空间 Y 上的闭映射,由定理 8.1.2, X 是正则 Lindelöf 空间,从而是 T_2 仿紧的,是正规的. f 是闭映射, Y 是正规的,从而是正则的. 由推论 6.6.14, f 又是紧覆盖的, X 具有可数k 网,由引理 8.1.4, Y 具有可数k 网. 证完.

推论 8.1.6 $\aleph_0$ 空间满足遗传闭包保持闭和定理.

证明 由一般性定理 5.5.6 得证. 证完.

空间 X 称为 ***r* 空间**,如果对每一 $x\in X$ 存在开邻域列 $\{U_n(x)\}$,如 $x_n\in U_n(x)$,则 $\{x_n\}$包含在某紧集内. 上述序列称为点 x 的r 序列.

定理 8.1.7 (Michael[1966]) $\aleph_0$ 空间 X,如果又是 r 空间,则 X 是可分度量空间.

证明 设 X 具有可数伪基 $\mathscr{P}$,要证$\{P^\circ:P\in\mathscr{P}\}$ (P°表示P 的内核)是 X 的可数基,从而由 X 的正则性得证.

如不然,存在点 $x\in X$ 及X 中开集U 使$x\in U$,但不存在 $P\in\mathscr{P}$使 $x\in P^\circ\subset U$,取 $\mathscr{P}$中元之包含在 U 中者为$\{P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots\}$. 因 X 正则,存在开集 V,使 $\overline{V}\subset U$,因 X 是r 空间,存在点 x 的开邻域的 r 序列$\{U_n(x)\}$,不妨设 $U_n(x)\subset\overline{V}$, $n\in N$. 由反证的假设, $U_n(x)-P_n\neq\varnothing\,(n\in N)$,取 $x_n\in U_n(x)-P_n$,由 r 序列的定义, $\{x_n\}$包含于某紧集 C,因 C 是闭集, $\{x_n\}^-\subset C$, $\{x_n\}^-$也

是紧集，且$\{x_n\}^- \subset V^- \subset U$. 因$\mathscr{P}$是伪基，存在$P_n$使$\{x_n\}^- \subset P_n \subset U$，这与$x_n \notin P_n$矛盾. 证完.

注记 由于第一可数性、局部紧性均蕴含r性质，所以满足第一可数公理的(或局部紧的)$\aleph_0$空间是可分度量空间.

定理 8.1.8 (Michael[1966]) 设X是正则空间，则下列论断等价：

(i) X是$\aleph_0$空间及k空间，

(ii) X是可分度量空间在商映射下的象.

证明 (i)⇒(ii)，设X是$\aleph_0$及k空间，设$\mathscr{F}$是空间X的可数闭k网，且关于有限并及交是封闭的. 置$M = \mathscr{F}^w$，这里对集$\mathscr{F}$赋以离散拓扑，则积空间M是可分度量空间，M的每一点是一集序列$\{F_n\}$，每一$F_n \in \mathscr{F}_n (= \mathscr{F})$. 选取具有如下性质的集序列$\{F_n\}$，使$X$中某一点$x$的每一邻域包含某$F_n$，$x \in \bigcap_{n \in N} F_n$. 易证$\{x\} = \bigcap_{n \in N} F_n$. 具有上述性质的集序列$\{F_n\}$称为点$x$的网络，记这些集序列的全体为$N$，显然$N \subset M$.

定义$f: N \to X$，使点x的网络$\{F_n\}$对应着点$x \in X$. 由点网络的定义，易证f是连续的. 下证f是由度量空间N到X上的商映射.

如f不是商映射，存在集$A \subset X$不是闭的，但$f^{-1}(A)$却闭于N. 因X是k空间，存在紧集K使$K \cap A$不是闭的，K是紧的σ空间(因k网是网络). 从而可度量化(定理 7.1.4)，存在$x \in K - A$及$a_n \in K \cap A$使$a_n \to x$. 对每一$m \in N$，$\{x\} \cup \{a_n : n \geqslant m\}$是一紧集，记作$Z_m$. Z_m应为$\mathscr{F}$中有限个元覆盖. 由于$\mathscr{F}$关于有限并封闭，存在$F \in \mathscr{F}$使$F \supset Z_m$. 这种F的全体记为$\{G_n\}$. x的每一邻域包含紧集Z_m. 因$\mathscr{F}$是k网，这邻域包含着某G_n，所以$\{G_n\}$是点x的网络，$\{G_n\} \in N$. 由于每一G_n包含着序列$\{a_n\}$的几乎所有的点，$\{G_n\} \in \overline{f^{-1}(A)}$，这是矛盾的.

(ii)⇒(i) 设$f: M \to X$是可分度量空间M到空间X上的商映射. 首先易知X是k空间(因度量空间是k空间，而k空间为商

映射保持(定理 3.4.13)),下证 X 是$\aleph_0$ 空间.

设 $\mathscr{B}$ 是度量空间的可数基.下证 $f(\mathscr{B})$是 X 的 k 网.如不然,存在 X 中紧集 K 及开集 U 使 $K\subset U$,但 K 不能被 $\mathscr{C}=\{C\in f(\mathscr{B}):C\subset U\}$中有限个元覆盖,把 $\mathscr{C}$ 中元排列为序列$\{C_n\}$,取 $x_n\in K-\bigcup_{i\subseteq n}C_i$.

K 具有可数网络,是紧 σ 空间,从而可度量化,序列$\{x_n\}$应有收敛子序列,不失一般性,就作为 $x_n\to x\in K(x\neq x_n)$. $A=\{x_n:n\in N\}$不闭于 X,因 f 是商映射,$f^{-1}(A)$不闭于 M. 令 $z\in\overline{f^{-1}(A)}-f^{-1}(A)$,则 $z\in f^{-1}(K)\subset f^{-1}(U)$. 取 $B\in\mathscr{B}$使 $z\in B\subset f^{-1}(U)$,则 $f(B)\in\mathscr{C}$,而 $f(B)$包含无限个 x_n,这与 x_n 的取法矛盾.证完.

定理 8.1.9 (Michael[1966]) 设 X 是正则空间,则下列论断等价:

(i)X 是$\aleph_0$ 空间.

(ii)X 是可分度量空间在紧覆盖映射下的象.

证明 (i)⇒(ii),利用定理8.1.8 的证明(i)⇒(ii)所构造的可分度量空间 N 及$f:N\to X$.下面证明 f 是紧覆盖的.

设 $K\subset X$ 是紧集,X 是$\aleph_0$ 空间,存在可数闭 k 网 $\mathscr{F}$,K 为 $\mathscr{F}$ 中有限个元覆盖,把所有这些有限覆盖的全体(可数个)排列为集序列$\{\mathscr{F}_n\}$,则$\prod_{n\in N}\mathscr{F}_n$ 是 $\mathscr{F}^\omega$ 的紧子空间.设 $x\in K$ 及$x\in F_n\in\mathscr{F}_n$,对每一 $n\in N$,如果 U 是x 的邻域,容易找到$\mathscr{F}$的有限子族 $\mathscr{F}_x$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{F}_x\subset U$,且 $\mathrm{st}(x,\mathscr{F}_x)\subset U$,这 $\mathscr{F}_x$ 应是某 $\mathscr{F}_n$,从而 U 包含着某F_n,所以集

$$L=\{\{F_n\}\in\pi_{n\in N}\mathscr{F}_n:(\bigcap_{n\in N}F_n)\cap K\neq\varnothing\}$$

是 N 的子集,且 $f(L)=K$.由于$\mathscr{F}$的元是闭集及 K 是紧集,L 闭于$\prod_{n\in N}\mathscr{F}_n$,从而是紧集,所以 f 是紧覆盖映射.

(ii)⇒(i),由引理 8.1.4 得证.证完.

下面附带地叙述具有可数网络的空间.

定义 8.1.10 具有可数网络的正则空间称为 **cosmic 空间.**

显然,$\aleph_0$ 空间是 cosmic 空间,cosmic 空间是 σ 空间,此外,

cosmic 空间是遗传的,可数可积的.

定理 8.1.11 (Michael[1966]) 设 X 是正则空间,则下列论断等价:

(i) X 是 cosmic 空间,

(ii) X 是可分度量空间在连续映射下的象.

证明 (i)⇒(ii)设空间 (X, C) 具有可数闭网络 $\mathscr{F}$. 取 $\mathscr{F}$ 的元的所有有限交所成集族为 $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}$ 是可数的,赋 X 以新的拓扑 τ' 使 $\mathscr{B}$ 是 (X, τ') 的基, $\mathscr{B}$ 的元对原来的拓扑 τ 是闭集,对新的拓扑 τ' 是既开且闭集,所以 (X, τ') 是正则空间,且具有可数基 $\mathscr{B}$,所以 (X, τ') 是可分度量空间, (X, τ') 到 (X, τ) 的恒等映射是连续的(因 $\tau' \supset \tau$).

(ii)⇒(i)因连续映射保持网络. 证完.

$\aleph_0$ 空间的最有趣的应用是在函数空间理论方面,回忆第二章§1 关于积空间的叙述,由定理 2.1.8,积空间 $\prod_{\gamma \in \Gamma} X_\gamma$ 中按积拓扑的收敛可分解为按坐标收敛,也称为按点收敛. 后一术语常用于坐标空间相同时. 第三章§6 叙述紧化时,在定理 3.6.6 后述及:设 A 是一集, $|A|$ 表示 A 的势, $Q = [0,1]$ 是闭区间,积空间 Q^A 是 $|A|$ 个 $[0,1]$ 的积,每一 $q \in Q^A$ 可表示为 $q = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$,这里 $x_\alpha \in [0,1]$, q 可以看作集 A 到 $[0,1]$ 内的实值函数. 因此 Q^A 是由集 A 到 Q 内的实值函数全体,这函数空间的收敛是按积拓扑收敛,也就是按点收敛的.

一般说从空间 X 到空间 Y 内的函数 f 的全体可表示为 Y^X,记 $W(x, U) = \{f \in Y^X : f(x) \in U\}$, $x \in X$, U 开于 Y,函数空间的按点收敛拓扑是以所有 $W(x, U)$ 作为次基形成的拓扑,这拓扑的基是这些 $W(x, U)$ 的有限交. 在应用时,按点收敛拓扑不够"精"(fine),所以下面引入**紧开拓扑**(compact-open topology),这是把上述按点收敛拓扑的次基的 $W(x, U)$ 中的点 x 代以紧集 C(回忆 k 网络是把网络定义中的点代以紧集). 置

$$W(C, U) = \{f \in Y^X : f(C) \subset U\}.$$

这里 C 是 X 中紧集, U 开于 Y. 把这些 $W(C, U)$ 作为次基形成

的拓扑称为紧开拓扑，记为 $\mathscr{C}$. 这拓扑的基是这些 $W(C,U)$ 的有限交. 由于单点集 $\{x\}$ 是紧集，显然，紧开拓扑精于按点收敛的拓扑.

下面把由空间 X 到空间 Y 内的连续函数全体所成集赋以紧开拓扑形成函数空间记为 $\mathscr{C}(X,Y)$.

读者可能对紧开拓扑不太熟悉，可以作一些简单的练习(习题 8.20—8.24)以加深理解. 其中有些习题后面证明时要引用.

引理 8.1.12 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是正则空间当且仅当 Y 是正则空间.

证明 必要性，因 Y 同胚于 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的子空间(习题 8.23).

充分性. 要证对每一 $f\in\mathscr{C}(X,Y)$，f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的每一邻域包含着某闭邻域，就紧开拓扑 e 的次基证明已足够了.

设 $f\in W(C,U)$，C 是 X 中紧集，U 开于 Y，$W(C,U)$ 是 f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的邻域. $f\in W(C,U)\Rightarrow f(C)\subset U$，$f(C)$ 是 Y 中紧集. 因 Y 正则，存在 Y 中开集 V 使 $f(C)\subset V\subset \bar{V}\subset U$(定理 3.1.8). 从而

$$f\in W(C,U)\subset \overline{W(C,V)}^{\mathscr{C}}\subset W(C,\bar{V})\subset W(C,U).$$

$\overline{W(C,V)}^{\mathscr{C}}$ 就是所要求的包含在 $W(C,U)$ 内的闭邻域(上面第二包含式见习题 8.22，符号"$-\mathscr{C}$"表示关于紧开拓扑 $\mathscr{C}$ 的闭包). 证完.

引理 8.1.13 设 X 是正则空间，$C\subset X$ 是紧集. 则 $\mathscr{C}(X,Y)\times C\to Y$ 的赋值映射 $e:(f,x)\to f(x)$ 是连续的.

证明 设 $C\subset X$ 是紧集，$x\in C$，U 开于 Y 及 $(f,x)\in e^{-1}(U)$，这里 $f\in\mathscr{C}(X,Y)$，$(f,x)\in e^{-1}(U)\Rightarrow f(x)\in U$. 因 X 正则，C 也正则，及 f 连续，存在 x 在 C 中的闭邻域 N 使 $f(N)\subset U$，即 $f\in W(N,U)$. N 是紧集，$W(N,U)$ 是 f 在 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的邻域，$W(N,U)\times N$ 是 (f,x) 在 $\mathscr{C}(X,Y)\times C$ 中的邻域且包含于 $e^{-1}(U)$. 所以 $e:(f,x)\to f(x)$ 连续. 证完.

下文要用如下符号：对 $\mathscr{F}\subset\mathscr{C}(X,Y)$ 及 $A\subset X$，记 $\mathscr{F}(A)=\{f(x):f\in\mathscr{F}$ 及 $x\in A\}$.

引理 8.1.14 设 $x_n \to x$ 及 $K(\{x\}) \subset U$，则对充分大的 n，$K(\{x_n\}) \subset U$，这里 $K \subset \mathscr{C}(X, Y)$ 是紧集，U 开于 Y.

证明 如不然，存在 $f_n \in K$，使 $f_n(x_n) \notin U$，K 紧，$\{f_n\}$ 有聚点 $f \in K$. 令 $C = \{x\} \cup \{x_n : n \in N\}$，$C$ 是紧集. 由于 $f(x) \in U$，与引理 8.1.13 所证明的赋值映射 $e : (f, x) \to f(x)$ 的连续性矛盾. 证完.

定理 8.1.15 (Michael[1966]) 设空间 X、空间 Y 都是 $\aleph_0$ 空间，则 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间.

证明 首先由引理 8.1.12 知 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是正则空间. 下面通过三个断言证明这定理 $\mathscr{C}(X, Y)$ 具有可数 k 网.

断言 1. 空间 X 可以设为可分度量空间.

设 X 为 $\aleph_0$ 空间，由定理 8.1.9，存在可分度量空间 N 及紧覆盖映射 $f : N \to X$ 使 X 中每一紧集是 N 中某一紧集的象. 定义映射：

$$\Phi : \mathscr{C}(X, Y) \to \mathscr{C}(N, Y)$$

使 $\Phi(g) = g \circ f$，不难验证 Φ 是到它的值域上的同胚映射. 所以，如果 $\mathscr{C}(N, Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间，它的任何子空间是 $\aleph_0$ 空间(定理 8.1.3)，从而 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间，到此证明了断言 1.

对 $A \subset X$ 及 $B \subset Y$，令 $W(A, B) = \{f \in \mathscr{C}(X, Y) : f(A) \subset B\}$. 设 $\mathscr{B}$ 是 X 的可数基，$\mathscr{Q}$ 是 Y 的可数 k 网，它们都关于有限交封闭，置

$$\mathscr{P} = \{W(B, Q) : B \in \mathscr{B}, Q \in \mathscr{Q}\}.$$

断言 2. 设 $K \subset W(C, U)$，这里 K 是 $\mathscr{C}(X, Y)$ 中紧集，C 是 X 中紧集及 U 开于 Y，则存在 $P \in \mathscr{P}$，使 $K \subset P \subset W(C, U)$.

为了证明断言 2，只要找到 X 中开集 $V \subset C$ 及 $Q \in \mathscr{Q}$ 使 $K(V) \subset Q \subset U$. 在这情况下，对每一 $B \in \mathscr{B}$ 之满足 $C \subset B \subset U$ 者就有 $K \subset W(B, Q) \subset W(C, U)$. 断言 2 可得证.

对 $Q \in \mathscr{Q}$ 之满足 $Q \subset U$ 者排列为 $\{Q_n\}$. 如果没有这样的 V 及 Q 存在，则存在 $x_n \in X$ 使 $d(x_n, C) < 1/2^n$，这里 d 是 X 上的某度量，及 $f_n \in K$ 使 $f_n(x_n) \notin \bigcup_{i \leqslant n} Q_i$ ($\mathscr{Q}$ 关于有限并封闭). 不失

一般性,可作为 $x_n \to x \in C$.

由于 $K \subset W(C,U)$,则有 $K(\{x\}) \subset U$,由引理 8.1.14,对充分大的 n,$K(\{x_n\}) \subset U$. 令 $A = \{x\} \cup \{x_n : K(\{x_n\}) \subset U\}$ 则 A 是紧集,且 $K(A) \subset U$. 由引理 8.1.13,$K(A)$ 是紧集,所以 $K(A) \subset Q \subset U$ 对某些 $Q \in \mathscr{Q}$ 成立. 按 Q 应是某 Q_m,所以 $K(A) \subset Q$ 与 $f_n(x_n) \notin Q$ 在 $n \geqslant m$ 时矛盾,到此证明了断言 2.

下面的断言 3 完成定理 8.1.15 的证明.

断言 3. 设 $\mathscr{P}$ 如断言 2 所设,则 $\mathscr{P}$ 的元的有限交所成集族 $\hat{\mathscr{P}}$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的 k－网(这 k－网显然是可数的).

设 $\mathscr{W}$ 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的基,是所有次基 $W(C,U)$ 的有限交所成的集族. 由断言 2 易知:如 $K \subset W \in \mathscr{W}$,这里 K 是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 的紧集,则有 $\hat{P} \in \hat{\mathscr{P}}$ 使 $K \subset \hat{P} \subset W$. 断言 3 的证明可由下述易证的事实得证(注意 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是正则的).

如 $H \subset U$,H,U 分别是 $\mathscr{C}(X,Y)$ 中的紧集、开集,则 H 为有限个闭集(从而是紧集)覆盖,这些闭紧集包含在某些 $W \in \mathscr{W}$ 而 $W \subset U$. 证完.

§2. $\aleph$ 空 间

Michael[1966]引入 $\aleph_0$ 空间用的是伪基,O'Meara[1966]引入 $\aleph$ 空间用的是 k 网(具有 σ 局部有限 k 网的正则空间称为 $\aleph$ 空间),这里的 σ 局部有限 k 网不能换成 σ 局部有限伪基. 林寿[1988c]曾证明:具有点可数(从而 σ 局部有限)伪基的 T_2 空间具有可数伪基(习题 8.10),所以 $\aleph$ 空间的定义中如把 k 网换为伪基,则得到的是 $\aleph_0$ 空间.

由于基是 k 网,k 网是网络,所以度量空间是 $\aleph$ 空间,$\aleph$ 空间是 σ 空间,从而是半层空间、次仿紧的完备的且具有 G_δ 对角线(从而具有 G_δ^* 对角线).

定理 8.2.1 $\aleph$ 空间是遗传的、可数可积的;且 T_2 仿紧 $\aleph$ 空

间的可数积是 T_2 仿紧$\aleph$空间.

证明 遗传性、可数可积性情况同$\aleph_0$空间(定理 8.1.3). 至于 T_2 仿紧$\aleph$空间的可数积的仿紧性可由定理 7.3.11 得到,因为$\aleph$空间是 σ 空间. 证完.

定义 8.2.2 空间 X 的有序集对(F_1, F_2)所成族 $\mathscr{F}=\{(F_1, F_2)\}$,这里 F_1 是闭集且 $F_1 \subset F_2$,称为**对 k 网**(pair k network),如果对 X 的紧集K 及开集$U \supset K$,存在 $\mathscr{F}$中有限个元(集对)$(F_1^{(i)}, F_2^{(i)})$, $i \leqslant n$ 使 $K \subset \bigcup_{i=1}^n F_1^{(i)} \subset \bigcup_{i=1}^n F_2^{(i)} \subset U$. $\mathscr{F}$称为**垫状的**,如果对任何 $\mathscr{F}' \subset \mathscr{F}$.

$$\overline{\bigcup \{F_1:(F_1, F_2) \in \mathscr{F}'\}} \subset \bigcup \{F_2:(F_1, F_2) \in \mathscr{F}'\}.$$

定理 8.2.3 (高国士[1986b]) 空间 X 是k 半层空间当且仅当X 具有σ 垫状对k 网.

证明 设$(X, \mathscr{T})$是 k 半层空间, $U \to U_n$ 是 X 上的半层对应,且对任一紧集 $K \subset$开集 U,存在 $n \in N$ 使$K \subset U_n$(定义 7.5.8). 置

$$\mathscr{F}_n = \{(U_n, U): U \in \mathscr{T}\}, \quad \mathscr{F} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{F}_n,$$

这里 U_n 是闭集,对紧集 K 及开集 $U \supset K$,存在 $n \in N$, $(U_n, U) \in \mathscr{F}_n$ 使$K \subset U_n \subset U$. 所以 $\mathscr{F}$是对 k 网,对每一 $n \in N$,任一 $\mathscr{F}_n' \subset \mathscr{F}_n$,置

$$V = \bigcup \{U:(U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\}.$$

$U \subset V \Rightarrow U_n \subset V_n$. 所以

$$\bigcup \{U_n:(U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\} \subset V_n,$$

V_n 是闭集. 所以

$$\overline{\bigcup \{U_n:(U_n, U) \in \mathscr{F}_n\}} \subset V_n \subset V = \bigcup \{U:(U_n, U) \in \mathscr{F}'_n\}.$$

到此证明了每一 $\mathscr{F}_n$ 是垫状的, $\mathscr{F}=\bigcup_{n \in N} \mathscr{F}_n$ 是σ 垫状对k 网.

相反地,设空间$(X, \mathscr{T})$具有 σ 垫状对k 网 $\mathscr{F}=\bigcup_{n \in N} \mathscr{F}_n$, $\mathscr{F}_n = \{(F_1, F_2)\}$是垫状的,这里 F_1 是闭集, $F_1 \subset F_2$,对 $n \in N$, $U \in \mathscr{T}$,置

$$U_n = \overline{\bigcup \{F_1:(F_1, F_2) \in \mathscr{F}_n, F_2 \in U\}}. \tag{1}$$

U_n 是闭集,因 $\mathscr{F}_n$ 是垫状的,

$$U_n \subset \bigcup \{F_2:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_n, F_2\subset U\}\subset U.$$

对每一 $x\in X$,单点集 $\{x\}$ 是紧的,由对 k 网的定义,存在 $m\in N$ 及 $(F_1,F_2)\in\mathscr{F}_n$ 使 $x\in F_1\subset F_2\subset U$. 由(1)式知 $x\in U_m$,所以 $U=\bigcup_{n\in N}U_n$. 此外,由(1)知当 $U\subset V$ 时有 $U_n\subset V_n$, $(n\in N)$. 到此证明了 $U\to U_n$ 是 X 上的半层对应. 下证更是 k 半层对应.

不失一般性,可设 $\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}(n\in N)$,设紧集 $K\subset$ 开集 U. 由对 k 网的定义,存在 $n_0\in N$ 及有限子族 $\mathscr{F}'_{n_0}\subset\mathscr{F}_{n_0}$ 使

$$K\subset\bigcup\{F_1:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}'_{n_0}\}\subset\bigcup\{F_2:(F_1,F_2)\in\mathscr{F}'_{n_0}\}\subset U.$$

由(1),$K\subset U_{n_0}$,所以 $U\to U_{n_0}$ 是 k 半层对应,X 是 k 半层空间. 证完.

推论 8.2.4 (Lutzer[1971]) $\aleph$ 空间是 k 半层空间.

证明 因局部有限 k 网 $\Rightarrow$ 闭包保持 k 网 $\Rightarrow$ 垫状对 k 网. 证完.

下面利用 k 半层空间的新刻画(定理 8.2.3)证明 Fréchet 的 k 半层空间是单调正规的,从而是层空间,改进了前面 Lutzer 的结果:"第一可数的 k 半层空间是层空间"(定理 7.5.10 的前半),因第一可数性 $\Rightarrow$ Fréchet. 空间 X 称为 Fréchet 的,如果 $x\in\bar{A}$,则存在序列 $\{x_n\}\subset A$ 使 $x_n\to x$. 参见定理 2.3.2 后的 $*$).

定理 8.2.5 (林寿[1988a]) Fréchet 的 k 半层空间是层空间.

证明 空间 X 是层空间当且仅当 X 是半层空间和单调正规空间(定理 7.5.15),而 k 半层空间是半层空间,所以只要证明 Fréchet 的 k 半层空间是单调正规的.

由定理 8.2.3,设 k 半层空间 X 具有 σ 垫状对 k 网 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$,每一 $\mathscr{F}_n$ 是垫状的. 设 H,K 是一对不相交的闭集,置

$$U_n=\bigcup\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant n}\mathscr{F}_i, F_2\cap K=\varnothing\}\setminus \bigcup\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant n}\mathscr{F}_i, F_2\cap H=\varnothing\} \tag{2}$$

及 $D(H,K)=(\bigcup_{n\in N}U_n)^{\circ}$. 下证 D 是 X 上的单调正规算子(定

义 7.5.14).

显然,如 $H\subset H'$, $K\supset K'$, H', K' 是不相交的闭集,则由(2)知 $D(H,K)\subset D(H',K')$.

证 $H\subset D(H,K)$. 如不然, $H\not\subset D(H,K)$. 则存在

$$x\in H\setminus(D(H,K)\cup K)=H\setminus((\bigcup_{i\in N}U_i)^\circ\cup K)$$
$$\subset\overline{(X\setminus K)\cap(X\setminus\bigcup_{i\in N}U_i)}\cap H$$
$$=\overline{X\setminus(K\cup(\bigcup_{i\in N}U_i))}\cap H.$$

因 X 是 Fréchet 空间,存在序列 $\{x_n\}\subset X\setminus(K\cup(\bigcup_{i\in N}U_i)$ 使 $x_n\to x$. 所以 X 的紧子集 $\{x\}\cup\{x_n\}_{n\in N}\subset X\setminus K$(开集),因 $\mathscr{F}$ 是对 k 网,存在 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$ 中有限个元: $(F_1^{(i)},F_2^{(i)})(i\leqslant m)$ 使
$\{x\}\cup\{x_n\}_{n\in N}\subset\bigcup_{i\leqslant m}F_1^{(i)}\subset\bigcup_{i\leqslant m}F_2^{(i)}\subset X\setminus K$. 从而存在 $i_0\leqslant m$ 及 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$ 使

$$\{x_{n_j}\}\subset F_1^{(i_0)}\subset F_2^{(i_0)}\subset X\setminus K. \tag{3}$$

从而 $F_2^{(i_0)}\cap K=\varnothing$. 另一方面,存在 $k\in N$, 使 $(F_1^{(i_0)},F_2^{(i_0)})\in\mathscr{F}_k$. 因为 $x\in H$, 所以

$$x\in X\setminus\bigcup\{F_2:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,F_2\cap H=\varnothing\}$$
$$\subset X\setminus\overline{\bigcup F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,F_2\cap H=\varnothing\}}.$$

因而存在 $n_0\in N$, 当 $j\geqslant n_0$ 时

$$x_{n_j}\in X\setminus\overline{\bigcup\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,F_2\cap H=\varnothing\}}$$
$$\subset X\setminus\bigcup\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,F_2\cap H=\varnothing\}.$$

这时,结合(3),由(2)式得

$$x_{n_j}\in F_1^{(i_0)}\setminus\bigcup\{F_1:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant k}\mathscr{F}_i,$$
$$F_2\cap H=\varnothing\}\subset U_k.$$

于是 U_k 含有无限个 x_n, 这与 $\{x_n\}$ 的取法矛盾. 所以 $H\subset D(H,K)$.

证 $\overline{D(H,K)}\subset X\setminus K$. (下面证明的思路,步骤类似前证,略去较烦的推导细节). 如不然, $\overline{D(H,K)}\not\subset X\setminus K$, 则存在

$$x\in\overline{D(H,K)}\cap K\cap(X\setminus H)\subset\overline{D(H,K)\setminus H}\cap K.$$

所以有 X 中的序列 $\{x_n\}\subset(\bigcup_{i\in N}U_i)^\circ\setminus H$ 使 $x_n\to x$. 于是存在 $\{x_n\}$ 的子序列 $\{x_{n_j}\}$ 及 $(F_1',F_2')\in\mathscr{F}_n$ 使 $x_{n_j}\in F_1', F_2'\cap H=\varnothing, j\in N$. 因而 $U_k\subset X\setminus F_1', (k\geqslant m)$. 所以当 $k\geqslant m$ 时, $x_{n_j}\notin U_k$. 故 $x_{n_j}\in\bigcup_{i<m}U_i$. 于是 $x\in\overline{\bigcup_{i<m}U_i}=\bigcup_{i<m}\overline{U_i}$. 从而存在 $i_0<m$, 使

$$x\in\overline{U_{i_0}}\subset\bigcup\{F_2:(F_1,F_2)\in\bigcup_{i\leqslant i_0}\mathscr{F}_i,$$
$$F_2\cap K=\varnothing\}\subset X\setminus K.$$

这与 $x\in K$ 矛盾. 所以 $\overline{D(H,K)}\subset X\setminus K$, X 是单调正规空间. 证完.

推论 8.2.6 (林寿[1988a]) 设 X 是 Fréchet 空间, 则 X 具有 σ 闭包保持 k 网当且仅当 X 是 k 半层空间.

证明 因 $M_3=M_2$, M_2 空间具有闭包保持 k 网, 由定理 8.2.3, 8.2.5 得证.

推论 8.2.7 (Foged, 见 Gruenhage[1984]) Fréchet 的$\aleph$空间是层空间.

证明 由推论 8.2.4 及定理 8.2.6 得证. 证完.

关于$\aleph$空间的度量化定理有下述 O'Meara[1970]定理: "正则空间 X 可度量化当且仅当 X 是 r 空间且具有 σ 局部有限 k 网."

这里作为 Foged 定理(定理 8.4.4)的推论(推论 8.4.6)得出, 不另行证明.

r 空间的定义见定理 8.1.7 后. 由于第一可数性、局部紧性均蕴含 r 空间, 故有: "第一可数的(或局部紧的)$\aleph$-空间可度量化."

$\aleph_0$ 空间的函数空间的定理(定理 8.1.15)是非常巧妙的, 定理的表述很容易: "设 X, Y 都是 $\aleph_0$ 空间, 则 $\mathscr{C}(X,Y)$ 是 $\aleph_0$ 空间." 当引入$\aleph$空间后, 学者们很想把这定理推广到$\aleph$空间.

注意 $\aleph_0$ 空间的特大优点是由于它是可分度量空间在紧覆盖映射下的象(定理 8.1.9). 因此在定理 8.1.15 的证明中可把 X 取作可分度量空间. 借助于这一优点, 在推广定理 8.1.15 到$\aleph$空间时, 保持 X 为 $\aleph_0$ 空间是明智的, Y 取为$\aleph$空间, 期望 $\mathscr{C}(X,Y)$ 也

是$\aleph$空间. $\aleph$空间的函数空间定理即使在这样的提法下还是很难解决的.

O'Meara[1971]对 Y 加强为仿紧的$\aleph$空间得到下述定理:"设 X 是$\aleph_0$ 空间, Y 是仿紧$\aleph$空间,则 $\mathscr{C}(X,Y)$是仿紧$\aleph$空间."

这定理的证明精微而冗繁,(我们不介绍它的证法).在证明中可以看到如果 Y 上不附加仿紧性得到的结果将是σ 空间.

作者不满意自己的结果,希望能去掉空间 Y 的仿紧性假设(回到前面期望的结果),也就是能否有:"设 X 为$\aleph_0$-空间, Y 为$\aleph$-空间,则 $\mathscr{C}(X,Y)$是$\aleph$空间."

Michael[1975]重又提出这一问题.

这问题的解决是曲折的. Guthrie[1971]摹仿 k 网引入 cs 网,以收敛序列代替紧集(定义 8.3.1).类似于$\aleph$空间定义 cs-σ 空间(定义 8.3.3)等等,他想另辟蹊径并不是想解决上述问题,只是过渡得到下述定理."设 X 是$\aleph_0$ 空间, Y 是cs-σ 空间,则 $\mathscr{C}(X,Y)$是cs-σ 空间."

这是§3 中的定理 8.3.10. 恰好 Foged[1984]证明了$\aleph$空间等价于 cs-σ 空间(定理 8.3.6). 作为 Foged 定理的推论解决了上述问题(定理 8.3.11).

关于$\aleph$空间的映射定理必须在$\aleph$空间的刻画定理充分表述以后才能得到,故放在§4 末(引理 8.4.21 起). 从而由映射定理而得和定理(定理 8.4.28).

§3. cs 网与 cs-σ 空间

Guthrie[1971]引入 cs 网是把k 网中的紧集换为收敛序列连同它的聚点,记为 $Z=\{z,z_1,z_2,\cdots,z_n,\cdots\}$,这里 $z_n\to z$. 显然 Z 是紧集. 为简单起见,称 Z 为收敛序列,而记 $Z_n=\{z,z_n,z_{n+1},\cdots\}$.

定义 8.3.1 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$称为 X 上的**cs 网**(cs-network). 如果对 X 的收敛序列Z 及开集$U\supset Z$,存在 $n\in N$ 及$P\in$

$\mathscr{P}$使 $Z_n \subset P \subset U$.

cs 网与k 网(定义 8.1.1)是不同的概念,无蕴含关系.

定理 8.3.2 (Guthrie[1971]) 下列论断等价:

(i)X 是$\aleph_0$ 空间,

(ii)X 是正则空间且具有可数cs 网.

证明 (i)⇒(ii).因收敛序列是紧集,而可数 k 网可作为关于有限并封闭的.

(ii)⇒(i).先证每一点是 G_δ 集的紧空间是第一可数的.因 $\{x\}=\bigcap_{n\in N}G_n$, G_n 是开集, $\{G_n\}$是递减的,任取 $x_n\in G_n$, $x_n\to x$,所以是第一可数的.

设$\mathscr{P}$是空间 X 的可数cs 网,下证$\mathscr{P}$是 k 网,对紧集 K 及开集 $U\supset K$,置

$$\mathscr{P}'=\{P\in\mathscr{P}: P\cap K\neq\varnothing \text{ 且 } P\subset U\}.$$

$\mathscr{P}'$是可数的,设$\mathscr{P}'=\{P_n: n\in N\}$.要证存在 $n\in N$ 使 $K\subset\bigcup_{i\leqslant n}P_i$.如不然,存在 K 中的序列$\{z_n\}$使 $z_n\in K\setminus\bigcup_{i\leqslant n}P_i$.因空间 X 的每一点是G_δ 集,紧空间 K 是第一可数的,从而是序列式紧的(定理 3.5.9).所以$\{z_n\}$存在收敛子序列,不妨就作为 $z_n\to z\in K$.因$\mathscr{P}$是 cs 网,存在 $m\in N$, $P\in\mathscr{P}$使

$$Z_m=\{z, z_m, z_{m+1},\cdots\}\subset P\subset U.$$

P 应是$\mathscr{P}'$中的某一元 P_j,取 $k\geqslant\max(m,j)$,则 $x_k\in P_j$,矛盾,所以$\mathscr{P}$是 k 网.证完.

注记 上述定理(ii)⇒(i)的证法也适用于 σ 局部有限k 网及 σ 局部可数k 网情况,因为局部有限集族、局部可数集族分别是紧有限的、紧可数的(每一紧集与 k 网中可数个元相交),所以$\mathscr{P}'$仍是可数的.

定义 8.3.3 (Guthrie[1973]) 具有 σ 局部有限cs 网的正则空间称为***cs*-$\boldsymbol{\sigma}$ 空间.**

下面叙述 Foged[1984]得到的$\aleph$空间的刻画定理.

称空间 X 的子集 W 是它的子集 $F(F\subset W)$的**序列邻域**(sequential neighborhood).如果每一收敛于 F 中某一点的序列终留

于(eventually in)W.

引理 8.3.4 设空间 X 具有 σ 闭包保持闭 k 网, $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ 是离散集族,则存在互不相交的集族 $\{W_\alpha:\alpha\in A\}$,其中 W_α 是 F_α 的序列邻域($\alpha\in A$).

证明 设 $\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是空间 X 的 σ 闭包保持闭 k 网,每一 $\mathscr{P}_n$ 是闭包保持的,且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}(n\in N)$. 对 $n\in N$ 及 $B\subset A$,置

$$T(n,B)=\bigcup\{P\in\mathscr{P}_n:P\cap(\bigcup\{F_\alpha:\alpha\in B\})=\varnothing\}.$$

对每一 $\alpha\in A$,置

$$W_\alpha=\bigcup_{n\in N}(T(n,A\setminus\{\alpha\})\setminus T(n,\{\alpha\})).$$

不难验证这些 $W_\alpha(\alpha\in A)$ 是互不相交的. 下证 W_α 是 F_α 的序列邻域.

设有序列 $\{x_n\}_{n\in N}$, $x_n\to x\in F_\alpha$,由 $\{F_\alpha:\alpha\in A\}$ 的离散性,不妨设每一 F_α 是闭集,置

$$U=X\setminus\bigcup\{F_{\alpha'}:\alpha'\in A\setminus\{\alpha\}\}.$$

U 是包含 x 的开集, $\{x_n\}_{n\in N}$ 终留于 U,不妨设紧集($\{x_n:n\in N\}\cup\{x\}$)$\subset U$. 因 $\mathscr{P}$ 是 k 网且 $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$,存在 $n\in N$ 及 $\mathscr{P}_n$ 的有限子族 $\mathscr{P}_n'\subset\mathscr{P}_n$ 使

$$\{x_n:n\in N\}\cup\{x\}\subset\bigcup\mathscr{P}_n'\subset U.$$

因 $\bigcup\mathscr{P}_n'\subset T(n,A\setminus\{\alpha\})$,所以序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 终留于 $T(n,A\setminus\{\alpha\})$. 此外, P_n' 中元之与 F_α 不交者之并是 $T(n,\{\alpha\})$. 由 $\mathscr{P}_n$ 的闭包保持性, $T(n,\{\alpha\})$ 是闭集,与 F_α 不交. 序列 $\{x_n\}_{n\in N}$ 不能经常于(frequently in)不包含点 x 的闭集 $T(n,\{\alpha\})$. 故 $\{x_n\}_{n\in N}$ 终留于 $T(n,A\setminus\{\alpha\})\setminus T(n,\{\alpha\})\subset W_\alpha$. 证完.

引理 8.3.5 设 $\mathscr{P}$ 是 X 的点可数 k 网,且关于有限交封闭. 如果 W 是点, $x\in X$ 的序列邻域,且有序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x,则存在 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'\subset\mathscr{P}$ 使 $\{x_n\}$ 终留于 $\bigcup\mathscr{P}'\subset W$.

证明 把 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 之满足下列条件:(i) $x\in\bigcap\mathscr{P}'$,(ii) $\{x_n\}$ 终留于 $\bigcup\mathscr{P}'$ 者记作 $\{\mathscr{P}_n':n\in N\}$,这是因为 $\mathscr{P}$ 是点可数的,而 $\mathscr{P}'$ 是有限的及 $x\in\bigcap\mathscr{P}'$. 所以这种 $\mathscr{P}'$ 是可数个. 只要证明这可数

个 $\mathscr{P}'$ 中必有能满足 $\bigcup\mathscr{P}'\subset W$ 者.

如不然,对任何 n 都有 $\bigcup\mathscr{P}'_n\setminus W\neq\varnothing$. 由于 $\mathscr{P}$ 关于有限交封闭及条件(i),(ii)可设 $\bigcap_{i\leqslant n}(\bigcup\mathscr{P}'_n)\setminus W\neq\varnothing$,($n\in N$),取

$$y_n\in\bigcap_{i\leqslant n}(\bigcup\mathscr{P}'_i)\setminus W,\qquad n\in N.$$

下证 $y_n\to x$.

设 U 是 x 的任一开邻域,因 $\mathscr{P}$ 是 k 网,可以找到 $\mathscr{P}$ 的某有限子族 $\mathscr{P}'_m$ 使 $\{y_n:n\geqslant m\}\subset\bigcup\mathscr{P}'_m\subset U$. 从而 $\{y_n\}$ 终留于 U,$\{y_n\}$ 收敛于 x. 这与 W 是 x 的序列邻域矛盾. 证完.

定理 8.3.6 (Foged[1984]) 设 X 是正则空间,则下列论断等价:

(i) X 具有 σ 离散 cs 网,

(ii) X 具有 σ 离散 k 网,

(iii) X 具有 σ 局部有限 cs 网,(在正则情况下是 cs-σ 空间),

(iv) X 具有 σ 局部有限 k 网,(在正则情况下是 $\aleph$ 空间).

证明 显然,(i)⇒(iii),(ii)⇒(iv),由前 Guthrie 定理(定理 8.3.2)的证明方法(参见这定理后的注记)可证(i)⇒(ii)及(iii)⇒(iv),这里只要证明(iv)⇒(i).

设 X 是 $\aleph$ 空间,具有 σ 局部有限闭 k 网 $\mathscr{P}=\bigcup_{m\in N}\mathscr{P}_m$,每一 $\mathscr{P}_m$ 是局部有限闭集族关于有限交封闭,且 $\mathscr{P}_m\subset\mathscr{P}_{m+1}$,记 $\mathscr{P}=\{P_\alpha:\alpha\in A\}$.

对每一 $m\in N$,由于 $\mathscr{P}_m$ 的局部有限性,存在 X 的开覆盖 $\mathscr{U}_m$,使 $\mathscr{U}_m$ 的每个元仅与 $\mathscr{P}_m$ 的有限个元相交. 因 $\aleph$ 空间是次仿紧的,$\mathscr{U}_m$ 具有 σ 离散闭加细覆盖 $\bigcup_{n\in N}\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$,这里对每一 n,$\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 是离散闭集族,从而知每一 $F_\beta(\beta\in B_{m,n})$ 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中有限个元相交.

由引理 8.3.4,对每一对 (m,n),$m,n\in N$,有互不相交的集族 $\{W_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 使 W_β 是 $\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$ 中闭集 F_β 的序列邻域.

对每一对 (m,n) 置

$$C_{m,n}=\{\langle\alpha,\beta\rangle:P_\alpha\in\mathscr{P}_m,\beta\in B_{m,n},P_\alpha\cap F_\beta\neq\varnothing\}.\quad(1)$$

构造集族

$$\{P_\alpha \cap W_\beta : P_\alpha \in \mathscr{P}_m, \beta \in B_{m,n}, P_\alpha \cap F_\beta \neq \varnothing\}.$$

下面验证这集族是星有限的(star-finite),即这集中的每一元 $P_\alpha \cap W_\beta(\langle\alpha,\beta\rangle \in C_{m,n})$ 仅与集族中其它有限个元相交. 如果 $(P_\alpha \cap W_\beta) \cap (P_r \cap W_\delta) \neq \varnothing$,这里 $\langle\gamma,\delta\rangle \in C_{m,n}$,则 $W_\beta \cap W_\delta \neq \varnothing$. 由于 β,δ 都属于 $B_{m,n}$,而 $\{W_\beta : \beta \in B_{m,n}\}$ 中的元是互不相交的,这就迫使 $\beta = \delta$. 从而 $\langle\gamma,\beta\rangle \in C_{m,n}$,由(1), $P_\gamma \cap F_\beta \neq \varnothing$. 由于 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中有限个元相交, P_γ 是其中的一个,这说明只有有限对 $\langle\gamma,\delta\rangle \in C_{m,n}$ 使 $(P_\alpha \cap W_\beta) \cap (P_\gamma \cap W_\delta) \neq \varnothing$.

固定自然对 (m,n),对 $\langle\alpha,\beta\rangle \in C_{m,n}$ 及 $r \in N$,置

$$S_{(\alpha,\beta,r)} = \bigcup \{P_\alpha \cap P_\gamma : P_\gamma \in \mathscr{P}_\gamma, P_\gamma \subset W_\beta\}, \tag{2}$$

$$\mathscr{S}_{(m,n,r)} = \{S(\alpha,\beta,r) : \langle\alpha,\beta\rangle \in C_{m,n}\}.$$

由于 $S_{(\alpha,\beta,\gamma)} \subset P_\alpha \cap W_\beta$,而 $\{P_\alpha \cap W_\beta : \langle\alpha,\beta\rangle \in C_{m,n}\}$ 是星有限的,所以对每一 $r \in N$, $\mathscr{S}_{(m,n,r)}$ 也是星有限的. 此外, $\mathscr{S}_{(m,n,r)}$ 的元是局部有限族 $\{P_\alpha \cap P_\gamma : P_\alpha \in \mathscr{P}_m, P_\gamma \in \mathscr{P}_r\}$ 的子族的并, $\mathscr{S}_{(m,n,r)}$ 是闭包保持的. 按星有限集族是 σ 互不交集族,而互不相交的闭包保持闭集族是离散的. 所以 $\mathscr{S}_{(m,n,r)}$ 是 σ 离散的, $\mathscr{S} = \bigcup\{\mathscr{S}_{(m,n,r)} : m,n,r \in N\}$ 也是 σ 离散的,可以记作: $\mathscr{S} = \bigcup_{k \in N} \mathscr{S}_k$,每一 $\mathscr{S}_k$ 是离散闭集族,且当 $j \neq k$ 时, $\mathscr{S}_j \cap \mathscr{S}_k = \varnothing$. 置

$$\mathbb{F} = \{\mathscr{F} : \mathscr{F} \text{是} \mathscr{S} \text{的有限子族}, \bigcap \mathscr{F} \neq \varnothing\}. \tag{3}$$

作为 $\mathscr{S}$ 的有限子族,由于 $\mathscr{S}_j \cap \mathscr{S}_k = \varnothing (j \neq k)$, $\mathscr{F}$ 的元(闭集)可能分属于不同的 $\mathscr{S}_k$,设 Φ 是自然数集的有限子集,置

$$\mathbb{F}_\Phi = \{\mathscr{F} \in \mathbb{F} : \{k \in N : \mathscr{F} \cap \mathscr{S}_k \neq \varnothing\} = \Phi\}.$$

注意 $\mathbb{F}$ 中的元 $\mathscr{F}$(集族)至多包含在一个 $\mathscr{S}_k$ 内,因这些 $\mathscr{S}_k$ 是互不相交的.

对给定的 Φ,考察集族 $\{\bigcap \mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathbb{F}_\Phi\}$,这是局部有限的,因为它包含于局部有限集族 $\bigcup_{k \in \Phi} \mathscr{S}_k$ 的有限交, $\{\bigcap \mathscr{F} : \mathscr{F} \in \mathbb{F}_\Phi\}$ 又是互不相交的,如 $\mathscr{F}_1 \neq \mathscr{F}_2$, $\mathscr{F}_1, \mathscr{F}_2$ 都是 $\mathbb{F}_\Phi$ 的元,则对某些 $k \in \Phi$, $\mathscr{F}_1 \cap \mathscr{S}_k \neq \mathscr{F}_2 \cap \mathscr{S}_k$. 如设 $\{S_1\} = \mathscr{F}_1 \cap \mathscr{S}_k$, $\{S_2\} = \mathscr{F}_2 \cap \mathscr{S}_k$,则 $S_1 \neq S_2$,由 $\mathscr{S}_k$ 的

互不相交性使 $S_1\cap S_2=\varnothing$，从而$(\cap\mathscr{F}_1)\cap(\cap\mathscr{F}_2)=\varnothing$. 所以$\{\cap\mathscr{F}:\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi\}$是互不相交的局部有限闭集族. 从而是离散闭集族. 由引理 8.3.4，有互不相交的序列邻域族$\{V(\mathscr{F}):\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi\}$使每一 $V(\mathscr{F})$ 是$\cap\mathscr{F}$的序列邻域，对每一 $j\in N$ 及$\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi$，置

$$V(\mathscr{F},j)=\{S\cap P_\delta:S\in\mathscr{F},P_\delta\in\mathscr{P}_j,P_\delta\subset V(\mathscr{F})\},$$

这里 $V(\mathscr{F},j)\subset V(\mathscr{F})$. 所以对固定的 $j\in N$，集族

$$\mathscr{V}(\Phi,j)=\{V(\mathscr{F},j):\mathscr{F}\in\mathbb{F}_\Phi\}$$

是互不相交的. 此外，每一 $V(\mathscr{F},j)\in\mathscr{V}(\Phi,j)$是局部有限的闭集族，$\{S\cap P_\delta:S\in\bigcup_{k\in\Phi}\mathscr{S}_k,P_\delta\in\mathscr{P}_j\}$的某一子族的并. 所以

$$\mathscr{V}=\{V(\mathscr{F},j):\mathscr{F}\in\mathbb{F},j\in N\}$$

$$=\bigcup\{\mathscr{V}(\Phi,j):\Phi\text{ 是 }N\text{ 的有限子集},j\in N\}$$

是 σ 离散的. 下面验证 $\mathscr{V}$是 X 的cs 网.

设 U 是开集，序列$\{x_n\}$收敛于 $x\in U$. 因 $\mathscr{P}$是 X 的k 网，存在 $m\in N$ 及 $\mathscr{P}_m$ 的有限子族 $\mathscr{P}'_m$使$\bigcup\mathscr{P}'_m\subset U$，$\{x_n\}$终留于$\bigcup\mathscr{P}'_m$. 由于 $\mathscr{P}$的元是闭集，可以选取 $\mathscr{P}'_m$使$x\in\bigcap\mathscr{P}'_m$.

因$\bigcup_{n\in N}\{F_\beta:\beta\in B_{m,n}\}$是 X 的覆盖，存在 $n\in N$ 及$\beta\in B_{m,n}$ 使$x\in F_\beta$，W_β 是 F_β 的序列邻域，也是 x 的序列邻域. 由引理 8.3.5，存在 $r\in N$ 及P_r 的有限子族 $\mathscr{P}'_r$使$\bigcup\mathscr{P}'_r\subset W_\beta$ 及$\{x_n\}$终留于$\bigcup\mathscr{P}'_r$. 由于 $\mathscr{P}$的元是闭集，所以 $x\in\bigcup\mathscr{P}'_r$.

如 $P_\alpha\in\mathscr{P}'_m$，则 $x\in P_\alpha\cap F_\beta$，由(1)，$\langle\alpha,\beta\rangle\in C_{m,n}$. 如更有 $P_\gamma\in\mathscr{P}'_r$，则 $P_\gamma\in\mathscr{P}_r$ 及$P_\gamma\subset W_\beta$. 由(2)，$P_\alpha\cap P_\gamma\subset S(\alpha,\beta,r)$，由此知

$$(\bigcup\mathscr{P}'_m)\cap(\bigcup\mathscr{P}'_r)\subset\bigcup\{S(\alpha,\beta,r):P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}.$$

由于 $x\in\bigcup\mathscr{P}'_r$，存在一 γ 使$x\in P_\gamma\in\mathscr{P}'_r$，$P_\gamma\subset W_\beta$，而 $x\in P_\alpha$，由(2)

$$x\in\bigcap\{S(\alpha,\beta,\gamma):P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}.$$

设 $\mathscr{F}=\{S(\alpha,\beta,r):P_\alpha\in\mathscr{P}'_m\}$(是 $\mathscr{S}$的有限子族). 由上述讨论知$\{x_n\}$终留于$\bigcup\mathscr{F}$(因$\{x_n\}$终留于$(\bigcup\mathscr{P}'_n)\cap(\bigcup\mathscr{P}'_r)$)及$\bigcap\mathscr{F}\neq\varnothing$(因 $x\in\bigcap\mathscr{F}$). 由(3)知 $\mathscr{F}\in\mathbb{F}$.

前面已证 $V(\mathscr{F})$是$\cap\mathscr{F}$的序列邻域，那也是 x 的序列邻域，由

引理 8.3.5,存在 $j \in N$ 及 $\mathscr{P}_j$ 的有限子族 $\mathscr{P}_j'$ 使 $\bigcup \mathscr{P}_j' \subset \mathscr{V}(\mathscr{F})$ 且 $\{x_n\}$ 终留于 $\bigcup \mathscr{P}_j'$.

如 $P_\delta \in \mathscr{P}_j'$,则 $P_\delta \in \mathscr{P}_j$ 及 $P_\delta \subset V(\mathscr{F})$. 所以对任一 $S \in \mathscr{F}$,有 $S \cap P_\delta \subset V(\mathscr{F}, j)$,由(4),$(\bigcup \mathscr{F}) \cap (\bigcup \mathscr{P}_j') \subset V(\mathscr{F}, j)$. 从而 $\{x_n\}$ 终留于 $V(\mathscr{F}, j)$. 此外,由(4),(2)

$$V(\mathscr{F}, j) \subset \bigcup \mathscr{F} = \bigcup \{S(\alpha, \beta, r): P_\alpha \in \mathscr{P}'_m\} \subset \bigcup \mathscr{P}'_m \subset U.$$

所以 $\mathscr{V}$ 是 X 的 cs 网. 证完.

推论 8.3.7 设空间 X 是正则空间,则下列论断等价:

(i) X 是 $\aleph$ 空间,

(ii) X 具有点可数且 σ 闭包保持闭 k 网,

(iii) X 具有点可数且 σ 闭包保持闭 cs 网,

(iv) X 具有局部可数且闭包保持闭 k 网,

(v) X 具有 σ 局部可数且闭包保持闭 cs 网.

证明 由于点可数的闭包保持闭集族是局部可数的,所以(ii) = (iv),(iii) = (v) 用定理 8.3.2(ii)⇒(i) 的证法可得(v)⇒(iv)(参见这定理的注记),(i)⇒(iv) 显然. 要证的是(iv)⇒(i),这可利用定理 8.3.6 的证法证明:如 X 具有 σ 局部可数闭包保持 k 网,则 X 具有 σ 离散 cs 网,从而得(iv)⇒(i)及(iv)⇒(v). 定理得证.

在定理 8.3.6 的证明中,对应着局部可数闭包保持集族 $\mathscr{P}_m$ 的开覆盖 $\mathscr{U}_m$ 的每一元,从而 $\mathscr{U}_m$ 的加细闭覆盖 $\bigcup_{n \in N} \{F_\beta: \beta \in B_{m,n}\}$ 的每一元 F_β 仅与 $\mathscr{P}_m$ 中可数个元相交,从而导致(1)式后的集族是**星可数的**(star-countable),但星可数集族(同星有限集族一样)是 σ 互不相交的,至于证明中用到的引理 8.3.4 在目前情况仍可引用. 在引用引理 8.3.5 时,要求相应集族关于有限交封闭. 容易证明局部可数且闭包保持闭集族关于有限交封闭(见习题 8.12). 此后,同法构造 σ 离散 cs 网. 证完.

现在回到 §2 末的 $\aleph$ 空间的函数空间定理,这里紧接着 Guthrie 定义的 cs-σ 空间(定义 8.3.3)谈起. 我们将证明 Guthrie 的重要结果(定理 8.3.10). 由此定理并结合 Foged 定理(定理 8.3.6)解决 O'Meara 及 Michael 提出的问题.

引理 8.3.8 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的子集族,关于有限交封闭,则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 网.如果 Z 是收敛序列,S 是 X 的次基中的元(开集)使 $Z \subset S$,则存在 $n \in N$,$P \in \mathscr{P}$ 使 $Z_n \subset P \subset S$.

证明 设 $Z \subset U$,Z 是收敛序列,收敛于 z,U 是 X 中开集,存在 X 的基中的元 B 使 $z \in B \subset U$.从而存在 X 的次基中的元:$S_1, \cdots, S_k$,使 $B = \bigcap_{i \leqslant k} S_i$,对每一 i,$z \in S_i$,存在 $n(i) \in N$ 及 $P_i \in \mathscr{P}$ 使 $Z_{n(i)} \subset P_i \subset S_i$,$1 \leqslant i \leqslant k$.置 $Z_n = \bigcap_{i \leqslant k} Z_{n(i)}$,$P = \bigcap_{i \leqslant k} P_i$,则 $Z_n \subset P \subset B \subset U$.所以 $\mathscr{P}$ 是 X 的 cs 网.证完.

引理 8.3.9 设 X 是 k 空间,Y 是正则空间,K 是 $\mathscr{C}(X, Y)$ 中的紧集.定义 $\phi(x) = \{f(x): f \in K\}$.则 $\{x \in X: \phi(x) \subset V\}$ 是 X 中开集.这里 V 是 Y 中开集.

证明 设 $C \subset X$ 是 X 中任一紧集.置 $\phi_C = \phi|_C$(先把 $\phi(x)$ 限制在 X 的紧集 C 上作出证明,然后推广到 X 上).要证 $\{x \in C: \phi_C(x) \subset V\}$ 是 C 中开集,需要证:如果 $x \in C$ 及 $\phi(x) \subset V$,则 x 具有 C 中的邻域 U 使对每一 $z \in U$,$\phi(z) \subset V$.对每一 $f \in K$,由引理 8.1.13 可找到 x 在 C 中的邻域 U_f 及 f 在 $\mathscr{C}(X, Y)$ 中的邻域 W_f 使对 $z \in U_f$ 及 $g \in W_f$ 有 $g(z) \in V$,紧集 K 为有限个 W_f 覆盖,取相应的有限个 U_f 的交为 U,则 U 是 x 在 C 中的邻域满足所有要求.

现在回到 $\phi(x)$,$x \in X$.设 $U = \{x \in X: \phi(x) \subset V\}$,则 $U \cap C = \{x \in C: \phi_C(x) \subset V\}$ 对 X 的每一紧集 C 成立,由前所证 $U \cap C$ 关于 C 是开的.因 X 是 k-空间,U 是开集.证完.

定理 8.3.10 (Guthrie[1973]) 设 X 是 $\aleph_0$ 空间,Y 是 cs-σ 空间,则 $\mathscr{C}(X, Y)$ 是 cs-σ 空间.

证明 定理 8.1.15 证明中的断言 1 对这里也成立(注意 cs-σ 空间的子空间也是 cs-σ 空间).所以可设 X 为可分度量空间记作 S,Y 是 cs-σ 空间,只要证明 $\mathscr{C}(S, Y)$ 是 cs-σ 空间.

设 $\mathscr{P} = \{P_i: i \in N\}$ 是可分度量空间 S 的可数基,关于有限交封闭,$\mathscr{R} = \bigcup_{j \in N} \mathscr{R}_j$ 是 cs-σ 空间 Y 的 σ 局部有限 cs 网.对 $P_i \in \mathscr{P}$ 及 $R \in \mathscr{R}_j$,记:$(P_i, R) = \{f \in \mathscr{C}(S, Y): f(P_i) \subset R\}$(定理 8.1.15 中

记作 $W(P_i, R)$). 并记 $[P_i, \mathscr{R}_j] = \{(P_i, R): R \in \mathscr{R}_j\}$, $[\mathscr{P}, \mathscr{R}] = \bigcup_{i,j \in N}[P_i, R_j]$. 下证 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]$ 是空间 $\mathscr{C}(S, Y)$ 中的 σ 局部有限族. 只要证 $[P_i, R_j]$ 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的局部有限族.

设 $f \in \mathscr{C}(S, Y)$, $x \in P_i$. 则 $f(x) \in Y$. 由于 $\mathscr{R}_j$ 在 Y 中局部有限, 存在 $f(x)$ 在 Y 中的邻域 V 至多与 $\mathscr{R}_j$ 的有限个元 R 相交. 则 (x, V) 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 次基中的元, 是包含 f 的开集, 仅与集族 $[P_i, \mathscr{R}_j]$ 中有限个元 (P_i, R) 相交, 其中 R 正好是与 V 相交者. 所以 $[P_i, \mathscr{R}_j]$ 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的局部有限族, $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]$ 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的 σ 局部有限族, 记 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]$ 中元的所有有限交所成集族为 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$, $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 仍是局部有限的. 下证 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 是空间 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的 cs 网.

由引理 8.3.8, 验证 $[\mathscr{P}, \mathscr{R}]'$ 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的 cs 网时, 仅考察 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的次基中元就足够了. 设 $F = \{f_0, f_1, f_2, \cdots\}$ 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 中元(映射)所成序列收敛于 f_0, 设 (C, U) 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 的次基中元包含着 F, F 是 $\mathscr{C}(S, Y)$ 中的紧集, S 是度量空间, 从而是 k 空间, Y 是正则空间, 由引理 8.3.9,

$$F^{-1}(U) = \{x \in S: \text{对某些 } f_i \in F, f_i(x) \in U\}$$

是 S 中开集. 显然 $F^{-1}(U) \supset C$, 置

$$\mathscr{P}' = \{P \in \mathscr{P}: P \subset f^{-1}(U)\},$$

$$\mathscr{P}(x) = \{P \in \mathscr{P}': x \in P \cap C\}, \text{对每一 } x \in C,$$

$$\mathscr{P}'(x) = \{\mathscr{P}'_i: \mathscr{P}'_i = \bigcap_{j \leqslant i} P_j, P_j \in \mathscr{P}(x)\},$$

并置

$$\mathscr{R}(x) = \{R \in \mathscr{R}: f_0(x) \in R \subset U\}.$$

显然 $\mathscr{R}(x)$ 是可数的.

下面断言: 存在一组自然数 N, i, j 使 $F_N \subset (P'_i, R_j) \subset (x, U)$. 由于对每一组 N, i, j, $x \in P'_i$ 及 $R_j \subset U$, 恒有 $(P'_i, R_j) \subset (x, U)$. 所以如果断言不成立的话, 必有 $F_N \not\subset (P'_i, R_j)$. 也就是存在某些 $n \geqslant N$ 及某些 $x_{i,j} \in P'_i$ 使 $f_n(x_{i,j}) \notin R_j$. 下面利用这一结果选取 F 的一个收敛子序列.

取 $f_{n(1)}$ 使 $f_{n(1)}(P'_1) \not\subset R_1$, 存在 $n(2) > n(1)$ 使 $f_{n(2)}(P'_2) \not\subset$

R_2.类似地,取 $f_{n(3)}$使 $n(3)>n(2)$且 $f_{n(3)}(P_3')\not\subset R_1$,及 $f_{n(4)}$使 $n(4)>n(3)$且 $f_{n(4)}(P_4')\not\subset R_2$,….注意 P_i'的下标按自然数次序,而 R_j 的下标形成序列 1,2,1,2,3,1,2,3,4,1,…从 R_1 开始依次进行到第一次出现某 R_j 为止(这 R_j 前面未出现过),然后再从 R_1 出发如法依次进行下去.

置 $f_i'=f_{n(i)}$并选取 $x_i\in P_i'$使$f_i'(x_i)$不是 R_j 的元素,这 R_j 对应着 $f_{n(i)}$及 P_i',则$\{f_i'\}$是 F 的子序列收敛于f_0,集族 $\mathscr{P}'(x)$是 S 中点x 的递减的可数邻域基,所以$\{x_i\}$收敛于 x.

紧开拓扑中的收敛使$\{f_i'(x_i)\}$收敛于 $f_0(x)$(引理 8.1.13),所以$\{f_i'(x_i)\}$除有限个外都包含在 U 内.所以存在自然数 N 及 $R_k\in\mathscr{R}(x)$使 $f_i'(x_i)\in R_k$ 对所有的$i\geqslant N$ 成立,但由于序列$\{f_i\}$及$\{x_i\}$的取法,存在某些 $m>n$ 使$f_m'(x_m)\notin R_k$.这一矛盾证明了上述断言.所以存在某些 $N(x)$, $i(x)$及 $j(x)$使 $F_{N(x)}\subset P'_{i(x)}$, $R_{j(x)})\subset(x,U)$.$\{P'_{i(x)}:x\in C\}$覆盖紧集 C.从而有有限子覆盖:$P'_{i(x_1)}, P'_{i(x_2)}, \cdots, P'_{i(x_r)}$,取 $M=\max_{1\leqslant t\leqslant r}\{N(x_t)\}$,则 $F_M\subset\bigcap_{1\leqslant t\leqslant r}(P'_{i(x_t)}, R_{j(x_t)})\subset(C,U)$.$\mathscr{C}(S,Y)$具有 σ 局部有限cs 网$[\mathscr{P},\mathscr{R}]'$,由于 Y 正则,由引理 8.1.12,$\mathscr{C}(X,Y)$正则,所以 $\mathscr{C}(S,Y)$是 cs-σ 空间.证完.

由上述 Guthrie 定理(定理 8.3.10)结合 Foged 定理(定理 8.3.6)立得如下定理,解决了 O'Meara[1971],Michael[1975]提出的问题(见§2).

定理 8.3.11 设 X 是$\aleph_0$空间,Y 是$\aleph$空间,则 $\mathscr{C}(X,Y)$的$\aleph$空间.

§4. 遗传闭包保持 k 网与 Lašnev 空间

Lašnev[1965],[1966]成功地研究了度量空间在连续闭映射下的象的性质.学者们称这象为 Lašnev 空间.下面叙述 Foged[1985]对 Lašnev 空间的著名刻画.作为 Foged 定理的推论,我们

给出 Burke-Engelking-Lutzer[1975]利用 σ 遗传闭包保持基的度量化定理.

引理 8.4.1 设 $\mathscr{P}$ 是 Fréchet 空间 X 的遗传闭包保持闭集族,则由 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 的交 $\bigcap\mathscr{P}'$ 形成的集族仍是遗传闭包保持的.

证明 如不然,存在由 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}$ 形成的族 $\{\mathscr{P}'_\alpha:\alpha\in A\}$ 及 $G_\alpha\subset\bigcap\mathscr{P}'_\alpha(\alpha\in A)$ 使 $\bigcup_{\alpha\in A}\bar{G}_\alpha$ 不是闭集. 因 X 是 Fréchet 的, 存在序列 $\{z_n:n\in N\}\subset\bigcup_{\alpha\in A}\bar{G}_\alpha$ 使 $z_n\to x\in X\setminus\bigcup_{\alpha\in A}\bar{G}_\alpha$, 可以取 $\alpha(n)\in A$ 使 $z_n\in\overline{G_{\alpha(n)}}$. 不失一般性,可作为这些 $\alpha(n)$ 是不同的,可以选取自然数序列 $\{n(m):m\in N\}$ 使

$$\mathscr{P}'_{\alpha(n(m))}\setminus\bigcup_{k<m}\mathscr{P}'_{\alpha(n(k))}\neq\varnothing.$$

取 $P_m\in\mathscr{P}'_{\alpha(n(m))}\setminus\bigcup_{k<m}\mathscr{P}'_{\alpha(n(k))}$, 则这些 P_m 是不同的, 而 $z_{n(m)}\in P_m$. 由 $\mathscr{P}$ 的遗传闭包保持性将导致 $\{z_{n(m)}:m\in N\}$ 是闭集, 这是矛盾的. 证完.

引理 8.4.2 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的遗传闭包保持集族, $\{z_n:n\in N\}$ 是 $X\setminus\{x\}$ 内的序列收敛于 x, 则存在 $m\in N$, 使 $\{z_n:n\geqslant m\}\cap P\neq\varnothing$ 仅对有限个 $P\in\mathscr{P}$ 成立.

证明 如不然,存在 $\{z_n\}$ 的子序列 $\{z_{n(m)}\}$ 及 $\mathscr{P}$ 的子族 $\{P_m:m\in N\}$ 使 $z_{n(m)}\in P_m$, $m\in N$. 由 $\mathscr{P}$ 的遗传闭包保持性将导致 $\{z_{n(m)}:m\in N\}$ 是闭集, 矛盾. 证完.

引理 8.4.3 设 X 是 T_2-Fréchet 空间, 具有 σ 遗传闭包保持 k 网 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$, $\mathscr{P}_n\subset\mathscr{P}_{n+1}$. 如果 U 是开集, 序列 $Z=\{z_n:n\in N\}$ 收敛于 $x\in U\setminus Z$, 则存在 $n\in N$ 使 Z 终留于 $\mathrm{Int}(\bigcup\{P\in\mathscr{P}_n:P\subset U\})$.

证明 对每一 $m\in N$, 置 $\mathscr{P}^*_m=\{P\in\mathscr{P}_m:P\subset U\}$, 如引理结论不成立, 可以选取 Z 的子序列 $\{z_{n(m)}:m\in N\}$ 使 $z_{n(m)}\in U\setminus\mathrm{Int}(\bigcup\mathscr{P}^*_m)=\overline{U\setminus\bigcup\mathscr{P}^*_m}$, $m\in N$. 因 X 是 Fréchet 空间, 对每一点 $z_{n(m)}$ 存在序列 $\{z^k_{n(m)}:k\in N\}\subset U\setminus\bigcup\mathscr{P}^*_m$, 使 $z^k_{n(m)}\to z_{n(m)}$, 则有 $x\in\overline{\{z^k_{n(m)}:m,k\in N\}}$. 因 X 是 Fréchet 的, 由假设 $x\notin Z$ 及 T_2 性

可以选取序列 Z' 包含于 $\{z_{n(m)}^{k}: m, k \in N\}$,使 Z' 收敛于 x, Z' 具有如下形式:

$$Z' = \{z_{n(m(i))}^{k(i)}: i \in N\},$$

且 $m(i) < m(i+1)$. 因 $x \notin Z \supset \{z_{n(m)}: m \in N\}$, Z' 中点不是 x. 因 $\mathscr{P}$ 是 k 网,存在 $m \in N$. 使 Z' 终留于 $\bigcup \mathscr{P}_m^*$,这与(当 $m(j) > m$ 时) $z_{n(m(j))}^{k(j)} \in \bigcup \setminus \bigcup \mathscr{P}_m^*$ 矛盾. 所以引理的结论成立. 证完.

定理 8.4.4 (Foged[1985]) T_2 空间 X 是 Lašnev 空间当且仅当 X 是 Fréchet 空间且具有 σ 遗传闭包保持 k 网.

证明 先证充分性. 设 Fréchet 空间 X 具有 k 网 $\mathscr{P} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{P}_n$,每一 $\mathscr{P}_n$ 是遗传闭包保持的,由引理 8.4.1,可设每一 $\mathscr{P}_n$ 关于有限交封闭. 此外,设 $\mathscr{P}_n \subset \mathscr{P}_{n+1}$, $n \in N$. 置

$$R_n(P) = P \setminus \operatorname{Int} \bigcup \{Q \in \mathscr{P}_n: P \not\subset Q\}, \tag{1}$$

$$\mathscr{R}_n = \{R_n(P): P \in \mathscr{P}_n\}. \tag{2}$$

断言 1. 设 $Z = \{z_n: n \in N\}$ 收敛于 $x \in X \setminus Z$,置

$$\mathscr{R}_n^* = \{R \in \mathscr{R}_n: R \cap Z \text{ 是无限集}\}. \tag{3}$$

如果 U 是 x 的开邻域及 Z 终留于 $\operatorname{Int} \bigcup \{P \in \mathscr{P}_n: P \subset U\}$,则 Z 终留于 $\operatorname{Int} \mathscr{R}_n^*$ 及 $\bigcup \mathscr{R}_n^* \subset \bigcup$.

证明 置

$$V = \operatorname{Itn} \bigcup \mathscr{P}_n \setminus \bigcup \{Q \in \mathscr{P}_n \cup \mathscr{R}_n: Q \cap Z \text{ 是有限集}\}. \tag{4}$$

由断言 1 的假设及(4)式右端减去部分不能为 Z 所终留,所以 Z 终留于 V,要证 Z 终留于 $\operatorname{Int} \bigcup \mathscr{R}_n^*$ 及 $\bigcup \mathscr{R}_n^* \subset U$.

先证 $V \subset \bigcup \mathscr{R}_n^*$. 从而即得 Z 终留于 $\operatorname{Int} \bigcup \mathscr{R}_n^*$. 设 $y \in V$,则 $y \in Q \in \mathscr{P}_n$. 从而 $Q \cap Z$ 是无限集. 由引理 8.4.2, $\mathscr{P}_n$ 中这样的 Q 仅有限个,所以 $\mathscr{P}_n$ 在点 y 是有限的. 置

$$P(y) = \bigcap \{Q \in \mathscr{P}_n: y \in Q\}.$$

上式右端是有限交. 由于 $\mathscr{P}_n$ 关于有限交封闭, $P(y) \in \mathscr{P}_n$,所以

$$y \notin \bigcup \{Q \in \mathscr{P}_n: P(y) \not\subset Q\}.$$

由(1),(2), $y \in R_n(P(y)) \in \mathscr{R}_n$,从而 $R_n(P(y)) \cap Z$ 是无限集. 由(3), $R_n(P(y)) \in \mathscr{R}_n^*$,所以 $y \in R_n(P(y)) \subset \bigcup \mathscr{R}_n^*$, $V \subset \bigcup \mathscr{R}_n^*$,

Z 终留于 $\mathrm{Int}\bigcup\mathscr{R}_n^*$.

下证$\bigcup\mathscr{R}_n^*\subset U$.对每一 $R_n(P)\in\mathscr{R}_n^*$,$R_n(P)\subset P$,只要集族$\{Q\in\mathscr{P}_n:Q\subset U\}$中有某些 Q 使$P\subset Q$,则可有

$$R_n(P)\subset P\subset Q\subset U.$$

从而$\bigcup\mathscr{R}_n^*\subset U$ 得证.如不然,由断言 1 的假设及(1)式,Z 终留于

$\mathrm{Int}(\bigcup\{Q\in\mathscr{P}_n:Q\subset U\})\subset\mathrm{Int}(\bigcup\{Q\in\mathscr{P}_n:P\not\subset Q\})\subset X\setminus R_n(P)$.从而 $R_n(P)\cap Z$ 是有限集,与(3)式矛盾.所以$\bigcup\mathscr{R}_n^*\subset U$.断言 1 得证.

对每一 $n\in N$,置

$$\mathscr{R}'_n=\mathscr{R}_n\cup\{X\setminus\mathrm{Int}\bigcup\mathscr{R}_n\}=\{R_\alpha:\alpha\in I_n\}$$

称 X 的子集族$\mathscr{N}$形成点 $x\in X$ 的网,如果 $x\in\bigcap\mathscr{N}$及 x 的每一邻域包含着$\mathscr{N}$的某一元.置

$M=\{\sigma=\{\sigma(n)\}\in\prod_{n\in N}I_n:\{R_\sigma(n):n\in N\}$形成某些点 $x\in X$ 的网$\}$.对指标集 $I_n(n\in N)$赋以离散拓扑,取 $I_n(n\in N)$的可数积.在此积拓扑下$\prod_{n\in N}I_n$ 是度量空间,M 是它的子空间也是度量空间.$\sigma=\{\sigma(n)\}$是序列,每一 $\sigma(n)\in I_n$,$R_{\sigma(n)}$是$\{R_\alpha:\alpha\in I_n\}$中的元,$\{R_{\sigma(n)}:n\in N\}$是集序列.定义映射 $f:M\to X$,使$f(\sigma)=x$当且仅当$\{R_{\sigma(n)}:n\in N\}$形成点 x 的网.

断言 2.$f(M)=X$.

证明 如 x 是孤立点,则$\{x\}\in$某 $\mathscr{P}_n$.由(1)式 $R_n(\{x\})=\{x\}$,如 x 不是孤立点,设 Z 是一序列包含在$X\setminus\{x\}$内而收敛于 x,取 $R_{\sigma(n)}\in\mathscr{R}_n$ 使$R_{\sigma(n)}\cap Z$ 是无限集,如可能的话就这样做,如不可能的话,可取 $R_{\sigma(n)}=X\setminus\mathrm{Int}\bigcup\mathscr{R}_n$.在任何情况下,由引理 8.4.2,$x\in R_{\sigma(n)}$,则由引理 8.4.3 及断言 1,$\{R_{\sigma(n)}:n\in N\}$形成点 x 的网,断言 2 得证.

断言 3.f 是连续的.

证明 设 U 是X 中开集,$x\in U$,有 $\sigma=\{\sigma(n):n\in N\}\in M$使$\{R_{\sigma(n)}:n\in N\}$是关于点 x 的网,所以存在 $n\in N$ 使$R_{\sigma(n)}\subset U$.取 M 中点σ 的(按积拓扑)邻域 τ,使 τ 的前n 项与σ 的前n 项相

同,即 $\tau(i)=\sigma(i), i\leqslant n$,则 $f(\tau)\subset R_{\sigma(n)}\subset U$. 断言 3 得证.

断言 4. f 是闭映射.

证明 设 F 是 M 的闭集,$Z=\{z_n: n\in N\}$ 是包含在 $f(F)$ 内的序列收敛于 $x\in X\setminus Z$. 对每一 $n\in N$,选取一 $\sigma_n\in F\cap f^{-1}(z_n)$,$\sigma_n$ 是一序列(对应着 z_n)是 M 的元. 令 $S_0=N$(自然数集). 下面对每一 $m\in N$,归纳地选取无限集 $S_m\subset S_{m-1}$ 及 $\tau(m)\in I_m$.

由引理 8.4.2,可找一 $m\in N$ 使

$$\begin{aligned}\mathscr{R}^* &= \{R\in\mathscr{R}'_m: R\cap Z \text{ 是无限集}\}\\ &= \{R\in\mathscr{R}'_m: R\cap\{z_n: n\geqslant m\}\neq\varnothing\}\end{aligned}$$

是一有限集族. 所以对 $n\geqslant m$, $R_{\sigma_n(m)}\in\mathscr{R}^*$. 然由引理 8.4.2,这种 $R_{\sigma_n(m)}$ 只能有限个. 所以这无限个 $\sigma_n(m)$ 中必有无限个是相同的,即存在无限集 $S_m\subset S_{m-1}$ 使对每一 $n\in S_m$, $\sigma_n(m)$ 是相同的. 把这相同的 $\sigma_n(m)$ 记为 $\tau(m)$,即令 $\tau(m)=\sigma_n(m)$.

下证 $\tau=\{\tau(m)\}$ 属于 $f^{-1}(x)$. 由于对每一 $m\in N$, $z_n\in R_{\sigma_n(m)}=R_{\tau(m)}$,对所有 $n\in S_m$ 成立,则有 $x\in\bigcap_{m\in N}R_{\tau(m)}$. 如 U 是X 中开集,$x\in U$,则由引理 8.4.3 及断言 1 存在 $n\in N$ 使 $R_{\tau(m)}\in\mathscr{R}_n$ 及 $\mathscr{R}_{\tau(n)}\subset U$. 所以$\{R_{\tau(n)}: n\in N\}$形成点 x 的网,从而 $f(\tau)=x$.

取 $n(m)\in S_m$ 使 $n(m)<n(m+1)$ 对每一 $m\in N$,则 $\{\sigma_{n(m)}: m\in N\}$ 收敛于 τ. 事实上,如 $m\geqslant k$,则 $n(m)\in S_k$. 所以 $\sigma_{n(m)}(k)=\tau(k)$. 这样 $\tau\in F, x\in f(F)$, $f(F)$ 是闭集. 充分性得证.

必要性是显然的,读者可自已完成. 提示如下:度量空间是 Fréchet 空间,后者为闭映射保持,局部有限集族是遗传闭包保持集族,后者为闭映射保持,定义在度量空间上的闭映射是紧覆盖映射,后者保持 k 网. 证完.

推论 8.4.5 (Guthrie) T_2 空间可度量化当且仅当 X 是第一可数的且具有 σ 遗传闭包保持 k 网.

证明 由 Hanai-Morita-Stone 定理(定理 4.4.12),第一可数

的 Lašnev 空间可度量化. 证完.

推论 8.4.6 (O'Meara[1970]) T_2 空间 X 可度量化当且仅当 X 是第一可数的且具有 σ 局部有限 k 网.

推论 8.4.7 (Burke-Engelking-Lutzer[1975]) 正则空间 X 可度量化当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持基.

证明 只要证明具有 σ 遗传闭包保持基的空间是第一可数的. 显然这空间的每一点是 G_δ 集, 即 $\{x\} = \bigcap_{n\in N} G_n$, G_n 是开集. 设 $\mathscr{P}$ 是点 x 的遗传闭包保持的邻域族. 下证 $\mathscr{P}$ 是有限的, 从而 X 是第一可数的.

设 x 是集 A 的聚点, 姑设 $\mathscr{P}$ 是可数无限的, 即 $\mathscr{P} = \{P_n : n \in N\}$. 令 $D_1 = A \cap P_1 \cap G_1$, $D_n = D_{n-1} \cap P_n \cap G_n$ $(n \geqslant 2)$, 由于 $P_1 \cap G_1$ 是 x 的邻域, x 是 $D \setminus \{x\}$ 的聚点. 然而 x 不是每一集 $D_n \setminus D_{n+1}$ $(n \in N)$ 的聚点, 从而由 $\mathscr{P}$ 的遗传闭包保持性知 x 不是

$$\bigcup \{D_n \setminus D_{n+1} : n \in N\} = D_1 \setminus \{x\}$$

的聚点, 矛盾. 所以 $\mathscr{P}$ 是有限的. 证完.

推论 8.4.8 具有可数 k 网的 T_2-Fréchet 空间是 Lašnev 空间.

在$\aleph$空间的理论方面, 最显赫的是 Foged 的两个定理, 前者([1984])刻画$\aleph$空间(定理 8.3.6), 后者([1985])刻画 Lašnev 空间——度量空间的闭象(定理 8.4.4). 尽管 Burke-Engelking-Lutzer[1975]曾以 σ 遗传闭包保持基刻画度量空间, 但遗传闭包保持族引起学者浓厚兴趣是在 Foged 两定理以后, 因为是否可用 σ 遗传闭包保持 k 网刻画$\aleph$空间是受 Foged 两定理启发的必然结果. 这一问题为 Junnila-恽自求[1992]解决, 完整了这方面的理论, 这定理是继 Foged 两定理后的又一大定理.

这里要引进有趣的空间 $\boldsymbol{S\omega_1}$, 通常称为**序列扇**(Sequential fan). 取数直线 R 的子空间(在通常拓扑下) $S = \{0\} \cup \{1/n : n \in N\}$. 对每一 $\alpha < \omega_1$, S_α 是 S 的拷贝. 作拓扑和 $\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$, 把它的所有非孤立点(是一闭集)映成一点所得的商空间记作 S_{ω_1}. 拓扑和

$\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 是度量空间，商映射是闭的，所以 S_{ω_1} 是度量空间的闭象，是 Lašnev 空间. 由 Foged 定理(定理 8.4.4)知 S_{ω_1} 具有 σ 遗传闭包保持 k 网，但由下述定理 8.4.10 知 S_{ω_1} 不是$\aleph$空间.

定义 8.4.9 (高智民[1987a]) 空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$ 称为 X 的 **cs* 网**(cs^* - network)，如果对 X 的收敛序列 $Z=\{z\}\cup\{z_n:n\in N\}(z_n\to z)$ 及开集 $U\supset Z$，存在 $P\in\mathscr{P}$ 及 Z 的子序列 $Z'=\{z\}\cup\{z_{n_i}:i\in N\}$，使 $Z'\subset P\subset U$.

显然，cs 网是 cs^* 网，易知闭 k 网是 cs^* 网(习题 8.14).

定理 8.4.10 (林寿[1995]) S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网，从而不是$\aleph$空间.

证明 设 a 是 S_{ω_1} 的非孤立点，对 $\alpha<\omega_1$，令 $Y_\alpha=S_\alpha\setminus\{a\}$. 故设 S_{ω_1} 具有点可数 cs^* 网，记可数集族

$$\begin{aligned}&\{P\in\mathscr{P}:a\in P \text{ 且有无限多个 } \alpha<\omega_1 \text{ 使 } Y_\alpha\cap P\neq\varnothing\}\\ &\qquad=\{P_n:n\in N\}\end{aligned}\tag{1}$$

对每一 P_n，取 $y_n\in P_n\setminus\{a\}$，且使不同的 y_n 属于不同的 Y_α，$\{y_n:n\in N\}$ 是 S_{ω_1} 的闭集.

置 $V=S_{\omega_1}\setminus\{y_n:n\in N\}$，$V$ 是开集. 如果 $a\in P\subset V$，则 $P\cap\{y_n:n\in N\}=\varnothing$. 从而 $P\notin\{P_n:n\in N\}$，由(1)式，P 仅与有限个 Y_α 相交. 置

$$H=\bigcup\{P\in\mathscr{P}:a\in P\subset V\}.\tag{2}$$

H 是可数并，H 仅与可数个 Y_α 相交，因此存在 $\beta<\omega_1$ 使 $Y_\beta\cap H=\varnothing$.

另一方面，设 $\{x_n:n\in N\}=V\cap Y_\beta$，则 $x_n\to a$. 因 $\mathscr{P}$ 是 cs^* 网，存在子序列 $\{x_{n_i}:i\in N\}$ 及 $P\in\mathscr{P}$ 使 $\{a\}\cup\{x_{n_i}:i\in N\}\subset P\subset V$. 由(2)式，$Y_\beta\cap H\neq\varnothing$，矛盾. 故 S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网. 由于$\aleph$空间具有 σ 局部有限闭 k 网⇒点可数闭 k 网⇒点可数 cs^* 网. 所以 S_{ω_1} 不是$\aleph$空间. 证完.

定理 8.4.11 (Junnila-恽自求[1992]) 具有 σ 遗传闭包保持

k 网的正则空间 X 是$\aleph$空间当且仅当 X 不包含闭子空间同胚于 S_{ω_1}.

证明 必要性的证明是显然的,因$\aleph$空间是遗传的,而 S_{ω_1}不是$\aleph$空间(定理 8.4.10).

充分性的证明需要引入一系列的引理:

引理 8.4.12 设 X 是 T_1, σ 空间,且每一紧集是有限集,则 X 可表示为 $X=\bigcup_{n\in N}X_n$ 使每一 X_n 是离散闭子集.

证明 设 $\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$ 是 X 的 σ 局部有限网络且关于有限交封闭的,令 $X_n=\{x\in X:\{x\}\in\mathscr{F}_n\}$. 则 X_n 是离散闭集. 因 $\mathscr{F}$ 是点可数的,记 $\{F\in\mathscr{F}:x\in F\}=\{F_k:k\in N\}$, $F_k'=\bigcap_{n\leqslant k}F_n$. 则必有一 k 使 $F_k'=\{x\}$(如不然,存在不同的点所成序列 $\{x_{k_n}:n\in N\}$ 使 $x_{k_n}\in F_{k_n}'$, $x_{k_n}\neq x$, $(n\in N)$,这时无限集 $\{x_{k_n}:n\in N\}\cup\{x\}$ 是 X 的紧集). F_k'应属于某 $\mathscr{F}_n$,从而 $x\in X_n$. 证完.

引理 8.4.13 设 $\mathscr{F}$是 T_2 空间 X 的遗传闭包保持闭集族, K 是紧集,则存在 K 的有限子集 A 使 $K\setminus A\cap F\neq\varnothing$ 仅对有限个 $F\in\mathscr{F}$成立.

证明 这引理是引理 8.4.2 的一般形式,证亦类似. 证完.

注记 如置 $D=\{x\in X:|(\mathscr{F})_x|\geqslant\omega\}$,则 D 是闭集. 由上述引理知含在 D 内的紧集是有限集.

引理 8.4.14 设 T_2 空间 X 不含闭子空间同胚于 S_{ω_1}. 如果 $\mathscr{F}$ 是 X 的遗传闭包保持闭集族,则对每一 $x\in X$ 至多有可数个 $F\in\mathscr{F}$使 $F\setminus\{x\}$包含一序列收敛于 x.

证明 如不然,存在点 $a\in X$ 及 $\mathscr{F}$的不可数子族 $\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 使对每一 $\alpha<\omega_1$, $F_\alpha\setminus\{a\}$包含子集 $Y_\alpha=\{y_{\alpha,n}:n\in N\}$使 $y_{\alpha,n}\rightarrow a$. 由引理 8·4.2,不妨设 $\mathscr{F}$在每一 $y_{\alpha,n}$是点有限的. 从而 $\{F\in\mathscr{F}:F\cap Y_\alpha\neq\varnothing\}$是可数的. 所以 $\{Y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 是可数的. 从而是 σ 互不相交集族. 由 ω_1 的不可数性,存在 $\{F_\alpha:\alpha<\omega_1\}$ 的不可数子族 $\{F_{\alpha(\beta)}:\beta<\omega_1\}$使对不同的 $\beta,\beta'(\beta\neq\beta')$, $Y_{\alpha(\beta)}\cap Y_{\alpha(\beta')}=\varnothing$. 所以不妨设 $\{Y_\alpha:\alpha<\omega_1\}$是互不相交集族,由 $\mathscr{F}$ 的遗传闭包保持性, X

的闭子空间$\{a\}\cup(\bigcup_{\alpha<\omega_1}Y_\alpha)$同胚于$S_{\omega_1}$,与引理假设矛盾.证完.

引理 8.4.15 设具有σ遗传闭包保持k网$\mathscr{F}$的正则空间X不含闭子空间同胚于S_{ω_1}.设D是X的离散闭子空间,则存在X的σ离散闭子集族$\mathscr{H}$使对X中紧子集K及$d\in K\cap D$,$\{H\in\mathscr{H}:d\in \mathrm{Int}_K(K\cap H)\}$是$d$在$X$中的网.

证明 设正则空间X具有σ遗传闭包保持闭k-网$\mathscr{F}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{F}_n$,每一$\mathscr{F}_n$是遗传闭包保持的,且$\mathscr{F}_n\subset\mathscr{F}_{n+1}$.对每一$x\in X$,置

$$\mathscr{F}(x)=\{F\in\mathscr{F}:\text{存在紧集 }K\subset F\text{ 使 }x\in\overline{K\setminus\{x\}}\}.$$

由于X是σ空间(定理7.3.7),X的每一紧子集可度量化(定理7.1.4).由引理8.4.14,对每一$x\in X$,集族$\mathscr{F}(x)$是可数的.从而可以记

$$\{\bigcup\mathscr{F}':\mathscr{F}'\text{是}\mathscr{F}(x)\text{的有限子族}\}\cup\{\{x\}\}=\{F_k(x):k\in N\}.$$

对每一$d\in D$及$n\in N$,令$G_n(d)$是d的闭邻域满足

$$G_n(d)\subset X\setminus\bigcup\{F\in\mathscr{F}_n:d\notin F\}$$

并设

$$S_n(d)=\bigcup(F\in\mathscr{F}_n:F\cap D=\{d\})$$

由于每一$\mathscr{F}_n$是遗传闭包保持的,集族$\{G_n(d)\cap S_n(d):d\in D\}$是离散闭的,从而对$n,k\in N$

$$\mathscr{H}_{n,k}=\{F_k(d)\cap G_n(d)\cap S_n(d):d\in D\}$$

是离散闭的.下面证明σ离散闭集族

$$\mathscr{H}=\bigcup_{n,k\in N}\mathscr{H}_{n,k}$$

满足引理的条件.

设紧集$K\subset X$,$d\in K\cap D$,O是d在X中的邻域.设V是d的闭邻域满足$V\subset O\setminus(D\setminus\{d\})$.由于$\mathscr{F}$是$k$-网,存在$\mathscr{F}$的有限子族$\mathscr{F}'$使

$$K\cap V\subset\bigcup\mathscr{F}'\subset O\setminus(D\setminus\{x\}).$$

取$n\in N$使$\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}_n$,并取$k\in N$使$F_k(d)=\bigcup(\mathscr{F}'\cap\mathscr{F}(d))\cup\{d\}$,

则

$$d \in F_k(d) \cap G_n(d) \cap S_n(d) \subset \bigcup \mathscr{F}' \subset O.$$

下面验证

$$d \in \mathrm{Int}_K(K \cap F_k(d) \cap G_n(d) \cap S_n(d)), \tag{1}$$

以完成引理的证明.

由于 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap V) \subset \mathrm{Int}_K(K \cap \bigcup \mathscr{F}')$ 及 $\mathscr{F}$ 是覆盖 $K \cap V$ 的 X 的有限闭子族,故有 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap \bigcup(\mathscr{F}')d)$. 由于 $(\bigcup \mathscr{F}') \cap (D \setminus \{d\}) = \varnothing$,则有 $\bigcup(\mathscr{F}')_d \subset S_n(d)$. 由上所证得 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap S_n(d))$.

由于 $d \in G_n(d)^0 = \mathrm{Int}_X G_n(d)$,则有 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap G_n(d))$.

余下要证 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap F_k(d))$. 从而(1)式得证,引理得证. 对每一 $F \in \mathscr{F}$ 置

$$E_F = X \setminus \overline{F \cap K \setminus \{d\}}, E = \bigcap \{E_F : F \in \mathscr{F}' \text{ 及 } d \in E_F\}.$$

则 E 是 d 的邻域且 $\{F \in \mathscr{F}' : F \cap K \cap E \neq \varnothing\} \subset \mathscr{F}' \cap \mathscr{F}(d)$,从而

$$K \cap \bigcup \mathscr{F}' \cap E \subset \bigcup (\mathscr{F}' \cap \mathscr{F}(d)) \cup \{d\} = F_k(d).$$

由于 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap \bigcup \mathscr{F}')$ 及 $d \in E^0 = \mathrm{Int}_X E$,由上得证 $d \in \mathrm{Int}_K(K \cap F_k(d))$. 证完.

定理 8.4.11 充分性的证明. 设 $\mathscr{F} = \bigcup_{n \in N} \mathscr{F}_n$ 是正则空间 X 的闭 k 网,每一 $\mathscr{F}_n$ 是遗传闭包保持的,且 $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1}(n \in N)$. 设 X 不含闭子集同胚于 S_{ω_1},置 $D_n = \{x \in X : |(\mathscr{F})_x| \geqslant \omega\}$. 由引理 8.4.13 后的注记及引理 8.4.12, D_n 可表示为 $D_n = \bigcup_{k \in N} D_{n,k}$,对每一 $k \in N$, $D_{n,k}$ 是 X 的离散闭子集且 $D_{n,k} \subset D_{n,k+1}$. 另外,对 $n, k \in N$,设 $\mathscr{H}_{n,k}$ 是 σ 离散闭子族满足引理 8.4.15 的条件(关于 $\mathscr{H} = \mathscr{H}_{n,k}$ 及 $D = D_{n,k}$).

对每一 $n \in N$, $\mathscr{F}_n$ 是闭包保持闭集族,在 $X \setminus D_n$ 中是点有限的. 从而在 $X \setminus D_n$ 中是局部有限的. 对 $n, k \in N$,令 $S_{n,k} = \bigcup\{F \in \mathscr{F}_k : F \cap D_n = \varnothing\}$ 及 $\mathscr{F}_{n,k} = \{F \cap S_{n,k} : F \in \mathscr{F}_n\}$, $\mathscr{F}_{n,k}$ 在 X 中局部有限. 下证 σ 局部有限族

$$\mathscr{P} = (\bigcup_{n,k \in N} \mathscr{H}_{n,k}) \cup (\bigcup_{n,k \in N} \mathscr{F}_{n,k})$$

是 X 中的 k 网.

设 $K\subset O\subset X$,O 是 X 的开集,K 为紧集,存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}'$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{F}'\subset O$. 取 $n\in N$ 使 $\mathscr{F}'\subset\mathscr{F}_n$. 由引理 8.4.13 后的注记,$K\cap D_n$ 是有限集. 从而可取 $k\in N$ 使 $K\cap D_n\subset D_{n,k}$. 由引理 8.4.15,对每一 $d\in K\cap D_n$,存在集 $H_d\in\mathscr{H}_{n,k}$ 使 $d\in \mathrm{Int}_K(K\cap Hd)$ 及 $Hd\subset O$. 令 $K'=K\setminus\bigcup\{\mathrm{Int}_K(K\cap H_d):d\in K\cap D_n\}$,则 K' 是紧集及 $K'\subset X\setminus D_n$. 从而存在 $\mathscr{F}$ 的有限子族 $\mathscr{F}''$ 使 $K'\subset\bigcup\mathscr{F}''\subset X\setminus D_n$. 取 $l\in N$,使 $\mathscr{F}''\subset\mathscr{F}_l$,则 $\bigcup\mathscr{F}''\subset S_{n,l}$ 及 $K'\subset S_{n,l}$. 置

$$\mathscr{P}'=\{H_d:d\in K\cap D_n\}\cup\{F\cap S_{n,l}:F\in\mathscr{F}'\},$$

$\mathscr{P}'$ 是 $\mathscr{P}$ 的有限子族,由上得 $K\subset\bigcup\mathscr{P}'\subset O$. 证完.

由于 S_{ω_1} 不具有点可数 cs^* 网(定理 8.4.10),从而不具点可数闭 k 网. 故得下述两推论.

推论 8.4.16 (高智民- Hattori[1987]) 正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网及点可数闭 k 网.

推论 8.4.17 (林寿[1995]) 正则空间 X 是 $\aleph$ 空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持 k 网及点可数 cs^* 网.

定理 8.3.2 证明可数 cs 网⇒可数 k 网是对可数集族证明的. 后面的注记指出,这证法适用于局部有限、局部可数集族情况. 对遗传闭包保持族怎样? 能否借用上述证法. 有下述定理.

定理 8.4.18 (林寿[1995]) 设 $\mathscr{P}$ 是空间 X 的 σ 遗传闭包保持 cs 网,则 $\mathscr{P}$ 是 X 的 σ 遗传闭包保持 k 网.

证明 这里要用下述论断:如可数紧集 K 为遗传闭包保持集族 $\mathscr{P}$ 覆盖,则 $\mathscr{P}$ 的有限子族 $\mathscr{P}'$ 覆盖 K(引理 5.5.11).

设 $\mathscr{P}=\bigcup_{n\in N}\mathscr{P}_n$ 是 X 的遗传闭包保持 cs 网,K 是紧集,开集 $U\supset K$,令

$$\mathscr{P}'_n=\{P\in\mathscr{P}_n:P\subset U\},F_n=\bigcup\mathscr{P}'_n,n\in N.$$

下证 K 为有限个 F_n 覆盖. 如不然,存在 K 中序列 $\{x_n\}$ 使 $x_n\in K\setminus\bigcup_{i\leqslant n}F_i$. 以下用定理 8.3.2(ii)⇒(i)的证法导出矛盾,得到 $K\subset\bigcup_{i\leqslant n}F_i$. 然后由引理 5.5.11,存在 $\bigcup_{i\leqslant n}\mathscr{P}'_i$ 的有限子族 $\mathscr{P}''$ 使 $K\subset\bigcup\mathscr{P}''\subset U$. 证完.

注记 定理 8.3.2(ii)⇒(i)的证明对 cs^* 网也成立.从而上述定理中把 cs 网减弱为 cs^* 网仍成立.

cs 网、k 网一般无蕴含关系,由上述所证结果,在具体情况下,似乎 cs 网强些,由定理 8.4.11,具有 σ 遗传闭包保持 k 网不足以刻画 $\aleph$ 空间.林寿[1990]提出“具有 σ 遗传闭包保持 cs 网能否刻画 $\aleph$ 空间?”答案是肯定的,见下面定理 8.4.20.

引理 8.4.19 (恽自求[1991]) S_{ω_1} 不具有 σ 遗传闭包保持 cs 网.

证明 S_{ω_1} 作为度量空间的闭象是正则的.故设 S_{ω_1} 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网 $\mathscr{F}$, S_{ω_1} 可表示为

$$S_{\omega_1}=\{(1/n,\alpha):\alpha<\omega_1,n\in N\}\cup\{(0,0)\}.$$

(0,0)是 S_{ω_1} 的聚点.对每一 α, $0\leqslant\alpha<\omega_1$,令 $S^{(2)}=\{(1/n,\alpha):n\in N\}$.因 $\mathscr{F}$ 是 σ 遗传闭包保持集族,由引理 8.4.2, $\{F\in\mathscr{F}:|S^{(0)}\cap F|=\omega\}$ 应是 $\mathscr{F}$ 的可数子族.为了引出矛盾,只要证明集族 $\{F\in\mathscr{F}:|S^{(0)}\cap F|=\omega\}$ 是不可数的.

下面用超限归纳法证明,对每一 α, $0<\alpha<\omega_1$,可取 $F_\alpha\in\mathscr{F}$ 及 $z_\alpha\in S^{(\alpha)}\cap F_\alpha$,使当 $\alpha\neq\beta$ 时, $F_\alpha\neq F_\beta$.

对每一 α, $0<\alpha<\omega_1$,把 $S^{(0)}\cup S^{(\alpha)}$ 作为一序列,这序列的奇数项形成的子序列是 $S^{(0)}$,偶数项形成的子序列是 $S^{(\alpha)}$,这序列收敛于(0,0).因 $\mathscr{F}$ 是 cs 网,存在 $F_1\in\mathscr{F}$ 使 $S^{(0)}\cup S^{(1)}$ 终留于 F_1,并取 $z_1\in S^{(1)}\cap F_1$.显然 $|S^{(0)}\cap F_1|=\omega$.设 $\alpha<\omega_1$,假设对每一 $\beta<\alpha(\beta>0)$,已取得 $F_\beta\in\mathscr{F}$ 及 $z_\beta\in S^{(\beta)}\cap F_\beta$ 使 $|S^{(0)}\cap F_\beta|=\omega$.注意集 $S_{\omega_1}\setminus\{z_\beta:\beta<\alpha\}$ 是开集及 $(0,0)\in S_{\omega_1}\setminus\{z_\beta:\beta<\alpha\}$.所以存在 $F_\alpha\in\mathscr{F}$ 使 $S^{(0)}\cup S^{(\alpha)}$ 终留于 F_α 且 $F_\alpha\subset S_{\omega_1}\setminus\{z_\beta:\beta<\alpha\}$.显然, $|S^{(0)}\cap F_\alpha|=\omega$,并可取 $z_\alpha\in S^{(\alpha)}\cap F_\alpha$.由于 $F_\alpha\subset S_{\omega_1}\setminus\{z_\beta:\beta<\alpha\}$ 所以,对每一 $\beta<\alpha$, $F_\alpha\neq F_\beta$.从而得到 $\{F\in\mathscr{F}:|S^{(0)}\cap F|=\omega\}$ 是不可数集族.证完.

定理 8.4.20 (恽自求[1991],林寿[1992a]) 正则空间 X 是

$\aleph$空间当且仅当 X 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网.

证明 必要性由 Foged 定理(定理 8.3.6)得到. 下证充分性. 设 X 具有 σ 遗传闭包保持 cs 网 $\mathscr{F}$. 由定理 8.4.18, $\mathscr{F}$ 也是 X 的 σ 遗传闭包保持 k 网. 此外, X 不能包含闭子空间同胚于 S_{ω_1}(不然的话, $\mathscr{F}\cap S_{\omega_1}$ 将是 S_{ω_1} 的 σ 遗传闭包保持 cs 网. 这与引理 8.4.19 矛盾). 由定理 8.4.11 知 X 是$\aleph$空间. 证完.

关于$\aleph$空间的映射性质, 由于 S_{ω_1} 是 Lašnev 空间(度量空间的闭象)而不是$\aleph$空间知$\aleph$空间不能为闭映射保持. 容易证明完备映射保持$\aleph$空间(习题 8.5). 下面证明闭 Lindelöf 映射保持$\aleph$空间.

引理 8.4.21 设 $f: X\to Y$ 是正则空间 X 到空间 Y 上的闭 Lindelöf 映射. 则 f 是紧覆盖映射.

证明 设 K 是空间 Y 的紧子集, 则 $f^{-1}(K)$ 是 X 的 Lindelöf 子集. 因 X 正则, $f^{-1}(K)$ 是仿紧的. 置 $g=f|_{f^{-1}(K)}$, 则 g 是从仿紧空间 $f^{-1}(K)$ 到 K 上的闭映射. 由推论 6.6.14, g 是紧覆盖的, 存在 $f^{-1}(K)$ 中的紧集 C 使 $g(C)=K$, C 也是 X 中紧集且 $f(C)=g(C)=K$. 故 f 是紧覆盖映射. 证完.

定理 8.4.22 (林寿[1988d], 孙叔豪[1988]) 设 $f: X\to Y$ 是$\aleph$空间 X 到正则空间 Y 上的闭 Lindelöf 映射, 则 Y 是$\aleph$空间.

证明 设$\aleph$空间 X 具有 σ 局部有限闭 k 网 $\mathscr{P}$, Y 是正则空间, $f: X\to Y$ 是闭 Lindelöf 映射. 置 $f(\mathscr{P})=\{f(P): P\in\mathscr{P}\}$, 由引理 8.4.21, f 是紧覆盖的. 所以 $f(\mathscr{P})$ 是 Y 中的 σ 局部可数且闭包保持的闭 k 网. 由 Foged 定理的推论(推论 8.3.7)知 Y 是$\aleph$空间. 证完.

推论 8.4.23 (高智民-Hattior[1997], 林寿[1998]) 下列论断等价:

(i) X 是 Fréchet 及$\aleph$空间,

(ii) X 是度量空间在闭 Lindelöf 映射下的象.

证明 (i)⇒(ii)的证明类似于 Foged 定理(定理 8.4.4)的充分性的证明.

(ii)⇒(i),由定理 8.4.22 及闭映射保持 Fréchet 空间得证.证完.

由例 4.4.1(度量空间在有限对-开映射下的象未必是正则的)知$\aleph$空间不能为有限对-开映射保持.

度量空间能为既开且闭的映射保持(定理 4.4.14).林寿[1990]提出问题:"$\aleph$空间能为既开且闭映射保持否?"恽自求[1991]正面解决了.下面引入一稍强的结果.

Michael 引入紧覆盖映射以保持 k 网.Guthrie[1971]引入 cs 网,而同一年 Siwiec 引入序列覆盖映射,正好这类映射保持 cs 网.

定义 8.4.24 (Siwiec[1971]) 映射 $f:X\to Y$ 称为**序列覆盖的**(sequence covering),如果 Y 中的任一序列$\{y_n\}$收敛于点 $y\in Y$,存在 $x_n\in f^{-1}(y_n)$,$n\in N$ 及$x\in f^{-1}(y)$使$\{x_n\}$收敛于 x.

容易验证序列覆盖映射保持 cs 网.

回忆在引理 4.4.13 后的注记中曾引入的几乎开映射,它是开映射的推广.

引理 8.4.25 (高国士[1993]) 设 X 是正则空间且每一点 $x\in X$ 是G_δ 集,设 $f:X\to Y$ 是X 到 Y 上的几乎开的闭映射,则 f 是序列覆盖映射.

证明 设$\{y_n\}$是 Y 中的序列收敛于点$y\in Y$,$\{y_n\}$是由不同的点形成的.因 f 是几乎开的,存在点 $x\in f^{-1}(y)$使对 x 的每一邻域U,$y\in \mathrm{Int}f(U)$.因 X 是正则且每一点是 G_δ 集,置$\{U_i\}_{i\in N}$是x 的开邻域序列使$\{x\}=\bigcap_{i\in N}U_i$ 且 $\bar{U}_{i+1}\subset U_i$,$i\in N$,对每一$i\in N$,存在 $m(i)\in N$ 使对$n\geqslant m(i)$,$y_n\in \mathrm{Int}f(U_i)$.从而 $U_i\cap f^{-1}(y_n)\neq\varnothing$,不妨设 $m(i+1)>m(i)$,对 $j<m(i)$,取 $x_j\in f^{-1}(y_i)$.当 $m(i)\leqslant j<m(i+1)$时,取 $x_j\in U_i\cap f^{-1}(y_j)$,得序列$\{x_j\}$.因 f 是闭映射,$\{x_j\}$应有聚点(不然的话,如$\{x_j:j\in N\}$是闭集,则$\{y_j:j\in N\}$也闭,矛盾).设 E 是$\{x_j\}$的聚点所成集,则 $E\subset\bar{U}_i$,$(i\in N)$.从而 $E\subset\bigcap\bar{U}_n=\bigcap U_n=\{x\}$.所以$\{x_j\}$以 x 为聚点.所以$\{U_i\}_{i\in N}$是点x 的可数邻域基,$\{x_j\}$收敛于 x,f 是序列

覆盖映射.证完.

定理 8.4.26 (高国士[1993]) 设 $f: X \to Y$ 是$\aleph$空间 X 到正则空间 Y 上的几乎开的闭映射,则 Y 是$\aleph$空间.

证明 $\aleph$空间满足引理 8.4.25 的条件,f 是序列覆盖映射,它保持 cs 网.由定理 8.4.20 知 Y 是$\aleph$空间.证完.

推论 8.4.27 (恽自求[1991]) 设 $f: X \to Y$ 是$\aleph$空间 X 到正则空间 Y 上的既开且闭映射,则 Y 是$\aleph$空间.

证明 由于开映射是几乎开的.证完.

下面是$\aleph$空间的和定理.

定理 8.4.28 $\aleph$空间满足点可数且遗传闭包保持(即局部可数且可数遗传闭包保持)闭和定理.

证明 由$\aleph$空间的映射定理(定理 8.4.22)及一般性定理 5.5.8 得证.证完.

注记 $\aleph$空间未必满足遗传闭包保持闭和定理.取序列扇 S_{ω_1}为例,S_{ω_1}的构造见定义 8.4.9 的前面.S_α 是度量空间也是$\aleph$空间.把拓扑和$\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 中非孤立点映成一点而得到 S_{ω_1} 的商映射记作 q,q 是闭映射,$\bigoplus_{\alpha<\omega_1} S_\alpha$ 中的子集族$\{S_\alpha: \alpha<\omega_1\}$是离散集族,也是遗传闭包保持集族.经映射 q 后,S_{ω_1} 中的子集族$\{q(S_\alpha): \alpha<\omega_1\}$是遗传闭包保持的,每一 $q(S_\alpha)$同胚于 S_α 是 S_{ω_1} 的$\aleph$闭子集.所以 S_{ω_1}具有由$\aleph$闭子集构成的遗传闭包保持闭覆盖,而 S_{ω_1}不是$\aleph$空间.

习 题 八

8.1 证明下列论断等价:

(i) X 满足第一可数公理,

(ii) 对每一 $x \in X$,存在 x 的开邻域序列$\{U_n(x)\}$使 $x_n \in U_n(x) \Rightarrow \{x_n\} \to x$,

(iii) 对每一 $x \in X$,存在 x 的开邻域序列$\{U_n(x)\}$使 $x_n \in U_n(x) \Rightarrow \{x_n\}$以 x 为聚点.

8.2 空间 X 称为 **r 空间**，如果对每一 $x\in X$，存在 x 的开邻域序列 $\{U_n(x)\}$ 使 $x_n\in U_n(x)\Rightarrow\{x_n\}\subset$某紧集；称为 **q 空间**，如果 $x_n\in U_n(x)\Rightarrow\{x_n\}$ 有聚点．T_2 空间 X 称为**点可数型的**(pointwise countable type)，如果对每一 $x\in X$，存在紧集 K 使 $x\in K$ 且 K 具有可数开邻域基．显然，r 空间是 q 空间．第一可数空间及局部紧空间都是 r 空间．试证明在正则空间且每一点是 G_δ 集时，r，q 点可数型空间是等价的．

8.3 空间 X 称为**序列型**(sequential)**空间**，如果集 A 是开集当且仅当收敛于 A 的某一点的序列终留于 A；称为 Fréchet 空间，如果 x 是集 A 的聚点，则存在 $A-\{x\}$ 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x(以上见定理 2.3.2 后的 *)；称为**强 Fréchet 空间**，如果对 X 中的递减集列 $\{A_n\}$ 及点 $x\in\bar{A}_n(n\in N)$，则存在 $x_n\in A_n$ 使 $\{x_n\}$ 收敛于 x(当所有 $A_n=A$ 时，则成为 Fréchet 空间)．显然，强 Fréchet→Fréchet．Fréchet→序列型(见定理 2.3.2)．试证明：商映射保持序列型空间，伪开映射保持 Fréchet 空间，可数双商映射保持强 Fréchet 空间．从而证明上述三类空间可依次分别刻画为度量空间在商、伪开、可数双商映射下的象．

8.4 (高国士[1985])证明：

(i)设 X 是正则且第一可数的(或局部紧的)，则下列论断等价：(1)X 是 M_1 空间，(2)X 具有 σ 闭包保持 k 网 $\mathscr{F}$，每一 $F\in\mathscr{F}$ 是正则闭集，

(ii)设 f 是 M_1 空间 X 到 r 空间 Y 上的拟开、闭映射，则 Y 是 M_1 空间．

8.5 证明完备映射保持$\aleph$空间．

8.6 证明具有局部可数 k 网的仿紧空间具有局部有限 k 网．从而证明：闭 Lindelöf 映射保持仿紧$\aleph$空间．

8.7 证明，空间 X 到 T_2、k 空间 Y 上的紧覆盖映射是商映射．

8.8 证明下列论断等价：

(i)X 是 cosmic 空间，

(ii)X 是 Lindelöf 的 σ 空间，

(iii)X 是遗传可分的 σ 空间．

8.9 (Michael[1966])证明：

(i)设 X 是正则 Lindelöf 且局部$\aleph_0$ 空间(即每一点存在一开邻域是$\aleph_0$ 空间)，则 X 是$\aleph_0$ 空间，

(ii)设空间 X 是可数个不相交的子空间 X_n 的并，每一 X_n 具有可数伪基，则 X 具有可数伪基．

8.10 (林寿[1988c]) 证明具有点可数伪基的 T_2 空间具有可数伪基

从而具有 σ 局部有限伪基的正则空间是$\aleph_0$ 空间.

8.11　证明在正则空间,下列论断等价:

(i) X 是$\aleph_0$ 空间,

(ii) X 是 Lindelöf 的$\aleph$空间,

(iii) X 是遗传可分的$\aleph$空间.

8.12　证明局部可数且闭包保持闭集族关于有限交封闭.且举例说明上述集族如不是闭的,则结论不成立.

8.13　设 $K\subset\mathscr{C}(X,Y)$是紧集.证明 $\phi(x)=\{f(x):f\in K\}$是 Y 中紧集(如用引理 8.1.13 后的符号,$\phi(x)$可记作 $K(x)$).

8.14　证明闭 k 网是 cs^* 网.

8.15　设 $\mathscr{P}$是正则空间 X 的遗传闭包保持集族,证明 $\mathscr{P}^-=\{P^-:P\in\mathscr{P}\}$ 是遗传闭包保持的.

8.16　空间 X 的子集族 $\mathscr{P}$称为**弱遗传闭包保持**的(weakly hereditarily closure-preserving),如果任取点 $x(p)\in P\in\mathscr{P}$,集族$\{\{x(p)\}:P\in\mathscr{P}\}$是闭包保持的;$\mathscr{P}$称为**可数遗传闭包保持的**(countably hereditarily closure-preserving)、**可数弱遗传闭包保持的**(countably weakly hereditarily closure-preserving),如果 $\mathscr{P}$的每一可数子族分别是遗传闭包保持的、弱遗传闭包保持的.证明在 Fréchet 空间,可数弱遗传闭包保持集族是遗传闭包保持集族.

8.17　(林寿[1997])　证明正则 k 半层空间到正则空间 Y 上的闭映射是紧覆盖映射.从而证明:设 f 是由正则k 半层空间X 到正则空间 Y 上的闭映射.则 Y 是k 半层空间.

8.18　(林寿[1997])证明 k 半层空间在开紧映射下的象是σ 空间(提示,利用 Chaber[1978]的结果:σ 空间在开紧映射下的象是σ 空间当且仅当这象是次仿紧的).

8.19　(刘川[1992])证明空间 X 是 Lašnev 空间当且仅当 X 是正则 Fréchet 空间且具有 σ 紧有限k 网.

8.20　设$\mathscr{C}(X,Y)$是空间 X 到空间 Y 内的连续函数所成集赋以紧开拓扑.这函数空间的次基是 $W(C,U)=\{f\in\mathscr{C}(X,Y):f(C)\subset U\}$,这里 C 是 X 中的紧集,U 开于 Y.

证明:当 X 是离散空间时,$\mathscr{C}(X,Y)$正好是积空间 $Y^{|X|}=\Pi(Y_x:x\in X)$.这里$|X|$是 X 的势,每一 Y_x 是 Y 的拷贝.

8.21　$\mathscr{C}(X,Y)$的基本开集是它的次基 $W(C,U)$的有限交.证明如下关系式:

(i) $\bigcap_{i=1}^{n} W(C_i, U) = W(\bigcup_{i=1}^{n} C_i, U)$,

(ii) $\bigcap_{i=1}^{n} W(C, U_i) = W(C, \bigcap_{i=1}^{n} U_i)$,

(iii) $\bigcap_{i=1}^{n} W(C_i, U_i) \subset W(\bigcup_{i=1}^{n} C_i, \bigcup_{i=1}^{n} U_i)$.

8.22 证明$\overline{W(C,U)}^{\mathscr{C}} \subset W(C, \bar{U})$. 这里"$\overline{\quad}^{\mathscr{C}}$"表示紧开拓扑下的闭包.

8.23 对每一 $y_0 \in Y$,令 $C_{y_0}: X \to Y$ 是常值映射. 证明由 $y \to C_y$ 给出的 $Y \to \mathscr{C}(X, Y)$的映射是 Y 到 $\mathscr{C}(X, Y)$的某子空间上的同胚映射. 所以 Y 同胚于 $\mathscr{C}(X, Y)$的某子空间.

8.24 证明 $\mathscr{C}(X, Y)$是 T_2 空间当且仅当 Y 是 T_2 空间.

8.25 (高国士[1993])映射 $f: X \to Y$ 称为**弱序列覆盖(Weak sequence-covering)映射**,如果对空间 Y 的每一序列$\{y_n\}$及所收敛的点 y,存在$\{y_n\}$的子序列$\{y_{n_k}\}$及 $x_k \in f^{-1}(y_{n_k})$,$(k \in N)$,$x \in f^{-1}(y)$使$\{x_k\}$收敛于 x.(读者可与 Siwiec 引入的序列覆盖映射(定义 8.4.23)比较)存在以紧度量空间为定义域和值域的弱序列覆盖映射而不是序列覆盖映射. 证明:

(i)弱序列覆盖映射保持 cs^* 网(熟知紧覆盖映射保持 k 网,序列覆盖映射保持 cs 网),

(ii)定义在强 Fréchet 空间(或正则且每一点是 G_δ 集的空间)上的闭映射是弱序列覆盖映射,

(iii) Y 是序列型空间、Fréchet 空间、强 Fréchet 空间当且仅当每一(由 X)到 Y 上的弱序列覆盖映射分别是商映射、伪开映射、可数双商映射.

参 考 文 献

Alexander C. C.

[1971] Semi-developable spaces and quotient image of metric spaces, *Pacific J. Math.*, 37, 277—293.

Alexandroff P. S.

[1939] On bicompact extension of topological spaces, *Sbornik N. S.*, 5, 403—423.

[1960] Some results in the theory of topological spaces, obtained within the last twenty-five years, *Russian Math. Surveys*, 15, 23—83.

[1961] On some results concerning topological spaces and their Continuous mappings, *Proc. 1st Prague Top. Symp.*, 41—54.

Alexandroff P. S., Hopf H.

[1935] Topologie I, Berlin.

Alexandroff P. S., Urysohn P.

[1923] Surles espaces topologiques compacts, *Bull. Inter. Acad. Pol. Sci.*, A, 5—8.

[1929] Mémoire sur les espaces topologiques compacts, *Verh. Akad. Wetensch.*, 14, 1—96.

Aguaro G.

[1966] Point countable open covering in countably compact spaces, *Proc. 2nd Prague Top. Symp.*, 39—41.

Arens R., Dugundji J.

[1950] Remork on concept of compact, *Portug. Math.*, 9, 141—143.

Arhangel'skii A.

[1962] On open and almost open mappings of topological spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 147, 999—1002 (Russian).

[1963] On a class of spaces containing all metric and all locally compact spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 151, 751—754 (Russian).

[1965] Bicompact sets and the topology of spaces, *Trans. Mosc. Math. Soc.*, 13, 1—62.

[1966] Mappings and spaces, *Uspechi Mat. Nauk.*, 21 (4), 133—184 (Russian).

[1976] The intersection of topologies, and pseudo-open compact mappings, *Dokl. Akad. Nauk.* SSSR, 226, 745—748 (Russian).

[1980] The star method, new classes of spaces and countable compactness, *Soviet Math. Dokl.*, 22, 550—554.

Arhangel'skii A., Ponomarev V. I.

[1983] Fundamental of general topoloy, D. Reidel Publishing Company.

Arya S., Singal M.

[1980] On locally countable sum theorem, *Pacific J. Math.*, 90, 1—10.

Aull. C. E.

[1973] A generalization of a theorem of Aquaro, *Bull. Austral Math. Soc.*, 9, 105—108.

[1974] Quasi-development and $\delta\theta$-bases, *J. London Math. Soc.*, 9, 197—204.

[1978] A survey paper on some base axioms, *Top. Proc.* 3, 1—36.

Bacon P.

[1970] The compactness of countably compact spaces, *Pacific J. Math.*, 32, 587—592.

Bagley R. W., Connel E. H., Mcknight J. D.

[1958] On properties characterizing psudo-compact spaces, *Proc. AMS*, 9, 500—506.

Balachandran V. K.

[1955] A mapping theorem for metric spaces, *Duke Math. J.* 22, 461—464.

Bennett H. R.

[1968] Quasi-developable spaces, *Proc. Arizona State Univ. Top. Conf.*, 314—317.

[1970] On Arhangel'skii's class MOBI, Proc. AMS, 26, 178—180.

[1971] On quasi-developable spaces, *Gen. Top. Appl.*, 1, 253—262.

Bennett H. R. Lutzer D. J.

[1972] A note on weak θ-refinability, *Gen. Top. Appl.*, 2, 49—54.

Bing R. H.

[1951] Metrization of topological spaces, *Canad. J. Math.*, 3. 175—186.

Boone J. R.

[1973] A characterization of metacompactness in the class of θ-refinable spaces, *Gen. Top. Appl.*, 3, 253—264.

[1974] On k-quotient mappings, *Pacific J. Math.*, 51, 369—377.

Borges C. R.

[1966] On stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 17, 1—16.

[1968] On metrizability of topological spaces, *Canad, J. Math.*, 20, 795—804.

Borges C. R., Lutzer D. J.

[1973] Characterizations and mappings of *Mi*-spaces, *Lecture Notes in Math.*, No. 375, Springer-Verlag, 34—40.

Bourbaki N.

[1951] Topologie générale, Paris.

Burke D. K.

[1969a] On subparacompact spaces, *Proc. AMS*, 23, 655—663.

[1969b] Subparacompact spaces, *Proc. Washington State Univ. Top. Conf.*, 39—48.

[1970] On p-spaces and WΔ-spaces, Pacific J. Math., 35, 285—296.

[1974] Spaces with a G_δ-diagonal, *Lecture Notes in Math.*, No, 378, Spinger-Verlag, 95—100.

[1976] Preservation of certain base axioms under a perfect mapping, *Top. Appl.*, 1, 269—279.

[1980a] Orthocompactness and perfect mappings, *Proc. AMS*, 78, 484—486.

[1980b] Closed mappings, Surveys in Gen. Top., Academic Press, 1—32.

[1980c] Paralindelöf spaces and closed mappings, *Top. Proc.*, 5. 47—57.

[1983] Spaces with a primitive base and perfect mappings, *Fund. Math.*, 116, 157—163.

[1984a] Covering properties, Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 347—422.

[1984b] Perfect images of spaces with a δθ-base and weakly δθ-refinable spaces, *Top. Appl.*, 18, 81—87.

Burke D. K., Davis S. W.

[1982] Pseudo-compact paralindelöf spaces are compact, *Abstrocts AMS*, 3, 213—231.

Burke D. K., Engelking R., Lutzer D. J.

[1975] Hereditarily closure-preserving collections and metrization, *Proc. AMS*, 51, 483—488.

Burke D. K., Lutzer D. J.

[1976] Recent advances in the theory of generalized metric spaces, *Proc. Memphis state Univ. Top. Conf.*, 1—70.

Burke D. K., Michael E.

[1972] On a theorem of V. V. Filippov, *Israel J. Math.*, 11, 394—397.

[1976] On certain point-countable covers, *Pacific J. Math.*, 64, 79—92.

Burke D. K., Stoltenberg R. A.

[1969] A note on p-spaces and Moore spaces, *Pacific J. Math.*, 30, 601—608.

de Caux P.

[1976] A collectionwise normal weakly θ-refinable Dowker space which is neither irreducible nor real compact, *Top. Proc.*, 1, 67—77.

Čech E.

[1937] On bicompact spaces, *Ann. Math.*, 38, 823—844.

Ceder J. G.

[1961] Some generalizations of metric spaces, *Pacific J. Math.*, 11, 105—125.

Chaber J.

[1976] Conditions which imply compactness in eountably compact spaces, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 24, 993—998.

[1978] Primitive generalizations of σ-spaces, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, Top. Budapest*, 259—268.

[1982] Perfect images of p-spaces, *Proc. AMS*, 85, 609—614.

[1983a] Perfect preimages of Moore Spaces, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 31, 31—34.

[1983b] Generalizations of Lašnev's theorem, *Fund. Math.*, 119. 85—91.

[1986] On the class MOBI. *Proc. 6th Prague Top. Symp.*, 77—82.

Chaber J., Junnila H. J. K.

[1979] On θ-refinability of strict p-spaces, *Gen. Top. Appl.*, 10, 233—238.

Chen Bisheng (陈必胜)

[1985a] 关于在连续闭映射下的原象，数学研究与评论，5 (4), 121—122.

[1985b] 具有 σ-几乎局部有限基的空间，苏州大学学报（自然版），1 (2), 25—30.

Chen Bisheng (陈必胜), Wu Lisheng (吴利生)

[1994] On strongly M_1-spaces, 苏州大学学报（自然版），10, 75—80.

Cohen D. E.

[1954] Spaces with weak topology, *Quart. J. Math., Oxford Ser.* (2), 5, 77—80.

Comfort W. W.

[1969] A short proof of Marczewski's separability theorem. *Amer. Math. Monthly*, 76, 1041—1042.

Corson H., Michael E.

[1964] Metrizability of certain countable unions, *Illinois J. Math.*, 8, 351—360.

Creede G. D.

[1967] Semi-stratifiable spaces, *Proc. Arizona State Univ. Top. Conf.*, 318—323.

[1970] Concerning semi-stratifiable spaces, *Pacific J. Math.*, 32, 47—54.

Dai Mumin (戴牧民)

[1981] σ 按点族正规、σ-亚紧性和 σ-点有限基，数学学报，24. 656—667.

[1983] 一类包含 Lindelöf 空间和可分空间的拓扑空间，数学年刊，4A，571—575.

Davis S. W.

[1979] A cushioning type weak covering property, *Pacific J. Math.*, 80, 359—370.

[1980] A nondevelopable Čech-complete space with a pointcountable base, *Proc. AMS*, 78, 139—142.

[1985] The strict p-spaces problem, *Top. Proc.*, 10, 277—292.

Dieudonné J.

[1944] Une generalization des espaces compacts, *J. Math. Pures Appl.*, 23, 65—76.

Dowker C. H.

[1947] An imbedding theorem for paracompact metric spaces, *Duke Math. J.*, 14, 639—645.

[1951] On Countably paracompact spaces, *Canad. J. Math.*, 3, 219—224.

[1953] On inductive dimension of completely normal spaces, *Quar. J. Math. Oxford, Ser.*, 4, 267—281.

Dugundji J.

[1966] Topology, Boston.

Eckertson F. W., Garcia-Ferreira S., Sanchis M., Watson S.

[1997] An isocompact Tychonoff space whose square is not isocompact, *Top. Proc.*, 22, 181—190.

Engelking R.

[1977] General Topology, PWN Warszawa.

Filippov V. V.

[1968] Preservation of the order of a base under a perfect mapping, *Soviet Math. Dokl.*, 9, 1005—1007.

[1969] Quotient space and mutiplicity of a base, *Mat. Sb.*, 80, 521—532 (Russian).

Fleissner W. G., Reed G. M.

[1977] Paralindelöf spaces and spaces with a σ-locally countable base, *Top. Proc.*, 2, 89—110.

Foged L.

[1984] Characterizations of ℵ-spaces, *Pacific J. Math.*, 110, 59—63.

[1985] A characterization of closed images of metric spaces, *Proc. AMS*, 95, 487—490.

Frolik Z.

[1960] On the topological product of paracompact spaces, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 8, 747—750.

Gao Guoshi（高国士）

[1979*a*] 弱于紧性的性质，江苏师院学报，1—9.

[1979*b*] 关于仿紧性的承继性，江苏师院学报，10—13.

[1979*c*] 关于仿紧、列仿紧空间的和，江苏师院学报，14—19.

[1980] 仿紧性与完备映象，数学学报，23，794—796.

[1983] A note on M_1-spaces, *Pacific J. Math.*, 108, 121—128.

[1985a] Mapping theorems on paracompact spaces, 苏州大学学报，1（1），1—3.

[1985b] 关于 M_1-空间的又一注记，数学研究与评论，5（4），47—48.

[1986a] 关于闭包保持和定理，数学学报，29，58—62.

[1986b] 关于 k-网和基，苏州大学学报，2，107—111.

[1986c] 两个映射定理，数学年刊，7（A），666—669.

[1988] 关于 M_1-空间，苏州大学学报，4，289—300.

[1989] 关于不可约空间，数学进展，18，143—149.

[1993] Weak sequence-covering mapping and cs^*-network, 苏州大学学报，9，105—111.

[1995] 关于不可约空间（Ⅱ），数学进展，24，423—426.

Gao Guoshi（高国士），Wu Lisheng（吴利生）

[1983] Mapping theorems on mesocompact spaces, *Proc. AMS*, 89, 355—358.

Gao Zhimin（高智民）

[1987a] ℵ-space is invariant under perfect mappings, *Questions Answers in Gen. Top.*, 5, 271—279.

[1987b] The closed images of metric spaces and Fréchet ℵ-spaces, *Questions Answers in Gen. Top.*, 5, 281—291.

Gao Zhimin（高智民），Hattori Y.

[1986/87] A characterization of closed s-images of metric spaces, *Questions Answers in Gen. Top.*, 4, 147—151.

Ge Ying（葛英）

[1992] 可数仿紧性的闭映象，南京大学学报，28，368—371.

[1993] Closed Lindëlöf mappings inversely preserve property b_1, *Questions Answers in Gen. Top.*, 11, 81—85.

[1994a] 具有性质 B 的空间的闭映象，苏州大学学报（自然版），10，205—210.

[1994b] 关于弱$\bar{\theta}$-加细空间的闭 L 原象，数学研究与评论，14，426—428.

Gittings R. F.

[1974] Some results on weak covering conditions, *Canad. J. Math.*, 26. 1152—1156.

[1977] Open mapping theory, *Set-Theoretic Topology*, 141—191.

Gruenhage G.

[1976] Stratifiable spaces are M_2, *Top. Proc.*, 221—225.

[1979] On closed images of or thocompact spaces, *Proc. AMS*, 77, 389—394.

[1980] On the $M_3 \Rightarrow M_1$ question, *Top. Proc.*, 5, 77—104.

[1984] Generalized metric spaces, Handbook of Set-Theoretic Topology, North-Holland, 423—501.

[1986] On a Corson compact space of Todorčević, *Fund. Math.*, 126, 261—265.

[1992] Generalized metric spaces and metrizability, *Recent Progress in General Topology*, 239—274.

Gruenhage G., Michael E., Tanaka Y.

[1984] Space determined by point-countable covers, *Pacific J. Math.*, 113, 303—332.

Guan Zhaozhi (关肇直)

[1958] 拓扑空间概论，科学出版社.

Guthrie J. A.

[1971] A characterization of $\aleph_0$-spaces, *Gen. Top. Appl.*, 1, 105—110.

[1973] Mapping spaces and cs-networks, *Pacific J. Math.*, 47, 465—471.

Hanai S.

[1961] On closed mappings, Ⅱ, *Proc. Japan Acad.*, 37, 388—391.

Hausdorff F.

[1935] Mengenlehre. Berlin.

Heath R. W.

[1962] Arc-wise connectedness in semi-metric spaces, *Pacific J. Math.*, 12, 1301—1319.

[1964] Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces, *Canad. J. Math.*, 16, 763—770.

[1966] A paracompact semi-metric space which is not an M_3-space, *Proc. AMS*, 17, 868—870.

[1969] Stratifiable spaces are σ-spaces. *Notices AMS*, 17, 761.

Heath R. W., Hodel R. E.

[1973] Characterizations of σ-spaces, *Fund. Math.*, 77, 271—275.

Heath R. W., Junnila H. J. K.

[1981] Stratifiable spaces as subspaces and continuous images of M_1-spaces, *Proc. AMS*, 83, 146—148.

Heath R. W., Lutzer D. J., Zenor P. L.

[1973] Monotonically normal spaces, *Trans. AMS*, 178, 481—493.

Hewitt E.

[1948] Rings of real-valued continuous functions I, *Trans. AMS*, 64, 54—99.

Hodel R. E.

[1969] Sum theorems for topological spaces, *Pacific J. Math.*, 30, 59—65.

[1970] A note on subparacompact spaces, *Proc. AMS*, 25, 822—845.

[1971] Moore spaces and wΔ-spaces, *Pacific J. Math.*, 38, 641—652.

[1972] Spaces defined by sequences of open covers which guarantee that certain sequences has cluster points, *Duke Math. J.*, 39, 253—263.

House V. D.

[1975] Countable products of generalized countably compact spaces, *Pacific J. Math.*, 57, 183—197.

Hurewicz W.

[1926] Ueber stetige Bilder von Punktmengen, *Proc. Akad. Amsterdam*, 29, 1014—1017.

Ishii T.

[1967] On closed mappings and M-spaces Ⅰ, Ⅱ, *Proc. Japan Acad.*, 43, 752—761.

Ishikawa F.

[1955] On countably paracompaet spaces, *Proc. Japan Acad.*, 31, 686—687.

Itō M.

[1984] The closed image of a hereditarily M_1-space is M_1, *Pacific J. Math.*, 113, 85—91.

[1985] M_3-spaces whose every point has a closure preserving outer base are M_1, *Top. Appl.*, 19, 65—69.

Itò M., Tamano K.

[1983] Space whose closed images are M_1, *Proc. AMS*, 87, 159—163.

Jiang Jiguang (蒋继光)

[1986] 关于仿紧性与拓扑空间的可度量性，数学学报，29，679—701.

[1987] 仿紧性的一个刻划，四川大学学报（自然版），24，256—261.

[1988] A characterization of submetacompactness, *Chin. Ann. Math.*, 9B, 151—

155.

[1989] 仿紧性与性质 b_1，数学学报，32，351—355.

[1991] 一般拓扑学专题选讲，四川教育出版社.

Jiang Shouli（江守礼）

[1986] Every strict p-space is θ-refinable, *Top. Proc.*, 11, 309—316.

[1988] On a Junnila's problem, *Questions Answers in Gen. Top.*, 6, 43—47.

Jones F. B.

[1937] Concerning normal and completely normal spaces, *Bull. AMS*, 43, 671—677.

Junnila H. J. K.

[1978*a*] Neighbornets, *Pacific J. Math.*, 76, 83—108.

[1978*b*] On submetacompactness, *Top. Proc.*, 3, 375—405.

[1979*a*] Paracompactness, metacompactness and semi-open covers, *Proc. AMS*, 73, 244—248.

[1979*b*] Metacompactness, paracompactness, and interior-preserving open covers, *Trans. AMS*, 249, 373—385.

[1980] Three covering properties, Surveys in Gen. Top., Academic Press, 195—245.

[1992] Covering properties, *Recent Progress in Gen. Top.* 444—452.

Junnila H. J. K., Yun Ziqiu（恽自求）

[1992] ℵ-spaces and spaces with a σ-hereditarily closure-preserving k-network, *Top. Appl.*, 44, 209—215.

Katětov M.

[1958] Extension of locally finite covering, *Colloq. Math.*, 6, 145—151 (Russian).

Kelley J. L.

[1950] The Tycholloff product theorem implies axiom of choice, *Fund. Math.*, 37, 75—76.

[1955] General Topology, New York.

Kodama Y., Nagami K.

[1974] The theory of topological spaces, Iwanami, Tokyo (Japanese).（中译本：方嘉琳译，拓扑空间论，科学出版社，1984）

Kullman D. E.

[1971] Developable spaces and p-spaces, *Proc. AMS*, 27, 154—160.

Kuratowski K.

[1948] Topologie I (second ed.), Warszawa.

Lašnev N.

[1965] Continuous decompositions and closed mappings of metric spaces, *Dokl. Akad, Nauk. SSSR*, 165, 756—758 (Russian).

[1966] Closed images of metric spaces, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 170, 505—507 (Russian).

Lin Shou (林寿)

[1988a] K-半分层空间的注记，苏州大学学报（自然版），4，357—363.

[1988b] 闭映射不能保持 T_1 仿紧性及紧式仿紧性，苏州大学学报（自然版），4，184—187.

[1988c] A study of pseudobases, *Questions Answers in Gen. Top.*, 6, 81—97.

[1988d] Mapping theorems on $\aleph$-spaces, *Top. Appl.*, 30, 159—164.

[1989] 关于映射与空间，苏州大学学报（自然版），5，313—326.

[1990] A survey of the theory of $\aleph$-spaces, *Questions Answers in Gen. Top.*, 8, 405—419.

[1991a] 关于 Lašnev 空间，数学学报，34，222—225.

[1991b] Lašnev 空间的可数积，数学进展，20，192—194.

[1991c] σ-空间的控制和定理，数学年刊，12A，188—190.

[1992a] 遗传闭包保持集族的若干研究方向，山西大学学报（自然版），6 (2)，17—23.

[1992b] 关于 Arhangel'skii 的“映射与空间”，苏州大学学报（自然版），8，393—400.

[1993] 关于 Arhangel'skii 的“映射与空间”（续），苏州大学学报（自然版），9，11—19.

[1995] 广义度量空间与映射，科学出版社.

Lin Shou (林寿), Tanaka Y.

[1994] Point-countable k-networks, closed maps, and related results, *Top. Appl.*, 59, 79—86.

Liu Chuan (刘川)

[1992] Spaces with a σ-compact finite k-network, *Questions Answers in Gen. Top.*, 10, 81—87.

Liu Yingming (刘应明)

[1977] 一类包含弱仿紧空间和次仿紧空间的拓扑空间，数学学报，20，212，214.

[1978] σ-集体正规与集体正规，四川大学学报，1，11—17.

Long Bing (龙冰)

[1986] 几个覆盖性质与分离性，数学学报，29，666—669.

Lutzer D. J.

[1971] Semimetrizable and stratifiable spaces, *Gen. Top. Appl.*, 1, 43—48.

Mack J.

[1967] Directed covers and paracompact spaces, *Canad. J. Math.*, 19, 649—654.

Mancuso V. J.

[1970] Mesocompactness and retated properties, *Pacific J. Math.*, 36, 345—355.

[1972] Inverse images and first countability, *Gen. Top. Appl.*, 2, 29—44.

Marczewski E.

[1952] Séparabilité et mutiplication Cartesian products, *Fund. Math.*, 39, 229—238.

Mansfield M. J.

[1957*a*] Some generalizations of full normality, *Trans. AMS*, 86, 495—505.

[1957*b*] On countably paracompact normal spaces, *Canad. J. Math.*, 9, 443—449.

Michael E. A.

[1953] A note on paracompact spaces, Proc. AMS, 4, 831—838.

[1955] Point finite and locally finite covering, *Canad. J. Math.*, 7, 275—279.

[1957] Anather note on paracompact spaces, *Proc*, *AMS*, 8, 822—828.

[1959] Yet another note on paracompact spaces, *Proc*, *AMS*, 10, 309—314.

[1963] The product of a normal space and a metric space need not be normal, *Bull. AMS*, 69, 375—376.

[1964] A note on closed maps and compact sets, *Israel J. Math.*, 2, 173—176.

[1966] $\aleph_0$-spaces, *J. Math. Mech.*, 15, 983—1002.

[1968] Bi-quotient maps and cartesian product of quotient maps, *Ann. Inst. Fourier Greenoble*, 18, 287—302.

[1969] On Nagami's Σ-spaces and some related matters, *Proc. Washington State Univ. Top. Conf.*, 13—19.

[1972] A quintuple quotient quest, *Gen. Top. Appl.*, 2, 91—138.

[1973] On k-spaces, k_R-spaces and k (X), *Pacific J. Math.*, 47, 487—498.

[1975] Review of Guthrie's mapping spaces and cs-network, *Math. Rev.*, 49, 696—697.

[1977] σ-locolly finite maps, *Proc. AMS*, 65, 159—164.

Michael E. A., Nagami K.

[1973] Compact-covering images of metric spaces, *Proc. AMS*, 37, 260—266.

van Mill J., Reed G. M.

[1990] Open Problems in Topology, North-Holland.

Miller E. S.

[1988] Closed preimages of certain isocompactness properties, *Top. Proc.*, 13, 107—123.

Miščenko A.

[1962] Spaces with Q point-countable base, *Soviet Math. Dokl.*, 3, 855—858.

Mizokami T.

[1983] On a certain class of M_1-spaces, Proc. AMS, 87, 357—362.

[1984] On M-structures, *Top. Appl.*, 17, 63—89.

Morita K.

[1953] On spaces having the weak topology with respect to closed covering, *Proc Japan Acad.*, 29. 537—543.

[1956] On closed mappings, *Proc. Japan Acad.*, 32, 539—543.

[1962] Paracompactness and product spaces, *Fund. Math.*, 50, 223—236.

[1964] Products of normal spaces with metvic spaces, *Math. Ann.*, 154. 365—382.

[1967] Some properties of M-spaces, *Proc. Japan Acad.*, 43, 869—872.

[1976] Some problems on normality of products of spaces, *Proc. 4th Prague Top. Symp.*, 296—297.

Morita K., Hanai S.

[1956] Closed mappings and metric spaces, *Proc. Japan Acad.*, 32, 10—14.

Morita K., Nagata J.

[1989] Topics in General Topology, North-Holland.

Nagami K.

[1969] Σ-spaces, *Fund. Math.*, 65, 169—192.

[1973] Minimal class generated by open compact and perfect mappings, *Fund. Math.*, 78, 227—264.

Nagata J.

[1950] On a necessary and sufficient condition of metrizability, *J. Inst. Polyt. Osaka City Univ.*, 1, 93—100.

[1971] A survey of the theory of generalized metric spaces, *Proc. 3th Prague Top. Symp.*, 321—331.

[1985] Modern General Topology, North-Holland.

[1989] Generalized metric spaces I, Topics in General Topology, North-Holland, 315—366.

Novák J.

[1953] On the Cartesian product of two compact spaces. *Fund. Math.*, 40, 106—112.

Ohta H.

[1989] Well behaved subclasses of M_1-spaces, *Top. Appl.*, 32, 279—288.

Okuyama A.

[1964] On metrizability of M-spaces, *Proc. Japan Acad.*, 40, 176—179.

[1967] Some generalizations of metric spaces, their metrization theorems and product spaces, *Sci. Rep. Tokyo Kyioku Daigaku*, A9, 236—254.

[1968] σ-spaces and closed mappings, Ⅰ, Ⅱ, *Proc. Japan Acad.*, 44, 472—481.

[1972] On a generalization of Σ-spaces, *Pacific J. Math.*, 40, 485—495.

O'Meara P.

[1966] A new class of topological spaces, *Univ. Alberta Dissertation*.

[1970] A metrization theorem, *Math. Nachr.*, 45, 69—72.

[1971] On paracompactness in function spaces with the compact open topolcgy, *Proc. AMS*, 29, 183—189.

Ponomarev V. I.

[1960] Axioms of countability and continuous mappings, *Bull. Pol. Acad. Math.*, 8, 127—133 (Russian).

[1962] On the invariance of strong paracompactness under open perfect mappings, *Bull. Acad. Pol. Sci. Sér. Math.*, 10, 425—428.

Popišil B.

[1937] Remark on bicompact space, *Ann. Math.*, 38, 845—846.

Popov V.

[1971] A perfect map need not preserved a G_δ-diagonal. *Gen. Top. Appl.*, 7, 31—33.

Potoczny H.

[1972] A non-paracompact space which admits a closure-preserving cover of compact sets, *Proc. AMS*, 32, 309—311.

[1973] Closure-preserving families of compact sets, *Gen, Top. Appl.*, 3, 243—248.

Potoczny H., Junnila H. J. K.

[1975] Closure preserving families and metacompactness, *Proc. AMS*, 53, 523—529.

Pu Baoming (蒲保民), Jiang Jiguang (蒋继光), Hu Shuli (胡淑礼)

[1985] 拓扑学，高等教育出版社.

Ross K. A., Stone A. H.

[1964] Products of separable spaces, *Amer. Math. Monthly*, 71, 398—403.

Rudin M. E.

[1971] A normal space X for which X×I is not normal, *Fund. Math.*, 73, 179—186.

[1975] The normality of products with a compact factor, *Gen. Top. Appl.*, 5, 45—59.

Sakai M.

[1986] A new class of isocompact spaces and related results, *Pacific J. Math.*, 122, 211—221.

Scott B. M.

[1975] Toward a product theory for orthocompactness, Studies in Topology, Academic Press, New York, 517—537.

[1977] Orthocompactness is normality in finife products of locally compact LOTS's, Set-Theoretic Topology, Academic Press, New York, 339—348.

[1979] Pseudocompact, metacompact spaces are compact, *Top. Proc.*, 4, 577—587.

[1980] More about orthocompactness, Top. Proc., 5, 155—184.

Sierpinski W.

[1952] General Topology, Warsaw.

Singal M., Arya S.

[1970] Two sum theorems for topological spaces, *Israel. J. Math.*, 8, 155—157.

[1975] On the closure-preserving sum theorems, *Proc. AMS*, 53, 518—522.

Siwiec F.

[1971] Sequence-Covering and countably bi-quotient mappings, *Gen. Top. Appl.*, 1, 143—154.

Siwiec F., Mancuso V. J.

[1971] Relations among certain mappings and conditions for their equivalence, *Top. Appl.*, 1, 33—41.

Siwiec F., Nagata J.

[1968] A note on nets and metrization, *Proc. Japan Acad.*, 44, 623—627.

Slaughter F. G.

[1973] The closed image of a metrizable space is M., *Proc. AMS*, 37, 309—314.

Smirnov Ju.

[1951] On metrization of topological spaces, *Uspechi Mat. Nauk.*, 6 (6), 100—111 (Russian).

[1956] On strongly paracompact spaces, *Izv*, *Akad*. *Neuk*, *SSSR*, *Math*, *Ser*., 20, 253—274 (Russian).

Smith J. C.

[1975] Properties of weak $\bar{\theta}$-refinable spaces, *Proc*. *AMS*, 53, 511—517.

[1976] A remark on irreducible spaces, *Proc*. *AMS*, 57, 133—139.

[1977] New characterizations for collectionwise normal spaces, *Glass*. *Math*., 12 (32), 327—338.

Sneider V.

[1945] Continuous images of Souslin and Borel sets, metrization theorems, *Dokl*. *Akad*. *Nauk*. *SSSR*, 50, 77—79 (Russian).

Sorgenfrey R. H.

[1947] On the topological product of paracompact spaces, *Bull*. *AMS*, 53, 631—632.

Steen L. A., Seebach Jr. J. A.

[1978] Counterexamples in topology, Springer-Verlag, Berlin.

Stone A. H.

[1948] Paracompactness and product spaces, *Bull*. *AMS*, 54, 977—982.

[1956] Metrizability of decomposition spaces, *Proc*. *AMS*, 7, 690—700.

[1959] Metrizability of union of spaces, *Proc*. *AMS*, 10, 361—366.

[1960] Hereditarily compact space, *Amer*, *J*. *Math*., 82, 900—916.

Stone M. H

[1937] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Trans*. *AMS*, 41, 375—481.

Sun Shuhao (孙叔豪)

[1988] The class of $\aleph$-spaces is invariant of closed mappings with Lindelöf fibers, *Comment*. *Math*. *Univ*. *Corolina*, 29, 351—354.

Suzuki J.

[1976] On pre-σ-spaces, *Bull*. *Tokyo Gakugei Univ*. *Ser*., 28, 22—32.

Tamano H.

[1962] On compactifications, *J*. *Math*. *Kyoto Univ*., 1, 161—193.

[1971] A characterization of paracompactness, *Fund*. *Math*., 72, 189—201.

Tamano K.

[1989*a*] μ-space, stratifiable spaces and mosaical collections, *Math*. *Japanica*, 34, 483—496.

[1989b] Generalized metric spaces Ⅱ, Topics in Gen. Top., North-Holland, 367—409.

Tanaka Y.

[1987] Point-countable covers and k-networks, *Top. Appl.*, 12. 327—349.

[1989] Metrization Ⅱ, Topics in Gen. Top., North-Holland, 275—314.

Teng Hui (滕辉)

[1990] A note on B-property, *Math. Japonica*, 35, 105—109.

[1991] On σ-product spaces I, *Math. Japonica*, 36, 515—522.

[1993] On countable σ-product spaces, *Chin. Ann. Math.*, 14B, 113—116.

Teng Hui, Xia ShengXiang. Lin Shou (滕辉, 夏省祥, 林寿)

[1989] 某些广义可数紧空间的闭映象, 数学年刊, 10A, 554—558.

Tietze H.

[1923] Beiträge zur allgemeinen Topologie 1, *Math. Ann.*, 88, 290—312.

Tukey J. M.

[1940] Convergence and uniformity in topology, *Ann. Math. Studies*, No. 2.

Tychonoff A.

[1925] Über einen Metrisationssatz von P. Urysohn, *Math. Ann.*, 95, 139—142.

[1930] Über die topologishe Erweiterung von Räumen, *Math. Ann.*, 102. 544—561.

Urysohn P.

[1924] Über die Metrisation der kompakten topologischen Röume, *Math. Ann.*, 92, 275—293.

[1925] Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen, *Math. Ann.*, 94, 262—295.

Ward Jr, L. E.

[1962] A weak Tychonoff theorem and the axiom of choice, *Proc. AMS*, 13, 757.

Watson W. S.

[1981] Pseudocompact metacompact spaces are compact, *Proc. AMS*, 81, 151—152.

Wicke H. H., Worrell J. M.

[1976] Point-countability and compactness, *Proc. AMS*, 55, 427—431.

Willard S.

[1970] General Topology, Addison-Wesley, Reading, Mass.

Worrell J. M.

[1966a] A characterization of metacompact spaces, *Portugal Math.*, 25, 171—174.

[1966b] The closed continuous images of metacompact topological spaces, *Portugal* Math., 25, 175—179.

Worrell J. M., Wicke H. H.

[1965] Characterizations of developable topological spaces, *Canad. J. Math.*, 17, 820—830.

[1980] A covering property which implies isocompactness, *I. Proc. AMS*, 79, 331—334.

Wu Lisheng (吴利生)

[1983] 关于 k-半分层空间，苏州大学学报（自然版），(1)，1—4.

[1984a] A note on covering property which implies isocompactness, 数学研究与评论，(4)，1—2.

[1984b] 关于有限到一伪开映射的一点注记，苏州大学学报（自然版），(1)，8—12.

[1990] On range decomposition theorem, 苏州大学学报（自然版），6，119—122.

Xia Shengxiang (夏省祥)

[1988] Mapping theorems on some generalized metric spaces, *Questions Answers in Gen. Top.*, 6, 107—115.

[1990] On irreducible closed images of M_1-spaces, *Questions Answers in Gen. Top.*, 8, 503—507.

Yosui Y.

[1987] Notes on charecterizations of B-property, *Questions Answers in Gen. Top.*, 5, 105—109.

Yun Ziqiu (恽自求)

[1981] 关于仿紧、次仿紧空间的遗传性，苏州大学学报（自然版），(2)，13—15.

[1989] On point-countable closed k-networks, *Questions Answers in Gen. Top.*, 7, 139—140.

[1990] Metrizable spaces, Lašnev spaces and $\aleph$-spaces, Ph. D. Dissertation, Univ. Helsinki.

[1991] A new charecterization of $\aleph$-spaces, *Top. Proc.*, 16, 253—256.

Zenor P. L.

[1970] A class of countably paracompact spaces, *Proc. AMS*, 24, 258—262.

Zhang Jianping (张建平).

[1983] 关于 ortho-紧空间，苏州大学学报（自然版），(1)，60—66.

Zhong N. (钟宁)

[1990] Generalized metric space and Products, PhD thesis, Univ. of Wisconsin, Madison.

[1992] Products with an M_3-factor, *Top. Appl.*, 45, 131—144.

Zhou Haoxuan（周浩旋）

[1982a] 关于第一可数公理的推广与 Arhangel'skii 问题，数学学报，25，129-135.

[1982b] On the small diagonals, *Top. Appl.*, 13, 283—293.

Zhou Jinyuan（周金元）

[1982] 关于 ortho-紧性的一些注记，数学年刊，8A，632—634.

[1993] Normal spaces whose Stone-Čech remainders have countable tightness, *Proc. AMS*, 1193—1194.

Zhou Youcheng（周友成）

[1983] 关于 θ-加细性，数学研究与评论，3，27—30.

Zhu Jianping（朱建平）

[1991] The generalizations of first countable spaces, *Tsukuba J. Math.*, 15, 167—173.

[1992] On indecomposable subcontinua of β [0, ∞) − [0, ∞), *Top. Appl.*, 45, 261—274.

Zhu Jun（朱俊）

[1984] 拟仿紧和狭义拟仿紧空间的一些性质，数学研究与评论，4 (1)，9—13.

[1988a] 关于 Y. Yajima 的几个定理，数学年刊，9A，160—164.

[1998b] On collectionwise subnormalspaces，数学年刊，9B，216—220.

[1991] 不可约空间的一些性质，数学学报，34，309—315.

英汉名词对照

以下数字所示，举例说明：0.1表示0章（预备知识）§1，1.2.3表示第一章§2的第三个定义或定理，3.4表示三章的习题第4题.

C

D

E

F

G

H

I

Q

R

S

T